



状元笔记

教材详解

八年级数学下

R

丛书主编：洪林旺 本册主编：黄金荣 张佑胜

★ 内含教材习题答案 ★

昔日状元读书留笔记
今朝我用笔记中状元

ZHONGMEN BOOKS BILJI
JIE



YZLI0890123295



龍門書局

龙门品牌·学子至爱
www.longmenbooks.com

状元笔记

教材详解

ZHUANGYUAN BIJI
JIAOCAI XIANGJIE

八年级数学 下



丛书主编：洪林旺

本册主编：黄金荣

副主编：宋 歆

编 委：舒文桥

吴小平

张佑胜

刘 菲

谢志勇

黄新元

李晨霞

万小华

杨吉端

陈友兵

任佳贤

高明艳

钟 文

宋保平



YZLI0890123296

龍 門 書 局

北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:010-64031958;13801093426

邮购电话:010-64034160

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记教材详解. 八年级数学. 下: R/洪林旺丛书主编; 黄金荣, 张佑胜本册主编. —修订版. —北京: 龙门书局, 2011
ISBN 978-7-5088-0630-3

I. 状… II. ①洪…②黄…③张… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 139908 号

责任编辑:张凤玲 赵瑞云/封面设计:魏晋文化



龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

www.longmenbooks.com

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2005年10月第 一 版 开本: A5(890×1240)

2011年9月第四次修订版 印张: 10 1/4

2012年2月第十次印刷 字数: 413 000

定 价: 20.80 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

他山之石,可以攻玉

——《状元笔记·教材详解》前言

是否,在冥思苦想之余,仍感困惑?

是否,在洗耳恭听之时,还是无助?

是否,在挑灯夜战之后,犹觉茫然?

问鼎状元,如千军万马过独木桥。父母、老师不要求每一位孩子、每一位学生都能力争状元,但如果我们都来借鉴、掌握状元的学习方法、学习技巧,那么,我们就能跳出题海,用较少的时间取得良好的学习效果。因此,龙门书局将全国各省高考状元的各个学科的学习心得和方法技巧,经过名师整理、挖掘与提升出来,形成《状元笔记·教材详解》,与同学们一起分享。

它用“详解”破译你的困惑;用“技巧”解除你的无助;用“警示”驱走你的茫然。

翻开这本笔记,你将看到的经典栏目有:

教材详解:全面、细致地讲解教材上的知识点,深入剖析其内涵,并配典型例题对其进行巩固。一讲一练夯实基础,使你考试稳拿基础分。

解题技巧:归纳各节的解题方法和技巧,辅以例题,通过对例题的分析和点评,让你掌握解题所用的通性通法以及小窍门,快速提高解题能力。

状元笔记:总结规律、提炼学习方法和技巧,让你掌握状元的学习方法。

陷阱警示:梳理学习过程中遇到的易错点和易混点,通过错因透视,扫除学习中的困惑和障碍。

参考答案及点拨:给出本书所有习题以及教材习题的答案,并用精细的分析,对习题进行点拨。

亲爱的同学,“他山之石,可以攻玉”,取状元学习之精华,架成功积累之天梯。如能掌握本书的方法和技巧,到时,你将成为或班级、或学校、或县市、或全省乃至全国的佼佼者。

在学习过程中有什么疑问或本书如有遗漏之处,请与 zyxxbj@163.com 联系,不胜感谢!

洪林旺

2011年9月

《状元笔记·教材详解》学生顾问团



·赵永胜·

山西省文科状元
中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山 乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。



·卢谦·

浙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步 滑板

喜欢的书：卡尔维诺文集

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统的梳理，无论是预习时或复习时，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。



·武春颀·

河北省文科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳 网球

喜欢的书：A Thousand Splendid Suns

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习习惯，如制订学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。



·刘诗泽·

黑龙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球 台球 排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题。多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。



·邱汛·

四川省文科状元
北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球 乒乓球

喜欢的书：《哈利·波特》

人生格言：非淡泊无以明志，非宁静无以致远

学习方法、技巧：1.要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2.学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3.学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4.坚持锻炼，劳逸结合。



·林叶·

江苏省文科状元
北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步 台球 放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的生活别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。



·田凯·

北京市理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。



·朱师达·

湖北省理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球 篮球 游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望就不要放弃

学习方法、技巧：1.知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2.知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3.整体把握兴趣和强弱科的平衡。4.正确认识自己的弱点，集中力量克服它。



目 录

CONTENTS

第十六章 分式

1

16.1 分式	2
16.2 分式的运算	18
16.3 分式方程	39
数学活动	56
本章小结	59

第十七章 反比例函数

68

17.1 反比例函数	69
17.2 实际问题与反比例函数	89
数学活动	103
本章小结	106

第十八章 勾股定理

114

18.1 勾股定理	115
18.2 勾股定理的逆定理	140
数学活动	155
本章小结	159

第十九章 四边形

169

19.1 平行四边形	170
19.2 特殊的平行四边形	191
19.3 梯形	223

19.4 课题学习 重心	243
数学活动	246
本章小结	252

第二十章 数据的分析

264

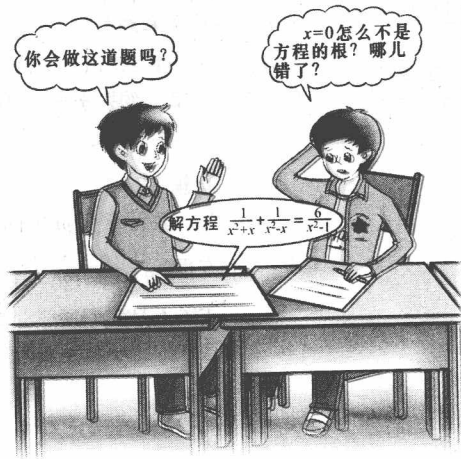
20.1 数据的代表	265
20.2 数据的波动	283
数学活动	297
本章小结	303

期末复习

311

第十六章

分 式



分式及分式方程的应用,为我们进一步研究数量关系带来了很大的方便.

本章学习目标

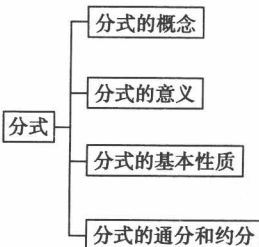
- ◆掌握分式的概念,体会分式是刻画现实世界中数量关系的一类代数式.
- ◆掌握分式的基本性质,掌握分式的约分和通分法则,能进行分式的约分、通分和加减乘除四则运算,会解可化为一元一次方程的分式方程,会检验分式方程的根.
- ◆能解决一些与分式、分式方程有关的简单应用题.
- ◆了解同底数幂的除法的运算性质,会进行简单的整式除法运算,理解整式除法运算的算法,发展有条理的思维及表达能力.

16.1 分 式



整体感知

概念图



1. 分式有意义及其值为 0

(1) 当分母不为 0 时, 分式有意义;

(2) 当分子为 0, 且分母不为 0 时, 分式的值为 0.

2. 分式的基本性质

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M} = \frac{A \div M}{B \div M} \quad (M \text{ 为不为 } 0 \text{ 的整式}).$$

3. 分式的通分和约分

(1) 通分的关键是找出最简公分母;

(2) 约分的关键是约去分子、分母的最大公因式.

要点

知识回顾

1. 分数的概念.
2. 分数的基本性质.
3. 分数的通分.
4. 分数的约分.
5. 因式分解常用方法.

新课导入

教材章头页中的行程问题, 我们得到方程“ $\frac{100}{20+v} = \frac{60}{20-v}$ ”, 方程中等号两边的式子不是我们所学过的分数, 也不是整式, 这样的式子就是本节要学习的分式.



教材详解

知识点一 分式的概念

一般地, 如果 A, B 表示两个整式, 并且 B 中含有字母, 那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式. 例如:

$\frac{60}{x}, \frac{20}{x-3}, -\frac{n}{m}, \frac{a^2-1}{a^2+1}$ 都是分式, 而 $\frac{x}{60}, \frac{x-3}{20}, \frac{a^2-1}{2}, \frac{(x-y)^2}{4}$ 都不是分式.

详解 (1) 分式的形式与分数类似, 但它们是有区别的. 分数是整式, 不是分式, 分式是两个整式相除的商式. 它们的根本区别如下表:

	分 式	分 数	整 式
区别	分母中含有字母	分子、分母中都不含字母	分母中不含字母

(2) 分式与分数是相互联系的: 由于分式中的字母可以表示不同的数, 所以分式比分数更具有一般性; 分数是分式中字母取特定值后的特殊情况.

(3) 分母中的“字母”是表示不同数的“字母”, 但 π 表示圆周率, 是一个常数, 不是字

母,如 $\frac{a}{\pi}$ 是整式而不能当作分式。

(4)分母中含有字母是分式的一个重要标志,判断一个代数式是否是分式不能先化简,如 $\frac{x^2y}{x}$ 是分式,与 xy 有区别, xy 是整式,即只看形式,不能看化简的结果。

【例1】指出下列各式中的整式与分式: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x+y}, \frac{a+b}{2}, \frac{x}{\pi}, \frac{3}{x^2-1}, -\frac{2}{3}, -3+2y^2, \frac{x^2}{x}, \frac{y^2}{4}$ 。

解析:判断分式的依据是看分母中是否含有字母,如果含有字母则是分式,如果不含有字母则不是分式。

解:整式有: $\frac{a+b}{2}, \frac{x}{\pi}, -\frac{2}{3}, -3+2y^2, \frac{y^2}{4}$;

分式有: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x+y}, \frac{3}{x^2-1}, \frac{x^2}{x}$ 。

规律总结:判断分式的依据是看分母中是否含有字母。此题判断容易出错的地方有两处:一个是把 π 也看作字母来判断,没有弄清 π 是一个常数;另一个就是将分式化简成整式后再判断,如 x 和 $\frac{x^2}{x}$,前一个是整式,后一个是分式,它们表示的意义和取值范围是不相同的。

温馨提醒: $\frac{y^2}{4}$ 虽是 $\frac{A}{B}$ 的形式,但分母中不含有字母,而 $\frac{x}{\pi}$ 是分式形式,但分母中的 π 表示一个常数,因此这两个都不是分式。

知识点二 分式有意义,无意义或等于零的条件

1. 分式有意义的条件:分母不等于零。
2. 分式无意义的条件:分母等于零。
3. 分式的值等于零的条件:分子等于零且分母不等于零。

详解:(1)分式有无意义与分母有关但与分子无关,分式中的分母是含有字母的代数式,它的值是随着分式中字母取值的不同而变化的。字母所取的值有可能使分母的值等于零。当分母的值等于零时,分式就没有意义了。这与分数不同,因为分数的分母是一个确定的数,是否为零,一目了然。而分式要明确其是否有意义,就必须分析、讨论分母中所含字母不能取哪些值,以避免分母的值等于零。

(2)本章中如没有特别说明,所遇到的分式都是有意义的,也就是说分式中分母的值不等于零。例如:已知分式 $\frac{|x|-1}{x+1}$ 的值为零,这个条件中隐含着 $x+1 \neq 0$,即 $x \neq -1$ 。

(3)必须在分式有意义的前提下,才能讨论分式的值。

【例2】当 x 为何值时,下列分式有意义?

(1) $\frac{x+1}{x-2}$; (2) $\frac{x-10}{4x+1}$; (3) $\frac{x-1}{x^2+1}$; (4) $\frac{x^2-1}{-x^2-1}$ 。

解析:要使分式有意义,只需分母不为零。

解:(1)由分母 $x-2 \neq 0$, 得 $x \neq 2$. $\therefore$ 当 $x \neq 2$ 时, 原分式有意义.

(2)由分母 $4x+1 \neq 0$, 得 $x \neq -\frac{1}{4}$. $\therefore$ 当 $x \neq -\frac{1}{4}$ 时, 原分式有意义.

(3) $\because$ 不论 x 取什么实数, 都有 $x^2+1>0$. $\therefore x$ 取一切实数, 原分式都有意义.

(4) $\because x^2 \geq 0$, $\therefore x^2+1 \geq 1$, $\therefore -(x^2+1) \leq -1$ 即 $-x^2-1 \leq -1$

$\therefore x$ 取一切实数, 分式 $\frac{x^2-1}{-x^2-1}$ 都有意义.

规律总结: (1)判断分式是否有意义关键是看分母是否等于0, 若等于0则无意义; 反之则有意义. 本题常见的错误是把分母不等于0误认为分母中的字母不等于0.

(2)要使分式有意义, 也可以先假定分母等于0, 求出相应的 x 值, 在 x 的取值范围内去掉这些值即为所求.

【例3】 在什么情况下, 下列分式没有意义?

(1) $\frac{3x}{x(x+7)}$; (2) $\frac{x+1}{x^2}$; (3) $\frac{x+2}{x^2+2}$.

解析: 分式没有意义的条件是分式的分母等于0.

解:(1)由 $x(x+7)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=-7$,

$\therefore$ 当 $x=0$ 或 $x=-7$ 时, 原分式没有意义.

(2)由 $x^2=0$, 得 $x=0$,

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, 原分式没有意义.

(3)由 $x^2 \geq 0$ 得, $x^2+2 > 0$, 即 $x^2+2 \neq 0$,

$\therefore$ 当 x 取一切实数, 原分式都有意义, 即没有 x 值能使分式没有意义.

方法总结: 分式无意义的条件是: 分母为0. 与分式有意义的条件相反, 不要将它们混淆, 同时要注意不能将式子化简以后再确定字母的值, 如: 不能将 $\frac{3x}{x(x+7)}$ 化简成 $\frac{3}{x+7}$ 后, 再确定字母的取值, 否则将丢掉 $x=0$ 这一条件.

【例4】 当 x 为何值时, 下列各式的值为0.

(1) $\frac{2x+1}{3x-2}$; (2) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$; (3) $\frac{x+2}{x^2-4}$.

解析: 分式的值为0的条件是: 分子为0, 且分母不为0, 即只有在分式有意义的前提下, 才能考虑分式值的情况.

解:(1)由 $2x+1=0$ 得 $x=-\frac{1}{2}$,

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, $3x-2=3 \times (-\frac{1}{2})-2 \neq 0$,

$\therefore$ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 分式 $\frac{2x+1}{3x-2}$ 的值为0.

(2)由 $x^2+x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=-1$,

当 $x=0$ 时, $x^2-1=0-1 \neq 0$,

当 $x=-1$ 时, $x^2-1=(-1)^2-1=0$,

$\therefore$ 当 $x=0$ 时, 分式 $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的值为 0。

(3) 由 $x+2=0$ 得 $x=-2$,

当 $x=-2$ 时, $x^2-4=(-2)^2-4=0$,

$\therefore$ 在分式有意义的前提下, 分式 $\frac{x+2}{x^2-4}$ 的值永不为 0。

状元
笔记

规律总结: 分式的值为 0 的条件是: 分子等于 0, 分母不等于 0。二者缺一不可。首先求出使分子为 0 的字母的值, 再检验这个字母的值是否使分母的值不为 0, 当它使分母的值不为 0 时, 这就是我们所要求的字母的值。

知识点三 分式的基本性质

分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式, 分式的值不变。这个性质叫做分式的基本性质, 用式子表示是:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$$

(其中 M 是不等于零的整式)。

详解 (1) 分式的基本性质与分数的基本性质类似, 要深刻领会性质中“不等于零”、“同一个”的含义。“都”说明分子与分母要同时乘以或除以; “同一个”说明分子与分母乘以或除以的整式是相同的; “不等于零”是对分子与分母乘以或除以的整式的限制条件。如 $\frac{2m}{3n} = \frac{2m(x-y)}{3n(x-y)}$ 这一变形中, $x-y$ 必须不等于零。

(2) 基本性质中的 A, B, M 表示的是整式。其中 $B \neq 0$ 是已知条件中隐含着的条件, 一般在解题过程中不另强调; $M \neq 0$ 是在解题过程中另外附加的条件, 在运用分式的基本性质时, 必须重点强调 $M \neq 0$ 这个前提条件。

例如 $\frac{y}{x} = \frac{xy}{x^2}$, 由已知条件, $\frac{y}{x}$ 有意义, 可以知道 $x \neq 0$, 因此, 在用 x 去乘以分式的分子、分母时, 不需要再特别强调 $x \neq 0$ 这个条件。

拓展 (1) 若分式的分子或分母是多项式, 运用分式的性质时, 要先用括号把分子或分母括上, 再乘以或除以同一整式。

(2) 分式的基本性质是将分式进行约分、通分和符号变化的依据, 是今后计算中的重要组成部分。

例 5 填写下列等式中未知的分子或分母。

(1) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{?}$; (2) $\frac{(b-a)(c-b)}{(a-c)(a-b)(b-c)} = \frac{?}{a-c}$ 。

解析: 从已知的两个分子或分母的比较中, 找到分式变形的依据, 再运用分式性质求未知, 是解这类填空题的方法。

解: (1) 先观察分子, 等式左边分式的分子为 $x+y$, 而等式的右边分式的分子为 x^2-y^2 , 由于 $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$, 即将等式左边分式的分子乘以 $x-y$, 因而分母也要乘以 $x-y$, 所以在“?”处应填上 $(x-y)^2$ 。

(2)先观察分母,等式左边的分母为 $(a-c)(a-b)(b-c)$,等式右边的分母为 $a-c$,根据分式的性质可知应将等式左边分式的分子、分母同时除以 $(a-b)(b-c)$,因为 $(b-a)(c-b) \div [(a-b)(b-c)] = 1$,所以在?处填上1.

特别提醒: 注意这里的变形都是恒等变形,必须符合分式的基本性质.

方法技巧: 解有关分式恒等变形的填空题,一般从分子或分母的已知项入手,观察变形方式,再使未知项作相应的变形.

【例6】 不改变分式的值,把下列各式分子与分母中各项的系数都化为最简整数.

$$(1) \frac{\frac{1}{2}a + \frac{4}{3}b}{\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b}; \quad (2) \frac{0.3x + 0.2y}{0.05x - y}; \quad (3) \frac{0.4x^2 + \frac{3}{10}y^2}{\frac{1}{4}x^2 - 0.6y^2}.$$

解析: 第(1)题的分式中分子、分母的各项系数都是分数,应先求出这些分数所有分母的最小公倍数,然后把原式的分子、分母都乘以这个最小公倍数,即可把系数化为整数;第(2)题的各项系数都是小数,且所有小数中小数点后最多的位数是2位,所以原分式的分子、分母都乘以 10^2 ,即100;第(3)题中的系数有分数,也有小数,应先把它们统一成分数或小数,再确定分子、分母应同时乘以的数.

$$\text{解: (1)} \quad \frac{\frac{1}{2}a + \frac{4}{3}b}{\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b} = \frac{\left(\frac{1}{2}a + \frac{4}{3}b\right) \times 12}{\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b\right) \times 12} = \frac{6a + 16b}{4a - 3b}.$$

$$(2) \text{方法一: } \frac{0.3x + 0.2y}{0.05x - y} = \frac{(0.3x + 0.2y) \times 100}{(0.05x - y) \times 100} = \frac{30x + 20y}{5x - 100y} = \frac{5(6x + 4y)}{5(x - 20y)} = \frac{6x + 4y}{x - 20y};$$

$$\text{方法二: 原式} = \frac{(0.3x + 0.2y) \times 20}{(0.05x - y) \times 20} = \frac{6x + 4y}{x - 20y}.$$

$$(3) \text{方法一: } \frac{0.4x^2 + \frac{3}{10}y^2}{\frac{1}{4}x^2 - 0.6y^2} = \frac{(0.4x^2 + 0.3y^2) \times 100}{(0.25x^2 - 0.6y^2) \times 100} = \frac{40x^2 + 30y^2}{25x^2 - 60y^2}$$

$$= \frac{5(8x^2 + 6y^2)}{5(5x^2 - 12y^2)} = \frac{8x^2 + 6y^2}{5x^2 - 12y^2};$$

$$\text{方法二: 原式} = \frac{\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{10}y^2}{\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{5}y^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{10}y^2\right) \times 20}{\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{5}y^2\right) \times 20} = \frac{8x^2 + 6y^2}{5x^2 - 12y^2}.$$

规律总结: 在确定分子和分母中所有分母的最小公倍数时,要把小数先化成最简分数;相乘时分子、分母要加括号,注意不要漏乘.

知识点四 分式的变号法则

分式的变号法则: 对于分式中分子、分母与分式本身的符号,改变其中任何两个,分式的值不变;改变其中任何一个或三个,分式成为原分式的相反数.

详解 分式中有三个符号位置,分别是分子的符号、分母的符号和分式本身的符

号. 根据分式的基本性质有 $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$, $\frac{-b}{a} = \frac{b}{-a}$. 根据有理数除法的符号法则有 $\frac{-b}{a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$. 分式 $\frac{a}{b}$ 与 $-\frac{a}{b}$ 互为相反数. 分式的符号法则在以后关于分式的运算中起着重要的作用.

【例 7】不改变分式的值, 使下列分式的分子和分母前不含“-”号.

(1) $\frac{-2a}{b}$; (2) $\frac{-4x}{-5y}$; (3) $\frac{3m}{-n}$; (4) $-\frac{2b}{-3c}$.

解析: 根据分式的符号法则: 在(1)中, 同时改变分子和分式本身的符号; (2)中同时改变分子和分母的符号; (3)中同时改变分母和分式本身的符号; (4)中同时改变分母和分式本身的符号.

解: (1) $\frac{-2a}{b} = -\frac{2a}{b}$ (2) $\frac{-4x}{-5y} = \frac{4x}{5y}$ (3) $\frac{3m}{-n} = -\frac{3m}{n}$ (4) $-\frac{2b}{-3c} = \frac{2b}{3c}$.

状元笔记

方法技巧: 在分子、分母、分式本身中, 只有任意两个同时改变符号时, 才能保证分式的值不变. 一般地, 在分式运算的最后结果中, 习惯于只保留一个负号, 写在分式的前面.

知识点五 分式的通分

根据分式的基本性质, 把 n 个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母分式, 叫做分式的通分.

详解 (1) 分式通分的依据是分式的基本性质.

(2) 分式通分的关键是确定几个分式的最简公分母.

(3) 确定最简公分母的方法: ①如果各分母都是单项式, 那么最简公分母就是各系数的最小公倍数与相同字母的最高次幂的乘积, 注意所有不同字母都要写在积里; ②如果各分母都是多项式, 就要先把它们分解因式, 然后把每个因式, 当作一个因式(或一个字母), 再按照单项式求最简公分母的方法, 从系数、相同因式和不同因式三个方面去找.

(4) 通分时应注意, 确定的公分母必须是最简公分母, 否则使运算过程变得繁琐, 确定最简公分母后, 再确定各分母所要乘的因式.

【例 8】通分.

(1) $\frac{3}{2a^2b}$ 与 $\frac{a-b}{ab^2c}$; (2) $\frac{2x}{x-5}$ 与 $\frac{3x}{x^2-25}$; (3) $\frac{1}{x+2}$, $\frac{4x}{x^2-4}$, $\frac{2}{x-2}$.

解析: 通分要先确定最简公分母. (1)中最简公分母是 $2a^2b^2c$; (2)(3)中要先把各分母因式分解, 再确定最简公分母.

解: (1) 最简公分母是 $2a^2b^2c$.

$$\frac{3}{2a^2b} = \frac{3 \cdot bc}{2a^2b \cdot bc} = \frac{3bc}{2a^2b^2c}, \frac{a-b}{ab^2c} = \frac{(a-b) \cdot 2a}{ab^2c \cdot 2a} = \frac{2a^2-2ab}{2a^2b^2c}.$$

(2) 最简公分母是 $(x+5)(x-5)$,

$$\frac{2x}{x-5} = \frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2x^2+10x}{x^2-25}, \frac{3x}{x^2-25} = \frac{3x}{x^2-25}.$$

(3) 最简公分母是 $(x+2)(x-2)$,

$$\frac{1}{x+2} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-2}{x^2-4}, \frac{4x}{x^2-4} = \frac{4x}{x^2-4}, \frac{2}{x-2} = \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x+4}{x^2-4}.$$

规律总结: 通分的关键是确定几个分式的最简公分母,若分母是多项式,则要因式分解,要防止遗漏只在一个分母中出现的字母以及符号的变化情况.

易错提示: 通分时确定了分母乘什么,分子也必须随之乘什么,不要只注意分母的统一,而忽略了分子需要同时变形.

知识点六 约分

把一个分式的分子与分母的公因式约去叫做分式的约分.

讲解 (1)约分是根据分式的基本性质,把分式的分子与分母同除以一个公因式,使约分前后的分式值相等,由于原分式有意义,可知分子与分母的公因式一定不为零,不必强调公因式不为0.

(2)约分的实质是将一个分式化成最简分式,即约分后,分式的分子与分母再没有公因式.

(3)约分的关键是确定分式的分子与分母的公因式.分子、分母的公因式是分子、分母的系数的最大公约数与相同因式最低次幂的积;当分式的分子、分母中含有多项式时,要先将其分解因式,使之转化为分子与分母是不能再分解的因式积的形式,然后再进行约分.

(4)约分是对分子、分母的整体进行的,也就是分子的整体和分母的整体都要除以同一个公因式.

辨析 (1)公因式与最简公分母的区别:公因式是各项系数的最大公约数与相同因式的最低次幂的积,而最简公分母是各分母系数的最小公倍数与所有各个因式最高次幂的积.

(2)约分与通分恰好是相反的两种变形,约分是对一个分式而言,而通分则是针对多个分式而言,约分是将一个分式化简,通分则可能将一个分式化繁.

【例9】 约分.

$$(1) \frac{-15x^2y}{10xy^3}; \quad (2) \frac{a^2+2a+1}{a^2-1}; \quad (3) \frac{2n^2-m}{2mn-4n^3}; \quad (4) \frac{xy^2+2y}{y}.$$

解析: (1)分子、分母都是单项式,取15、10的最大公约数5,相同字母 x, y ,则 $5xy$ 是公因式;(2)分式的分子、分母是多项式,先分解因式;(3)中,分子 $(2n^2-m)$ 与分母中的因式 $(m-2n^2)$ 互为相反数,只提出一个负号即可化为相同因式,将结果中负号放在分式本身的前面;(4)中,分母 $y \div y = 1$,所以分式化简为 $\frac{xy^2+2y}{1} = xy+2$,是一个整式.

$$\text{解: (1)} \frac{-15x^2y}{10xy^3} = \frac{5xy \cdot 3x}{5xy \cdot 2y^2} = -\frac{3x}{2y^2};$$

$$(2) \frac{a^2+2a+1}{a^2-1} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1};$$

$$(3) \frac{2n^2-m}{2mn-4n^3} = \frac{2n^2-m}{2n(m-2n^2)} = -\frac{(m-2n^2)}{2n(m-2n^2)}$$

温馨提示: 约分是否彻底,关键在于公因式是否成为分子与分母的最大公因式.

$$= -\frac{1}{2n};$$

$$(4) \frac{xy^2+2y}{y} = \frac{y(xy+2)}{y} = xy+2.$$

状元笔记

规律总结: (1) 如果分子、分母都是单项式, 那么可直接约去分子、分母的公因式, 也就是分子、分母系数的最大公约数与相同字母的最低次幂。

(2) 如果分子、分母中至少有一个是多项式就先分解因式, 然后找出它们的公因式, 再约分。



疑难透析

1. 教材 P6 中的问题: 分式约分约去的是什么?

解析: 分式约分约去的是分子、分母中的公因式。

2. 教材 P7 中的问题: 如果分子或分母是多项式, 先分解因式对约分有什么作用?

解析: 如果分式的分子或分母是多项式, 约分时先分解因式可明显看出它们的公因式是什么, 使约分过程不易出错。

3. 教材 P8 中的问题: 分数和分式在约分和通分的做法上有什么共同点? 这些做法根据了什么原理?

解析: 分数和分式在约分时都是设法约去分子和分母的最大公约数或公因式, 其值不变; 分数在通分时是先找出各分数的分母的最小公倍数, 作为它们的公分母, 而分式的通分也是先找出各分式的分母的最简公分母作为它们的公分母, 然后再进行通分, 这种做法的根据是分数或分式的基本性质。



解题技巧

技巧 1 利用分式有意义的条件解题

【例 10】 若 $\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}$ 的值为零, 求 $\frac{1}{(x-1)^2}$ 的值。

解析: 由分式的值为 0 的条件: 分子为 0 且分母不为 0, 可求出 x 的值, 然后将 x 的值代入所求的代数式求值。

$$\text{解: 由已知得: } \begin{cases} x^2+x=0 \\ x^2+3x+2 \neq 0 \end{cases}, \quad \text{即 } \begin{cases} x(x+1)=0 \\ (x+1)(x+2) \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \text{ 或 } x+1=0 \\ x+1 \neq 0 \text{ 且 } x+2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \text{ 或 } x=-1, \\ x \neq -1 \text{ 且 } x \neq -2, \end{cases}$$

$$\therefore x=0,$$

$$\text{将 } x=0 \text{ 代入得: } \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(0-1)^2} = 1.$$

状元笔记

规律总结: 在考虑分式的值为 0 的问题时, 不仅要考虑其分子为 0, 而且不能忽视分母不为 0 这一条件, 即只有在分式有意义的前提下, 才能求分式的值。

技巧2 分式的基本性质的应用

分式的基本性质的应用

应用一:巧化简分式[例 11]

应用二:整体代入求分式的值[例 12]

应用三:巧取倒数妙求值[例 13]

【例 11】化简 $\frac{x^2+3x+6}{x^2+3x+2} - \frac{x^2+5x+2}{x^2+5x+6}$

解析:本题按照常规方法先将所有的分母进行因式分解,然后通分计算,不难发现:所有的分子计算较复杂.通过观察不妨将每一个分式化简使它们的分子变得简单,然后再计算就非常的容易了.

$$\begin{aligned}
 \text{解:原式} &= \left(1 + \frac{4}{x^2+3x+2}\right) - \left(1 - \frac{4}{x^2+5x+6}\right) \\
 &= \frac{4}{x^2+3x+2} + \frac{4}{x^2+5x+6} \\
 &= \frac{4}{(x+1)(x+2)} + \frac{4}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{4(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{4(x+1)}{(x+2)(x+3)(x+1)} \\
 &= \frac{8x+16}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{8}{(x+1)(x+3)}.
 \end{aligned}$$

状元笔记

方法总结: 在进行分式化简时不能盲目地计算,首先应该观察分式的特
点,然后选择合适的计算方法.

【例 12】已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$, 求 $\frac{3x+7xy-3y}{2x-3xy-2y}$ 的值.

解析:本题可从不同的角度入手,找到已知条件和所求分式之间的关系,利用整体代入的方法求解.



解题关键

运用整体代入法求值是解题的关键.

$$\begin{aligned}
 \text{解:方法一:} &\because \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} = 2, \\
 &\text{等式两边同乘以 } xy, \text{ 得 } 2xy = y-x. \\
 &\therefore x-y = -2xy. \\
 &\therefore \frac{3x+7xy-3y}{2x-3xy-2y} = \frac{3(x-y)+7xy}{2(x-y)-3xy} \\
 &= \frac{-3 \times 2xy + 7xy}{-2 \times 2xy - 3xy} = \frac{xy}{-7xy} = -\frac{1}{7}.
 \end{aligned}$$

$$\text{方法二:} \because \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{3x+7xy-3y}{2x-3xy-2y} &= \frac{\frac{3}{y} + 7 - \frac{3}{x}}{\frac{2}{y} - 3 - \frac{2}{x}} = \frac{-3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + 7}{-2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) - 3} = \frac{-3 \times 2 + 7}{-2 \times 2 - 3} = -\frac{1}{7}.
 \end{aligned}$$

温馨提示: 利用分式的性质变形时必须注意所乘的(或除以的)整式不为零.