

普通高等教育  
电气工程与自动化类  
“十一五”规划教材

ENGINEERING ELECTROMAGNETIC  
FIELDS FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS

# 工程电磁场基础及应用

刘淑琴 主编



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材

# 工程电磁场基础及应用

主 编 刘淑琴

参 编 陈帝伊 代燕杰 胡文静



机械工业出版社

本书为普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材。

本书在阐述电磁场基本理论的基础上，阐明电磁理论对高新技术发展的作用，重点放在电磁场工程问题的提出和应用电磁场分析计算去解决实际问题的。全书共分九章：电磁场的数学物理基础、静电场、恒定电场、静磁场、动态电磁场与电磁波、准静态电磁场、平面电磁波及电磁场的计算机辅助分析，最后一章专门介绍了磁悬浮、电磁兼容等工程电磁场应用新技术，例如将电磁场分析计算应用到磁悬浮技术的优化设计中，可得到多项指标的提升。本书还结合每章的内容编写了大量来自工业生产、实用技术等方面的例题、习题和应用实例。

本书可作为高等院校电气工程、自动化等专业的本科及研究生教材和有关工程人员的参考用书。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

工程电磁场基础及应用 / 刘淑琴主编. —北京: 机械工业出版社, 2011. 3

ISBN 978-7-111-33468-2

普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材

I. ①工… II. ①刘… III ①电磁场 - 高等学校 - 教材 IV ①0441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 042437 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 于苏华 责任编辑: 于苏华 徐凡

版式设计: 张世琴 责任校对: 张晓蓉 责任印制: 乔宇

北京汇林印务有限公司印刷

2011 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 14.75 印张 · 359 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-33468-2

定价: 29.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心: (010) 88361066

门户网: <http://www.cmpbook.com>

销售一部: (010) 68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售二部: (010) 88379649

读者购书热线: (010) 88379203

封面无防伪标均为盗版

# 全国高等学校电气工程与自动化系列教材 编 审 委 员 会

主任委员 汪樵生 浙江大学

副主任委员 (按姓氏笔画排序)

王兆安 西安交通大学

王孝武 合肥工业大学

田作华 上海交通大学

刘 丁 西安理工大学

陈伯时 上海大学

郑大钟 清华大学

赵光宙 浙江大学

赵 曜 四川大学

韩雪清 机械工业出版社

委 员 (按姓氏笔画排序)

戈宝军 哈尔滨理工大学

王钦若 广东工业大学

吴 刚 中国科技大学

张纯江 燕山大学

张晓华 哈尔滨工业大学

邹积岩 大连理工大学

陈庆伟 南京理工大学

夏长亮 天津大学

萧蕴诗 同济大学

韩 力 重庆大学

熊 蕊 华中科技大学

方 敏 合肥工业大学

白保东 沈阳工业大学

张化光 东北大学

张 波 华南理工大学

杨 耕 清华大学

陈 冲 福州大学

范 瑜 北京交通大学

章 兢 湖南大学

程 明 东南大学

雷银照 北京航空航天大学

# 序

随着科学技术的不断进步，电气工程与自动化技术正以令人瞩目的发展速度，改变着我国工业的整体面貌。同时，对社会的生产方式、人们的生活方式和思想观念也产生了重大的影响，并在现代化建设中发挥着越来越重要的作用。随着与信息科学、计算机科学和能源科学等相关学科的交叉融合，它正在向智能化、网络化和集成化的方向发展。

教育是培养人才和增强民族创新能力的基础，高等学校作为国家培养人才的主要基地，肩负着教书育人的神圣使命。在实际教学中，根据社会需求，构建具有时代特征、反映最新科技成果的知识体系是每个教育工作者义不容辞的光荣任务。

教书育人，教材先行。机械工业出版社几十年来出版了大量的电气工程与自动化类教材，有些教材十几年、几十年长盛不衰，有着很好的基础。为了适应我国目前高等学校电气工程与自动化类专业人才培养的需要，配合各高等学校的教学改革进程，满足不同层次、不同类型的学校在课程设置上的需求，由中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科教学委员会、中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会、机械工业出版社共同发起成立了“全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会”，组织出版新的电气工程与自动化类系列教材。这套教材基于“**加强基础，削枝强干，循序渐进，力求创新**”的原则，通过对传统课程内容的整合、交融和改革，以不同的模块组合来满足各类学校特色办学的需要。并力求做到：

**1. 适用性：**结合电气工程与自动化类专业的培养目标、专业定位，按技术基础课、专业基础课、专业课和教学实践等环节，进行选材组稿。对有的具有特色的教材采取一纲多本的方法。注重课程之间的交叉与衔接，在满足系统性的前提下，尽量减少内容上的重复。

**2. 示范性：**力求教材中展现的教学理念、知识体系、知识点和实施方案在本领域中具有广泛的辐射性和示范性，代表并引导教学发展的趋势和方向。

**3. 创新性：**在教材编写中强调与时俱进，对原有的知识体系进行实质性的改革和发展，鼓励教材涵盖新体系、新内容、新技术，注重教学理论创新和实践创新，以适应新形势下的教学规律。

**4. 权威性：**本系列教材的编委由长期工作在教学第一线的知名教授和学者组成。他们知识渊博，经验丰富。组稿过程严谨细致，对书目确定、主编征集、

资料申报和专家评审等都有明确的规范和要求，为确保教材的高质量提供了有力保障。

此套教材的顺利出版，先后得到全国数十所高校相关领导的大力支持和广大骨干教师的积极参与，在此谨表示衷心的感谢，并欢迎广大师生提出宝贵的意见和建议。

此套教材的出版如能在转变教学思想、推动教学改革、更新专业知识体系、创造适应学生个性和多样化发展的学习环境、培养学生的创新能力等方面收到成效，我们将会感到莫大的欣慰。

**全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会**  
**汪樾生 陈伯时 郑大钟**

# 前 言

电磁场是高等学校工科电类专业的一门重要的专业基础课。随着科学技术日新月异的发展,电磁场理论和技术的研究已经渗透到医疗、生物、天文、地理等众多的领域,这也为电磁场学科的发展和应用提供了更为广阔的空间。例如将电磁场分析计算应用到磁悬浮技术的优化设计中,可得到多项指标的提升。为了使能够了解电磁场理论的应用和前沿知识,激发学生的学习兴趣,提高他们应用理论知识解决实际问题的能力,我们编写的《工程电磁场基础及应用》一书在系统阐述电磁场基本理论的基础上,通过已成功用于工程实际中的技术成果,介绍电磁场工程问题的提出和应用电磁场理论分析计算解决实际问题的过程。

本书的编写特点如下:首先,介绍电磁场的数学物理基础,帮助学生在尽量不借助数学参考文献的情况下学习后续内容。其次,按传统体系逐一讲述了静电场、恒定电场、静磁场、动态电磁场与电磁波、准静态电磁场、平面电磁波、计算机辅助分析及工程电磁场应用新技术,本着由简单到复杂、由浅入深、由特殊规律到普遍规律的顺序,使学生逐步加深对电磁场理论及工程应用的了解。再次,为了提高学生的学习兴趣,每一章开始都介绍和本章内容相关的电磁场发展史上的科学故事,内容涉及相关科学家的科学实验、主要贡献,发现电磁学规律的过程等。希望能够通过学生对电磁场学科背景知识的了解,提高兴趣、巩固知识。最后,在每一章阐述经典理论之后,都相应介绍几个与之相关的工程应用实例,希望这部分内容能帮助学生提高应用电磁场理论解决实际问题的能力。另外,每章最后都附有英文科技前沿,介绍电磁场及工程技术的最新发展动向,开阔学生眼界,扩大知识面,为激励创新提供思路。

参加本书编写的有刘淑琴、陈帝伊、代燕杰、胡文静,由刘淑琴担任主编。编写过程中得到谭震宇教授关心与支持,硕士生赵闻、杨洪涛对书中的图进行了整理,在此一并致以衷心的感谢。

本书可作为电气工程、自动化等专业的本科及相关专业研究生教材和有关工程人员的参考用书。

书中难免存在不足之处,敬请使用本书的师生和读者批评指正。

作 者

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 电磁场的数学物理基础</b> .....	1
1.1 电磁场基本物理量 .....	1
1.1.1 电荷密度与电流密度 .....	1
1.1.2 电场强度 .....	2
1.1.3 磁感应强度 .....	3
1.2 矢量分析 .....	3
1.2.1 矢量代数 .....	4
1.2.2 坐标系 .....	5
1.2.3 矢量积分 .....	8
1.3 场论基础 .....	9
1.3.1 场的基本概念 .....	9
1.3.2 标量场的梯度 .....	10
1.3.3 矢量场的散度和散度定理 .....	11
1.3.4 矢量场的旋度和斯托克斯定理 .....	13
1.3.5 格林定理和亥姆霍兹定理 .....	14
1.3.6 场的分类 .....	16
<b>第 2 章 静电场</b> .....	18
2.1 电磁学历史上第一个定量定律—— 库仑定律 .....	18
2.2 真空中的静电场 .....	19
2.2.1 库仑定律 .....	19
2.2.2 电场强度 .....	20
2.2.3 静电场的环路定理和电位 .....	21
2.2.4 真空中的高斯通量定理 .....	24
2.3 电介质中的静电场 .....	24
2.3.1 静电场中的导体 .....	24
2.3.2 静电场中的电介质 .....	25
2.3.3 电介质中的高斯通量定理 .....	26
2.4 静电场的基本方程 .....	28
2.4.1 静电场的基本方程 .....	28
2.4.2 分界面上的衔接条件 .....	29
2.5 静电场的边值问题 .....	30
2.5.1 静电场的边值问题 .....	30
2.5.2 唯一性定理 .....	32
2.6 边值问题的解法 .....	33
2.6.1 分离变量法 .....	33
2.6.2 镜像法和电轴法 .....	37
2.7 电容和部分电容 .....	44
2.7.1 电容 .....	44
2.7.2 部分电容 .....	45
2.7.3 静电屏蔽 .....	48
2.8 静电场的能量和力 .....	49
2.8.1 带电体系统中的静电场能量 .....	49
2.8.2 静电场能量分布及其密度 .....	50
2.8.3 静电力 .....	51
2.9 工程应用实例 .....	53
2.9.1 架空地线的防雷作用 .....	53
2.9.2 换位三相输电线的每相 工作电容 .....	54
2.9.3 静电发电机 .....	55
2.10 本章小结 .....	56
2.11 习题 .....	58
2.12 科技前沿 .....	60
<b>第 3 章 恒定电场</b> .....	61
3.1 从电气研究的热潮到焦耳定律的 建立 .....	61
3.2 恒定电场的基本方程 .....	62
3.2.1 电源与恒定电场 .....	62
3.2.2 欧姆定律和焦耳定律的 微分形式 .....	63
3.2.3 恒定电场基本方程及分界面上的 衔接条件 .....	64
3.3 恒定电场的边值问题 .....	66
3.4 静电比拟 .....	67
3.5 电导与接地电阻 .....	68
3.5.1 电导 .....	68
3.5.2 多电极系统的部分电导 .....	69



3.5.3 接地电阻 .....	70	5.1.2 麦克斯韦理论 .....	117
3.5.4 跨步电压 .....	72	5.2 法拉第电磁感应定律 .....	118
3.6 工程应用实例 .....	73	5.2.1 时变磁场中的静止回路 .....	118
3.6.1 电法勘探 .....	73	5.2.2 静磁场中的运动导体 .....	119
3.6.2 普通电阻率法测井 .....	75	5.2.3 时变磁场中的运动回路 .....	119
3.7 本章小结 .....	76	5.3 全电流定律 .....	120
3.8 习题 .....	77	5.4 麦克斯韦方程组 .....	122
3.9 科技前沿 .....	79	5.5 时变场的边界条件 .....	124
<b>第4章 静磁场</b> .....	<b>80</b>	5.5.1 不同媒质分界面上的衔接条件 .....	124
4.1 从奥斯特揭示电与磁的联系到安培环路定理的建立 .....	80	5.5.2 两种无损耗、线性媒质之间的分界面 .....	125
4.2 静磁场的基本方程 .....	81	5.5.3 电媒质与理想导体之间的分界面 .....	126
4.2.1 安培力定理 .....	81	5.6 动态位及其波动方程 .....	126
4.2.2 磁感应强度 .....	82	5.6.1 动态位的定义 .....	126
4.2.3 磁场的高斯定理 .....	83	5.6.2 达朗贝尔方程 .....	127
4.2.4 媒质的磁化 .....	84	5.6.3 达朗贝尔方程的解 .....	128
4.2.5 一般形式的安培环路定理 .....	86	5.7 坡印亭定理与坡印亭矢量 .....	129
4.2.6 静磁场的基本方程 .....	88	5.7.1 坡印亭定理 .....	130
4.3 静磁场的边界条件 .....	88	5.7.2 坡印亭矢量 .....	130
4.4 边界问题的解法 .....	90	5.8 正弦电磁场 .....	132
4.5 矢量磁位及其边值问题 .....	91	5.9 工程应用实例 .....	135
4.5.1 矢量磁位 .....	91	5.10 本章小结 .....	136
4.5.2 矢量磁位的边值问题 .....	93	5.11 习题 .....	138
4.6 标量磁位 .....	94	5.12 科技前沿 .....	139
4.7 电感和电感器 .....	96	<b>第6章 准静态电磁场</b> .....	<b>141</b>
4.8 静磁场的能量和力 .....	97	6.1 麦克斯韦的革命——引导现代物理时代的到来 .....	141
4.8.1 用场量表示静磁能 .....	98	6.2 电准静态场和磁准静态场 .....	142
4.8.2 用磁场储能表示力 .....	100	6.2.1 电准静态场 .....	142
4.8.3 静磁力 .....	101	6.2.2 磁准静态场 .....	143
4.9 磁路 .....	102	6.3 导电媒质中自由电荷的弛豫过程 .....	144
4.10 工程应用实例 .....	105	6.3.1 电荷在均匀导电媒质中的弛豫过程 .....	144
4.10.1 三相输电线的每相等效电感 .....	105	6.3.2 电荷在分块均匀导电媒质中的弛豫过程 .....	145
4.10.2 电力电缆路径的探测 .....	106	6.4 趋肤效应与邻近效应 .....	147
4.10.3 电磁炮 .....	107	6.4.1 电磁场的扩散方程 .....	147
4.10.4 磁力矿物分选 .....	108	6.4.2 趋肤效应与透入深度 .....	148
4.10.5 磁流体发电机 .....	109	6.4.3 邻近效应 .....	150
4.11 本章小结 .....	110	6.5 涡流及其损耗 .....	151
4.12 习题 .....	112	6.6 电路定律与交流阻抗 .....	153
4.13 科技前沿 .....	114	6.7 工程应用实例 .....	155
<b>第5章 时变电磁场与电磁波</b> .....	<b>116</b>		
5.1 电磁场理论的集大成——麦克斯韦方程组 .....	116		
5.1.1 法拉第与电磁感应定律 .....	116		

6.7.1 电涡流传感器 .....	155	8.2.2 有限差分法 .....	193
6.7.2 无损探伤 .....	156	8.2.3 边界元法 .....	196
6.7.3 变压器和自耦变压器 .....	157	8.3 电磁场数值计算软件 .....	197
6.8 本章小结 .....	159	8.4 科技前沿 .....	198
6.9 习题 .....	160	<b>第9章 工程电磁场应用新技术</b> .....	199
6.10 科技前沿 .....	162	9.1 洛伦兹把经典电磁理论推向了 最后的高峰 .....	199
<b>第7章 平面电磁波</b> .....	163	9.2 磁悬浮技术 .....	200
7.1 赫兹的实验与麦克斯韦理论 .....	163	9.2.1 磁力和磁悬浮原理 .....	200
7.2 自由空间中的平面波 .....	164	9.2.2 磁悬浮轴承与旋转机械 .....	202
7.2.1 一般波动方程 .....	164	9.2.3 磁悬浮列车 .....	205
7.2.2 平面电磁波 .....	165	9.2.4 磁悬浮人工心脏泵 .....	207
7.3 导电媒质中的平面波 .....	167	9.3 电磁辐射生物效应机理中的计算 电磁学方法 .....	208
7.3.1 低损耗媒质中的平面波 .....	168	9.3.1 电磁场与电磁辐射 .....	208
7.3.2 良导体中的平面波 .....	169	9.3.2 电磁辐射生物效应机理研究中的 计算电磁学方法 .....	209
7.4 平面波的反射与折射 .....	169	9.3.3 应用时域有限差分法计算电磁辐射 在生物组织中的比吸收率 .....	210
7.5 导电电磁波和波导 .....	172	9.4 电磁环境与电磁兼容技术 .....	211
7.5.1 导电电磁波的分类 .....	173	9.4.1 电磁环境与电磁干扰源 .....	211
7.5.2 电磁波在波导中的传播特性 .....	175	9.4.2 电磁干扰的传播 .....	212
7.5.3 矩形金属波导 .....	175	9.4.3 电磁干扰的抑制技术 .....	213
7.5.4 谐振腔 .....	178	9.4.4 电磁兼容及其测试 .....	214
7.6 工程应用实例 .....	181	9.5 科技前沿 .....	215
7.6.1 移动通信技术 .....	181	<b>附录</b> .....	217
7.6.2 电磁波测距 .....	183	附录 A 电磁量及其国际制单位 .....	217
7.7 本章小结 .....	185	附录 B 一些常用材料的基本常量 .....	221
7.8 习题 .....	186	<b>参考文献</b> .....	223
7.9 科技前沿 .....	187		
<b>第8章 电磁场的计算机辅助分析</b> .....	189		
8.1 电磁场数值计算与计算机辅助分析 .....	189		
8.2 电磁场数值计算常用方法 .....	190		
8.2.1 有限元法 .....	190		

# 第 1 章 电磁场的数学物理基础

本章在大学普通物理电磁学的基础上，从电荷密度与电流密度的定义入手，回顾电磁场的基本物理量——电场强度和磁感应强度，并介绍电磁学的数学基础——矢量分析和场论的知识。

## 1.1 电磁场基本物理量

### 1.1.1 电荷密度与电流密度

电荷是电磁场“源”之一，由物质的结构理论可知，电荷是以电子电荷为基本单位的，任何带电体的电荷量都是以电子电荷量的正或负整数倍的数值量出现的。从微观上看，电荷的分布是离散的；而从宏观上看，可以把大量电荷聚集所产生的电荷分布看成是位置的连续分布函数。电荷所在的位置称为源点，用坐标  $(x', y', z')$  表示。根据电荷的分布情况不同，可分为体电荷、面电荷和线电荷，对应的电荷密度有体电荷密度、面电荷密度和线电荷密度。

#### 1. 体电荷密度 $\rho$

电荷连续分布于体积  $V$  内，在位于  $(x', y', z')$  的源点，取一无限小体积元  $\Delta V$ ，若其中的电荷量为  $\Delta q$ ，则单位体积内所含的电荷量，即体电荷密度（简称为电荷密度），可表示为

$$\rho(x', y', z', t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^3) \quad (1-1)$$

#### 2. 面电荷密度 $\sigma$

当电荷连续地分布在一层厚度很薄的区域时，如果带电面的厚度可以忽略不计，就可抽象为电荷在面上分布，则单位面积中的电量即面电荷密度，可表示为

$$\sigma(x', y', z', t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (\text{C/m}^2) \quad (1-2)$$

#### 3. 线电荷密度 $\tau$

当电荷连续分布在一个细长的线形区域时，若线形区域的截面可忽略不计，则可定义单位长度内的电量即线电荷密度可表示为

$$\tau(x', y', z', t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (\text{C/m}) \quad (1-3)$$

#### 4. 点电荷

当电荷分布在一个很小的区域时，若它占有的体积可以忽略不计，则可看为点电荷，定义为

$$q(x', y', z', t) = \lim_{V \rightarrow 0} \int_{V'} \rho dV (\text{C}) \quad (1-4)$$

其特点是：体积趋于零，电荷密度  $\rho$  趋于无穷大。

电流也是产生电磁场的“源”，电荷的有规则运动形成电流，单位时间内通过某截面的电荷量为电流强度（简称电流），其定义为

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (\text{A}) \quad (1-5)$$

由于在电路理论中，电流沿导线流动，不考虑电流通路横截面上每一点的电荷运动情况，因此用电流强度这个物理量就足以说明其特性。但是在电磁场理论中，更关注在不同场点上单位时间内的电荷量及流向。为了描述电荷在每一点上流动的具体状态，引入电流密度概念。与电荷密度类似，电流密度也分为体电流密度、面电流密度和线电流密度。

### 1. 体电流密度 $\mathbf{J}$

密度为  $\rho$  的体电荷以速度  $\mathbf{v}$  在体积中运动形成体积电流。体电流密度（简称电流密度）定义为

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (\text{A/m}^2) \quad (1-6)$$

体电流密度在数值上为垂直于电荷运动方向的单位面积上通过的电流，电流密度  $\mathbf{J}$  的方向为该点正电荷运动的方向。如果面积元  $d\mathbf{S}$  的法线方向与电流密度  $\mathbf{J}$  的夹角为  $\theta$ ，则通过该面积元的电流元为

$$di = J dS \cos\theta = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

通过载流体中任意截面  $S$  的电流为其积分量，即

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-7)$$

### 2. 面电流密度 $\mathbf{K}$

若电荷在一层厚度可忽略不计的导体上流动，则可抽象为表面电流。此时，电流通过的截面可近似为一条截线，可认为是由密度为  $\sigma$  的面电荷以速度  $\mathbf{v}$  运动形成的。因此，面电流密度为

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} \quad (\text{A/m}) \quad (1-8)$$

面电流密度在数值上为垂直于电荷运动方向的单位截线  $b$  上穿过的电流，其方向受限在厚度忽略不计的曲面上。如果线元  $d\mathbf{b}$  的横向单位矢量  $\mathbf{n}$  与面电流密度  $\mathbf{K}$  的夹角为  $\theta$ ，则通过该线元的电流为

$$di = K db \cos\theta = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{b}$$

通过载流面上任意截线  $b$  的电流为其积分量：

$$i = \int_b \mathbf{K} \cdot d\mathbf{b} \quad (1-9)$$

### 3. 线电流

若电荷在横截面可忽略不计的导线  $l$  上流动，即为线电流。它可看成是密度为  $\tau$  的线电荷以速度  $\mathbf{v}$  沿导线运动形成的。因此，线电流为

$$i = \tau \mathbf{v} = \tau \frac{dl}{dt} = \frac{dq}{dt} \quad (\text{A}) \quad (1-10)$$

电荷只能顺或逆导线运动，所以线电流不是矢量，而是标量。

#### 1.1.2 电场强度

场是一种特殊的物质，这种物质形式和常见的由原子和分子组成的实物形式不同，它一

般不能凭人们的感官直接感觉到它的存在，因此它的物质性往往比较抽象。其实物质的任何一种属性，总是通过它和其他物质的相互作用表现出来的。在电荷周围存在着的一种特殊形式的物质——电场，是统一的电磁场的一个方面，它的属性也是通过它和其他物质的作用表现出来的，它的表现是对于被引入场中的静止电荷有力的作用，于是人们引入物理量——电场强度来描述电场的这一重要特性。

把一个体积很小、电量足够小的试验电荷  $q$  静止地放在电场中某点  $P$ ，电场对它的作用力为  $\mathbf{F}$ ，则电场强度  $\mathbf{E}$ （简称场强）定义为

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (\text{V/m}) \quad (1-11)$$

电场强度  $\mathbf{E}$  是一个随着空间位置变化的矢量函数，仅与该点的电场有关，而与试验电荷量无关。在国际单位制中， $\mathbf{E}$  的单位是伏/米 (V/m)。电场强度是矢量，具有明确的物理意义：其大小为单位正电荷在该点所受的电场力，其方向为正电荷在该点受力的方向。

### 1.1.3 磁感应强度

与描述电场的方法类似，为了描述磁场，根据运动电荷在磁场中受力的性质，引入一个物理量——磁感应强度。

通过实验定量测量运动电荷所带电荷量  $q$ 、它的速度  $\mathbf{v}$  和它在磁场中所受到的力  $\mathbf{F}$ ，定义磁感应强度  $\mathbf{B}$  满足如下关系式：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1-12)$$

由式 (1-12) 可知，该式是一个矢量关系式，其磁感应强度的含义如下所述。

#### 1. $\mathbf{B}$ 的方向

$\mathbf{B}$  的方向沿零力线（磁场中的任意一点  $P$  都存在一个唯一的特殊的取向，当运动电荷沿该取向通过  $P$  点时，无论运动电荷的电量和速率大小如何，运动电荷都不受力，于是把过  $P$  点的这个特殊取向称为零力线），磁场中任意点的零力线有两个指向，确定  $\mathbf{B}$  的方向时，可以先设  $\mathbf{B}$  沿其中任一指向，若  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  的方向正是运动正电荷在该点所受磁力的方向，则所设方向就是  $\mathbf{B}$  的方向；反之， $\mathbf{B}$  的方向则与所设方向相反。

#### 2. $\mathbf{B}$ 的大小

将  $\mathbf{B}$  的定义式（仅考虑大小）改写为

$$F = qvB \sin\theta$$

其中， $\theta$  为  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{B}$  的夹角。

则  $\mathbf{B}$  的大小为

$$B = \frac{F}{q v \sin\theta} \quad (1-13)$$

在国际单位制中，磁感应强度  $\mathbf{B}$  的单位为特斯拉 (T)， $\mathbf{B}$  的单位有时还用高斯 (G)， $1\text{T} = 10^4\text{G}$ 。

## 1.2 矢量分析

矢量分析和场论是研究电磁场理论的重要数学工具，它对简化公式、明确概念、掌握规

律很有益处，它更是学习电磁场入门的数学基础。下面将介绍这部分内容。

### 1.2.1 矢量代数

电磁场中遇到的绝大多数量，一般分为两类：标量和矢量。

有一类物理量，如时间、质量、温度、功和电荷等，只有大小和正负，没有方向，即只用代数值就能够完整描述的物理量，称之为标量。而另一类物理量，如位移、速度、力矩、力、电场强度等，既有大小又有方向，相加、减时遵从平行四边形运算法则，这类物理量称为矢量，通常用带箭头的字母或黑体字母来表示，以示与标量的区别。一个矢量常用一个有向线段来表示，线段的长度表示矢量大小，而箭头的指向表示矢量的方向。

矢量的运算不同于标量。例如，一个物体同时受到两个不同方向的力作用时，计算合力必须遵从平行四边形运算法则。同样，两矢量的相减和相乘也不能只对矢量大小进行处理，而且矢量除法没有意义。

#### 1. 矢量的加法

设有两个矢量  $A$  和  $B$ ，如图 1-1 所示。将它们相加时，可将两矢量的起点交于一点，再以这两个矢量  $A$  和  $B$  为邻边作平行四边形，从两矢量的交点作平行四边形的对角线，此对角线即代表两矢量之和  $C$ ，用矢量表示为

$$C = A + B \quad (1-14)$$

$C$  称为合矢量，而  $A$  和  $B$  则称为矢量  $C$  的分矢量。

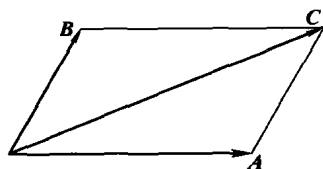


图 1-1 矢量的加法

#### 2. 矢量的减法

矢量的减法是按矢量加法的逆运算来定义的。如果  $B$  是一个矢量，则  $-B$  也是一个矢量，它的大小和  $B$  相等，但方向相反。定义另一个矢量  $D$ ，记作  $D = A - B$ ，它为两矢量  $A$  和  $B$  的减法，如图 1-2 所示， $A - B$  等于由  $B$  的末端到达  $A$  的末端的矢量，则

$$D = A + (-B) \quad (1-15)$$

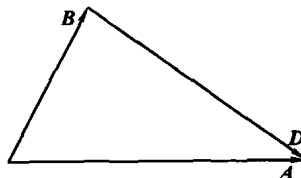


图 1-2 矢量的减法

#### 3. 矢量的数乘

如果矢量  $A$  乘以一个标量  $m$ ，得到矢量  $B$ ，即

$$B = mA \quad (1-16)$$

由式 (1-16) 可知， $B$  的大小等于  $A$  的  $|m|$  倍。而方向，若  $m > 0$ ， $B$  与  $A$  同方向；若  $m < 0$ ， $B$  与  $A$  反方向。

#### 4. 矢量的点积和叉积

设  $A$  和  $B$  为任意两个矢量，它们的夹角为  $\theta$ ，则它们的点积通常用  $A \cdot B$  来表示，定义为此两矢量的大小与它们之间夹角的余弦之积，如图 1-3 所示，即

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1-17)$$

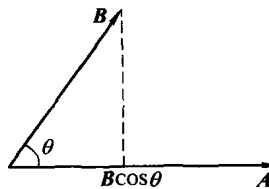


图 1-3 矢量的点积

$A$  和  $B$  的点积是一个标量，因此，点积也称为标积。当两矢量平行时，点积最大。而如果两非零矢量的点积为零，则两矢量是正交的。

矢量  $A$  和  $B$  的叉积设为矢量  $C$ ，即

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1-18)$$

叉积是一个矢量，它的方向垂直于包含  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的平面，大小等于  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  两矢量的大小与它们之间夹角的正弦之积，即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}\mathbf{B}\sin\theta|\mathbf{e}_n \quad (1-19)$$

式中， $\mathbf{e}_n$  是垂直于  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  所形成的平面的单位矢量，其方向遵从由  $\mathbf{A}$  到  $\mathbf{B}$  的右手螺旋关系，如图 1-4 所示。

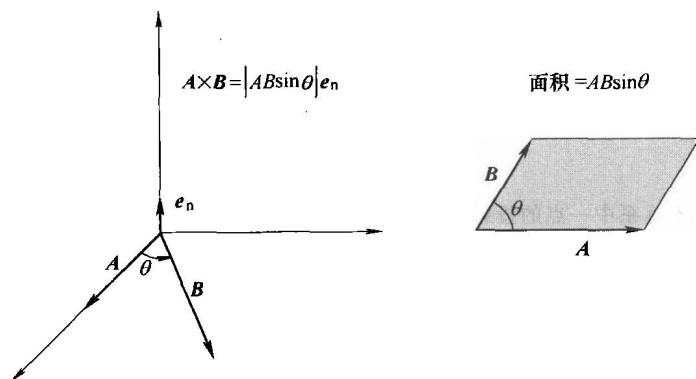


图 1-4  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  叉积示意图

## 1.2.2 坐标系

为了方便计算，常从数学的观点把矢量分解成沿三个互相正交（垂直）方向的分量来处理，本节将介绍三种正交坐标系：直角坐标系（又称为笛卡儿坐标系）、圆柱坐标系和球坐标系。

### 1. 直角坐标系

直角坐标系是三种坐标系中最常用的一种，用来研究许多工程电磁场原理。直角坐标系由三个互相正交的直线  $x$ 、 $y$  和  $z$  形成，三直线（称为轴线）的交点是原点。用  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$  和  $\mathbf{e}_z$  表示分别沿  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴的单位矢量。

空间任意一点  $P(X, Y, Z)$  可由它在三轴上的投影唯一地确定，如图 1-5 所示。位置矢量（简称位矢） $\mathbf{r}$  是一个从原点指向  $P$  点的矢量，可表示为

$$\mathbf{r} = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + Z\mathbf{e}_z \quad (1-20)$$

式中， $X$ 、 $Y$  和  $Z$  是  $\mathbf{r}$  在  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴上的投影。

如果  $A_x$ 、 $A_y$  和  $A_z$  是  $\mathbf{A}$  在对应轴的投影，如图 1-6 所示，则  $\mathbf{A}$  可以写为

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z \quad (1-21)$$

类似地，矢量  $\mathbf{B}$  可以写成

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z \quad (1-22)$$

$\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  两矢量之和， $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ，可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (A_x + B_x)\mathbf{e}_x + (A_y + B_y)\mathbf{e}_y + (A_z + B_z)\mathbf{e}_z \\ &= C_x\mathbf{e}_x + C_y\mathbf{e}_y + C_z\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1-23)$$

式中， $C_x = A_x + B_x$ 、 $C_y = A_y + B_y$  和  $C_z = A_z + B_z$  是  $\mathbf{C}$  沿  $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$  和  $\mathbf{e}_z$  三个单位矢量的分量。

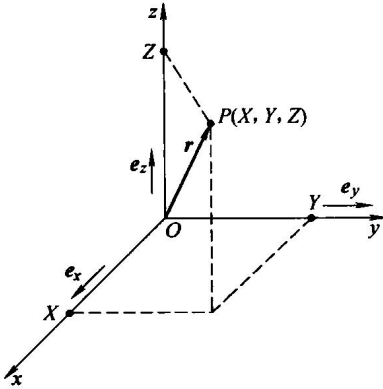


图 1-5 直角坐标系中一点的投影

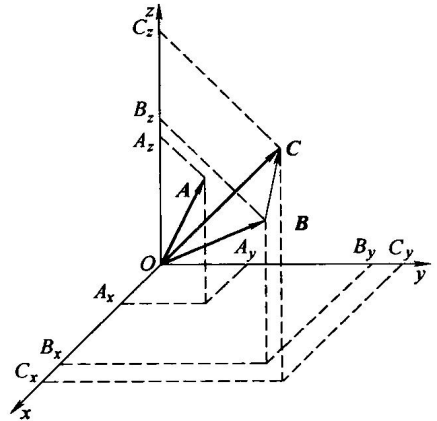


图 1-6 直角坐标系中的矢量加法

由于三个单位矢量是互相正交的，则其点积为

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (1-24a)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (1-24b)$$

单位矢量的叉积为

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0 \quad (1-25a)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (1-25b)$$

则矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的点积用分量表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-26)$$

由上式可计算  $\mathbf{A}$  的大小为

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-27)$$

## 2. 圆柱坐标系

空间任意一点  $P$  也能够用  $\rho$ 、 $\phi$  和  $z$  完整地描绘，如图 1-7 所示。其中， $\rho$  是位矢  $\mathbf{OP}$  在  $xy$  平面上的投影， $\phi$  是从正  $x$  轴到平面  $OTPM$  的角， $OM$  是  $\mathbf{OP}$  在  $z$  轴上的投影。 $\rho$ 、 $\phi$  和  $z$  即是  $P$  点的圆柱坐标，相应的单位矢量为  $\mathbf{e}_\rho$ 、 $\mathbf{e}_\phi$  和  $\mathbf{e}_z$ 。

由图 1-7 可得

$$x = \rho \cos \phi \quad (1-28)$$

$$y = \rho \sin \phi$$

如果有两个矢量  $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z$  和  $\mathbf{B} = B_\rho \mathbf{e}_\rho + B_\phi \mathbf{e}_\phi + B_z \mathbf{e}_z$ ，则它们的加、减和乘分别为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_\rho + B_\rho) \mathbf{e}_\rho + (A_\phi + B_\phi) \mathbf{e}_\phi + (A_z + B_z) \mathbf{e}_z \quad (1-29)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_z B_z \quad (1-30)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{vmatrix} \quad (1-31)$$

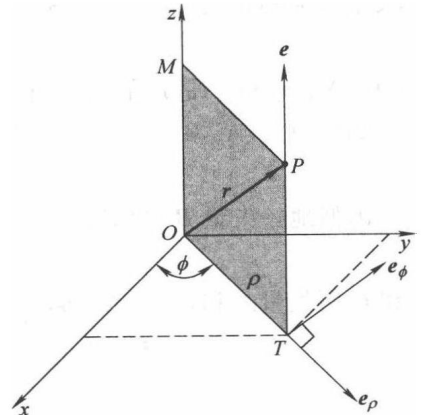


图 1-7 圆柱坐标系一点的投影



圆柱坐标系中单位矢量的点积为

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (1-32a)$$

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho = 0 \quad (1-32b)$$

叉积为

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0 \quad (1-33a)$$

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\phi \quad (1-33b)$$

单位矢量  $\mathbf{e}_\rho$  和  $\mathbf{e}_\phi$  在单位矢量  $\mathbf{e}_x$  和  $\mathbf{e}_y$  上的投影有

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\phi \mathbf{e}_y, \quad (1-34a)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi \mathbf{e}_x + \cos\phi \mathbf{e}_y \quad (1-34b)$$

如果矢量  $\mathbf{A}$  是圆柱坐标系中的任意矢量, 把它投影到  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴上, 便得到  $\mathbf{A}$  在直角坐标系的表达式为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

类似地, 一个直角坐标系中的矢量, 用下列变换可以得到其在圆柱坐标系中的表达式:

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

### 3. 球坐标系

空间一点  $P$  也可以在球坐标系中唯一地用  $r$ 、 $\theta$  和  $\phi$  表示, 如图 1-8 所示。其中  $r$  是位矢  $\mathbf{OP}$  的大小,  $\theta$  是位矢  $\mathbf{OP}$  与正  $z$  轴构成的角,  $\phi$  是正  $x$  轴与平面  $OMP$  之间的角。  $r$  在  $xy$  平面上的投影为  $OM = r \sin\theta$ 。

由图 1-8 可得

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad (1-37)$$

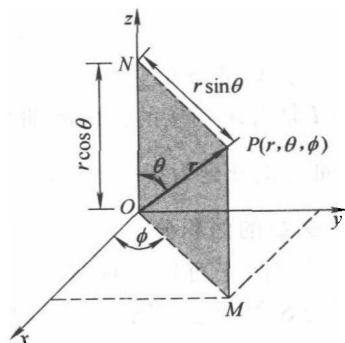


图 1-8 球坐标系中一点的投影

$\phi$  的正方向是绕  $z$  轴从  $x$  轴向  $y$  轴按右手旋转的方向, 其值为  $0 \sim 2\pi$ 。 $\theta$  的正方向是从正  $z$  轴向负  $z$  轴的方向, 其值为  $0 \sim \pi$ , 而  $r$  的变化范围为  $0 \leq r < \infty$ 。

球坐标系中单位矢量的点积和叉积如下:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = 1 \quad (1-38a)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_r = 0 \quad (1-38b)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\phi = 0 \quad (1-39a)$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \quad (1-39b)$$

对于球坐标系中的任一矢量  $\mathbf{A}$ , 将其转换为直角坐标系下的矩阵形式为