单墫数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

组合数学的问题与方法

著

当读书不只是为了考试
你才会真正爱上数学
单墫老师娓娓道来
与你分享他所理解的数学之美

华东师范大学出版社　江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

单墫数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

组合数学的问题与方法

华东师范大学出版社　江苏教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

组合数学的问题与方法/单墫著. —上海:华东师范大学出版社,2010
(单墫老师教你学数学)
ISBN 978-7-5617-8052-7

Ⅰ.①组… Ⅱ.①单… Ⅲ.①代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.623

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第171448号

单墫老师教你学数学
组合数学的问题与方法

著　　者　单　墫
策划组稿　倪　明　孔令志
审读编辑　倪　明　徐惟简
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　南通印刷总厂有限公司
开　　本　890×1240　32开
印　　张　4.25
字　　数　99千字
版　　次　2011年3月第一版
印　　次　2011年8月第二次
书　　号　ISBN 978-7-5617-8052-7/G·4708
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

总 序

科学昌明,既需要科学家筚路蓝缕、披荆斩棘,也需要普及工作者耕耘播种、热心培育.

普及工作很重要.如果将科学研究比作金字塔的塔尖,那么普及工作就是金字塔的底.底宽,塔才高.

科学研究不容易.从事研究,需要才能、努力与机遇.能够从事研究的人不多,好像阳春白雪,曲高和寡.他们的成果需要普及工作者通俗化、趣味化,才能广为人知,才能使更多的人关心、了解、理解,才能引起公众的兴趣,吸引更多的新人一同参加研究.Fermat 大定理就是一个典型的例子.虽然只有 Wiles 一个人给出了证明,看懂证明的不过十几个人或几十个人,但对大定理感兴趣的人成千上万.他们都是普及读物的读者.

普及工作使千万人受益,我就是其中之一.

在学生时代,我读过不少数学普及读物.如刘薰宇的《数学园地》,孙泽瀛的《数学方法趣引》,许莼舫的《几何定理和证题》,Casey 的《近世几何学初编》,日本数学家林鹤一的《初等几何作图不能问题》、上野清的《大代数讲义》,前苏联数学家写的数学丛书《摆线》、《双曲线函数》等,以及稍后中国数学家华罗庚等写的数学丛书《从杨辉三角谈起》等.还在《科学画报》上看到谈祥柏先生写的妙趣横生的文章《奇妙的联系》等.这些数学读物不仅使我学到许多数学知识、方法和思想,眼界大开,而且使我对数学产生了浓厚的兴趣,甚至立志要当一名数学家.

但当数学家的梦想却难以实现.因为那时政治运动频仍.读书,被认为"走白专道路",会横遭批判.史无前例的文化大革命

更是书与读书人的一场浩劫.

“四人帮”倒台后,我才有幸到中国科学技术大学作研究生.在1983年成为首批18名国产博士之一.但这一年我已年届不惑,从事数学研究的黄金时期业已过去.我觉得与其花费时间凑一些垃圾论文,不如做普及工作对社会更有贡献.

对普及工作,我有浓厚的兴趣,也有一定的基础:

1. 由于做过一些研究工作,能够了解较新的材料,能够较为准确地把握数学及有关史料.

2. 由于当过多年教师,文字也还通顺,能够注意趣味性与深入浅出.

1977年恢复高考后,一度出现读书的热潮.这时常庚哲先生带头写了《抽屉原则及其他》,受到普遍的好评.稍后,上海教育出版社的王文才、赵斌两位编辑邀我写稿,我就写了《几何不等式》、《趣味的图论问题》,在1980年出版.以后又陆陆续续写了《覆盖》、《组合数学中的问题和方法》、《趣味数论》、《棋盘上的数学》、《解析几何中的技巧》、《算两次》、《集合及其子集》、《组合几何》、《对应》、《国际数学竞赛解题方法》(与葛军合作)、《不定方程》(与余红兵合作)、《巧解应用题》、《因式分解》、《平面几何中的小花》、《数学竞赛史话》、《解题思路训练》、《十个有趣的问题》、《概率与期望》、《小学数学趣题巧解》、《快乐的数学》、《数列与数学归纳法》、《解题研究》、《数学竞赛教程》等等.

由于文革后,大家渴望读书.而此前的书大多毁于“文革”劫火.因此新出的书颇受欢迎,其中也包括了我写的小册子.

冯克勤先生说:“不要小看了这些小册子,它们将数学的美带给大众.”(冯克勤《评审意见》)

杨世明、杨学枝先生说:“直到1980年,大家才盼来单墫的《几何不等式》一书……不仅普及了基础知识、基本思想方法,而

且激发了研究兴趣.今天初等不等式研究中的许多骨干,都曾从该书获益.单墫的《几何不等式》一书,无疑是这一阶段的标志性的著作."(杨世明,杨学枝《初等不等式在中国》,载《中学数学研究》2007 年第 1 期).

还有一些数学教师见到我客气地说:"我们都是读您的书长大的."

这些评论当然是过奖的溢美之词,但也说明普及工作是一件有意义的、值得去做的事情.

近年来,急功近利的风气在学校蔓延.要根治这种歪风,还得提倡读书.要使广大青少年"热爱知识,渴求学问"(卡耐基《林肯传》,人民文学出版社,2005 版第 16 页).

首先,得多出一些好书,供大家阅读.

读书是天下第一件好事,读好书是人生第一件乐事,好读书,读好书,进步就迅速.有些学生学数学,只做题,从不看书.这种做法是难以进步的.

感谢华东师范大学出版社出版我的科普著作集.这 7 种小册子修订后,重新出版,希望能有较多的读者,特别是青少年读者.希望它们能给爱好数学的朋友们带来乐趣.

前　言

组合数学，这个数学分支正在迅猛地发展．它是古老的，又是年轻的．它的地位日益重要，它的应用极其广泛．从生物学、化学到社会经济，从电路网络到政治生活，都可以见到它的踪影．对于计算机科学，更是“不可一日无此君”．

不但在各种数学竞赛中，它所占的比重越来越大，而且还悄悄地渗入了中学的教材．由于它有助于提高学生的学习兴趣，培养学生的能力，激发学生的才智，已经有不少有识之士预计它将要取过去平面几何的地位而代之．

那么，什么是组合数学呢？

一位组合数学家回答得很妙：

“组合数学就是咱们组合数学家所研究的对象．”

这个答案乍听起来有点循环定义的味道，好像什么也没有说．但再想一下，却颇有道理．既然组合数学正在发展，没有定型，硬要规定什么内容是组合数学，什么不是，岂不是削足适履，作茧自缚．

另一位组合数学家谨慎地下了一个定义：

“组合数学研究的是安排一组事物成各种模式的问题．”

这样笼统、模棱的语句，除了一点心理上的安慰外（谢天谢地，我们总算有了一个定义），恐怕也没有多大用处．

对于中学同学，与其勉勉强强地下个正面的定义，倒不如说凡是不属于几何、三角、概率统计、微积分，也不属于代数与数论（算术）的问题全属于组合数学．

这本小册子，当然无法显示组合数学的全豹，只希望通过

一些实例，使读者对于组合数学的问题与方法能产生一点印象：

“哦，这就是组合数学！”

作　者

目　录

总序 / 1
前言 / 1

1　计数问题 / 1

2　存在问题 / 20

3　图论问题 / 36

4　灵活多样的问题 / 51

习题 / 82

解答 / 88

1

计数问题

“我赴圣地爱弗西(Ives)，
途遇妇女数有七，
每人七袋手中提，
一袋七猫数整齐，
一猫七崽紧相依.
妇与布袋猫与崽，
几何(多少)同时赴圣地?”

这是一首古老的英国童谣.假设它说的是事实的话(我们很怀疑每位妇女手中能提那么多的猫咪)，不难算出

妇　女		7 名
布　袋	$7^2 =$	49 个
猫	$7^3 =$	343 只
崽	$7^4 =$	2401 只
总　数		2800

有很多问题与这首童谣类似.例如：一个军有三个师，一个师有三个旅，一个旅有三个团，一个团有三个营，一个营有三个连，一个连有三个排，一个排有三个班，一个军有多少个班?

显然，答案是

$$3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=3^7=2187.$$

即使问题中出现的数不一定全部相同(全是 7 或全是 3),但计算的方法也是一样的:采用乘法.下面的例 1 便是如此.

例 1

从甲地到乙地有三条路,从乙地到丙地有四条路(如图 1.1),问从甲地到乙地再到丙地有多少种不同的走法?

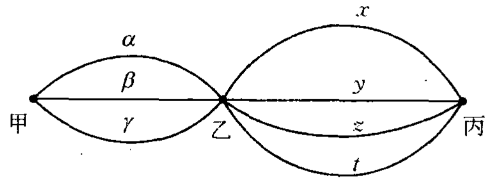

图 1.1

走法共有 $3\times4=12$ 种.我们可以把这 12 种走法全部列举出来,即

$$\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z,\ \alpha t,$$
$$\beta x,\ \beta y,\ \beta z,\ \beta t,$$
$$\gamma x,\ \gamma y,\ \gamma z,\ \gamma t.$$

其中 αx 表示先经路 α 到乙,再经路 x 到丙.

例 1 与下面的问题实质上是一样的:

“如果一棵树有三个枝,一个枝有四朵花,那么一棵树有几朵花?”

从这些简单的问题可以总结出一个重要的原理,即

乘法原理　如果做第一件事有 l 种方法,第一件事做完后做第二件事有 m 种方法,第一、二件事做完后做第三件事有 n 种方法,….那么先做第一件事,再做第二件事,然后再做第三件

事,…,就有

$$l \times m \times n \times \cdots$$

种方法.

这个原理看来简单,却极为重要,有着广泛的应用.

例 ❷ ……………………………………………………

一项比赛有 6 名运动员参加,要定出第一名、第二名、第三名,有多少种不同的结果?

首先选第一名,有 6 种可能:每位运动员都有可能当第一名.第一名选好后再选第二名,有 5 种可能.第一、二名选好后再选第三名,有 4 种可能.因此(根据乘法原理),选出前三名有

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

种不同的结果.

用完全同样的推理,可以知道从 n 个不同的元素中选出 r 个元素排成一列,不同的排列数为

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

(选排在第一位的有 n 种方法,再选排在第二位的有 $n-1$ 种方法,…,最后选排在第 r 位的有 $n-r+1$ 种方法).

如果用 P_n^r 来表示从 n 个不同的元素中选出 r 个元素的排列数,就有公式

$$\mathbf{P}_n^r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1).$$

如果 $r = n$,就得到 n 个元素的**全排列公式**(即将 n 个元素排成一列的不同排列的种数)

$$\mathbf{P}_n(\text{即 } \mathbf{P}_n^n) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

$n!$（读做 n 的阶乘）就是 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ 的缩写. 为了方便起见，规定

$$0!=1.$$

上面的排列公式也可改写成

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

例 3

五个人排成一列照相，有多少种不同的排法？

答案是 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

例 4

用 1, 2, 5, 6, 8 这五个数字组成三位数，如果：(1)三位数中数字不重复出现；(2)数字可以重复出现. 可以组成多少种不同的三位数？

第一个小问题的答案是

$$P_5^3=5\times4\times3=60.$$

第二个小问题的答案是

$$5\times5\times5=125.$$

理由与本节开始的童谣相同：第一位数字有 5 种选法，第二位数字也有 5 种选法（允许第一位数字重复出现），第三位数字也有 5 种选法，因而根据乘法原理，共有 $5\times5\times5$ 种选法.

更一般地，从 n 个元素中选出 r 个排成一列，如果每个元素都可以重复选取，那么排列数为

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{个}}=n^r.$$

这是**允许重复的排列公式**. 不过,重要的不是死背公式,而是如何去运用乘法原理(例 4 的两个问题都可以用乘法原理解决,请读者体会这两个问题的差别).

例 5 ……………………………………………………

用数字 0, 1, 2, 4, 5 可以组成多少个没有重复数字的三位数?

先考虑百位数字,有 4 种选法(0 不能在首位),再考虑十位数字与个位数字,可知答案是

$$4\times4\times3\quad(\text{或 } 4\times P_4^2)=48.$$

例 6 ……………………………………………………

将字母 a, a, a, b, c, d, e 排成一列,有多少种不同的排法?

如果是 7 个不同的字母 a_1, a_2, a_3, b, c, d, e,那么排成一列的排法(全排列)是

$$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1.$$

现在的问题是 7 个字母中有三个是相同的 a. 为了解决这个问题,我们运用一个非常重要的思想:**对应**.

对 7 个不同的字母 a_1, a_2, a_3, b, c, d, e 的一种排列,有 a, a, a, b, c, d, e 的一种排列与它对应,对应的方法是略去 a_1, a_2, a_3 的下标,把它们变成同一个字母 a. 例如排列

$$a_1ba_2cdea_3\longrightarrow abacdea$$

(这里$\longrightarrow$表示对应).

显然,a_1, a_2, a_3, b, c, d, e 的每一种排列都有一个确定的 a, a, a, b, c, d, e 的排列与它对应. 但这个对应并不是一

一对应. 例如与

$$a_1ba_3cdea_2,\ a_1ba_2cdea_3,\ a_2ba_1cdea_3,$$

$$a_2ba_3cdea_1,\ a_3ba_1cdea_2,\ a_3ba_2cdea_1$$

对应的都是同一个:$abacdea$. 事实上,a, a, a, b, c, d, e 的每一个排列对应于 a_1, a_2, a_3, b, c, d, e 中 6 个排列,这 6 $(=3!)$ 种排列是将下标 1, 2, 3 添到三个(在不同位置的)a 上的不同的添法的个数.

这样看来,a, a, a, b, c, d, e 的排列数应当是 7 个字母 a_1, a_2, a_3, b, c, d, e 的全排列的$\frac{1}{6}$,即

$$\frac{7!}{3!}=7\times 6\times 5\times 4=840$$

种.

例 6 所讨论的问题称为**有重复元素的全排列**. 运用对应的思想可以(和例 6 同样地)推出:

将 l 个 a, m 个 b, n 个 c,…排成一列,不同的排法有

$$\frac{(l+m+n+\cdots)!}{l!m!n!\cdots}$$

种.

例 7 ……………………………………………………………

从 6 名运动员中选出三名组成一个代表团,有多少种不同的选法?

这一题与例 2 是不相同的. 例 2 中选出的三名分别为第一名、第二名、第三名,是一个排列问题. 同样的三个人,但名次排列的顺次不同算作不同的选法. 在本例中,选出的是三个人的组

合，不考虑他们的排列. 这种问题称为**组合问题**.

这两种问题也是有联系的. 每个排列，如果不考虑顺序（名次），就是一个组合，所以每个排列有一个组合与它相对应.

另一方面，每个由三个人组成的组合，如果将这三个人分别排为第一名、第二名、第三名，就得到一个排列. 由于这三个人排名次的方法有 $3! = 6$ 种，所以每个组合对应于 $3!$ 个排列.

这样，从 6 名运动员中选出三名的组合数是选出三名的排列数的$\frac{1}{6}$，即

$$\frac{1}{6} \times 6 \times 5 \times 4 = 20.$$

一般地，将 n 个元素中选出 r 个的组合数记为 C_n^r，则根据上面的推理有

$$\begin{aligned} C_n^r &= \frac{1}{r!} \times P_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 1}. \end{aligned}$$

组合数当然是整数，所以我们得到一个"副产品"：

任意的 r 个连续整数的乘积被前 r 个正整数的乘积整除.

例 8 ………………………………………………………………

集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 有多少个子集？（空集也算作 S 的子集）

这个问题可以用两种方法来处理. 第一种方法是：考虑集合 S 有多少个 1 元子集，多少个 2 元子集，…，多少个 n 元子集.

显然，每个 r 元子集就是从 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个元素中取 r 个形成的组合，因此 r 元子集的个数是 C_n^r. 从而 S 的子集共有

(取 $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$$

个. 其中 $C_n^0=\frac{n!}{0!n!}=1$, 表明空集算作集合 S 的子集.

第二种方法是注意到 S 的每一个子集都是从 S 中选取若干个元素组成的,所以每个子集对应于这 n 个元素的一种取舍方式. 元素 1 可能被选入(某个子集),也可能未被选入,即有两种可能. 同样元素 $2, 3, \cdots, n$ 也各有两种可能:被选入或未被选入. 这样从 S 中选元素来组成子集,(根据乘法原理)就有

$$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{n\text{个}}=2^n$$

种方式,也就是说 S 的子集有 2^n 个.

两种方法所得的结果应当相同. 因此,我们又获得一个"副产品":

$$\mathbf{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n.}$$

例 9 ……………………………………………………

将 n 个元素 $1, 2, \cdots, n$ 排在一个圆周上,有多少种不同的排法?

我们仍然采用对应. 将这个问题与 n 个元素排成一列的全排列联系起来.

每一个全排列,有一个圆周排列与它对应,方法是将这个全排列的首尾衔接起来,并且从首经过全部元素到尾的方向是顺时针方向(以下的问题中,凡将直线衔接或将圆周剪开时均作这样的约定,不再一一声明). 例如