JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHUSAN GAILULUNYUSHULITONGJI QUANCHENG XUEXI ZHIDAO YU XITIJINGJIE

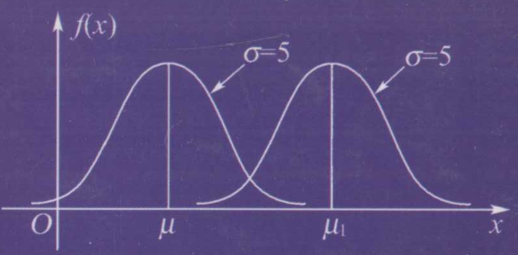
经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

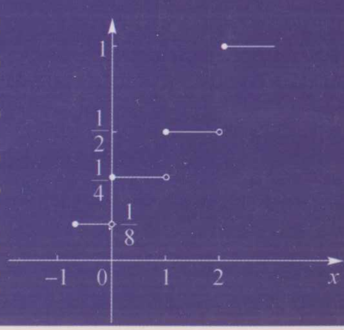
全程学习指导与习题精解

（人大修订版）

主编◎张　瑰　滕加俊　滕兴虎　寇冰煜



重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌



东南大学出版社
Southeast University Press

经济应用数学基础(三)

概率论与数理统计

全程学习指导与习题精解

(人大修订版)

张　瑰　　滕加俊
滕兴虎　　寇冰煜　编著

东南大学出版社
·南京·

内容提要

《概率论与数理统计》是经济数学中一门重要的基础课，也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容。该课程概念多、公式多、内容抽象难懂。袁荫棠编写的《经济应用数学基础（三）——概率论与数理统计》（修订本）反映了该学科的前沿动态，广受好评。为了帮助广大学生扎实地掌握概率论与数理统计的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们编写了本辅导教材。本教材有以下几部分：1. 概念、定理及公式；2. 重点、难点解答；3. 典型例题分析；4. 课后习题全解；5. 考研试题精解；6. 模拟试卷。本书内容编排合理，实用性强，是广大概率论与数理统计学习者不可或缺的一本参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(三)概率论与数理统计全程学习指导与习题精解/滕加俊等主编. —南京：东南大学出版社，2011.5

ISBN 978-7-5641-2419-9

Ⅰ.①经… Ⅱ.①滕… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教学参考资料 ②概率论—高等学校—教学参考资料 ③数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①F224.0 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 169618 号

经济应用数学基础(三) 概率论与数理统计 全程学习指导与习题精解(人大修订版)

编　　著　张　瑰　滕加俊　滕兴虎　寇冰煜　　责任编辑　刘　坚
电　　话　(025)83793329/83362442(传真)　　电子邮件　liu-jian@seu.edu.cn

出版发行　东南大学出版社　　出 版 人　江建中
社　　址　南京市四牌楼 2 号　　邮　　编　210096
销售电话　(025)83794121/83794174/83792214/83795801/83794174/83794561/83795802/57711295(传真)
网　　址　www.seupress.com　　电子邮件　press@seu.edu.cn

经　　销　全国各地新华书店　　印　　刷　南京新洲印刷有限公司
开　　本　880mm×1230mm　1/32　　印　　张　10　字　数　350 千
版　　次　2011 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5641-2419-9
定　　价　15.00 元

前言

《概率论与数理统计》是经济数学中一门重要的基础课,也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容。该课程概念多、公式多、内容抽象难懂。袁荫棠编写的《经济应用数学基础(三)——概率论与数理统计》(修订本)反映了该学科的前沿动态,广受好评。为了帮助广大学生扎实地掌握概率论与数理统计的精髓和解题技巧,提高解答各种题型的能力,我们编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成:

1. 概念、定理及公式:列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式,突出必须掌握或考试中出现频率较高的内容。

2. 重点、难点解答:列出相应各章的重点、难点内容,并对重点、难点内容给出了相应的解释说明,以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

3. 典型例题分析:精选每一章内容所涉及的重要题型,并进行详细的分析和解答,以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法,达到举一反三、触类旁通的效果。

4. 课后习题全解:教材课后习题丰富、层次多,许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论,因此我们对课后的每一道习题均给出了详细的解答,以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解。

5. 考研试题精解:精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行详细的解答。这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强,可以使广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路,更好地掌握概率论与数理统计的基本内容和解题方法。

6. 模拟试卷:为了帮助广大同学了解并适应考试,教材最后给出了四套模拟试卷供广大同学测试自己的水平,并给出了模拟试卷的详细解答供

参考。

本辅导教材由解放军理工大学应用数学教研室张瑰、滕加俊、滕兴虎、寇冰煜、颜超、吴欧、张纯、周华任、毛磊、王璞、戴毅以及胡俊、卢月、王浩、杨传兵、李茂广、周雨蒙、邱颖萍、刘娟等编写，全书由滕加俊教授统稿。在本教材的策划、编写、撰稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此深表感谢。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不妥之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

目　录

第五章　大数定律和中心极限定理

第六章　马尔可夫链

第七章　样本分布

第八章　参数估计

第九章　假设检验

第十章　方差分析

第十一章　回归分析

模拟试卷

第一章　随机事件及其概率

基本要求、重点与难点

(一) 基本要求

1. 了解随机事件、频率的概念、概率的统计定义；

2. 理解样本空间和样本点的概念；

3. 掌握随机事件的运算法则；

4. 掌握概率的古典定义，并能计算基本的古典概型问题；

5. 理解并掌握概率的基本性质，并能正确使用概率的加法公式；

6. 理解条件概率的含义，掌握条件概率的计算公式；

7. 利用乘法公式和事件的独立性计算积事件的概率；

8. 利用全概率公式和贝叶斯公式计算有关的概率问题；

9. 理解 n 重独立试验及 n 重贝努里(Bernoulli)试验的含义，熟练应用二项概率公式计算 n 重贝努里试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率；

10. 了解概率论的公理化体系的知识.

(二) 重点

1. 随机事件的概念；

2. 古典概率；

3. 条件概率；

4. 全概率公式与贝叶斯公式；

5. 独立试验序列.

(三) 难点

1. 古典概率的计算；

2. 条件概率的计算；

3. 利用全概率公式与贝叶斯公式计算事件的概率.

主要概念与公式

1. 随机试验

若一个试验满足下列三个特点：

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且可以预知试验的所有可能结果；

(3) 一次试验之前，不能确定出现的是哪个结果；

则称这一试验为随机试验.

2. 样本空间、随机事件

在一个试验中，不论可能的结果有多少个，总可以从中找出这样一组基本结果，满足：

(1) 每进行一次试验,必然出现且只能出现一个基本结果;

(2) 任何事件,都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件,称为基本事件,或称为样本点,记为 ω. 随机事件 E 的全体样本点组成的集合称为试验 E 的样本空间,记为 Ω. 随机事件是指样本空间中样本点的某个集合,简称事件一般记为 A,或 B,C 等等.

所谓事件 A 发生,是指在一次试验中,当且仅当 A 中包含的某个样本点出现. 在每次试验中一定发生的事件称为必然事件. 样本空间 Ω 包含所有的样本点,每次试验它必然发生,它就是一个必然事件. 必然事件用 Ω 表示,它是样本空间 Ω 的一个子集. 在每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件,记为 $\varnothing$. 它是样本空间的一个空子集.

3. 事件的互不相容(互斥)、对立事件

若 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是互不相容的,或称 A 与 B 是互斥的. A 与 B 互不相容,是指事件 A 与事件 B 不能同时发生. 例如,基本事件是两两互不相容的.

若 $A \cap B = \varnothing$,且 $A \cup B = \Omega$,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件,或称 A 与 B 互为逆事件. A 与 B 对立,是指事件 A 与事件 B 既不能同时发生又不能同时不发生,即在每次试验中,A 与 B 有且仅有一个发生. 若 A 与 B 互为逆事件,则称 B 为 A 的对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$,显然 $\overline{A} = \Omega - A$.

4. 概率的统计定义

在 n 次重复试验中,若事件 A 发生了 m 次,则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的频率. 在相同的条件下,重复进行 n 次试验,事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动,且一般地,n 越大,摆动幅度越小,则称常数 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$.

5. 概率的古典定义

若某试验 E 满足

(1) 有限性:样本空间 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$;

(2) 等可能性:(公认)$P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n)$.

若事件 A 包含了 m 个基本事件,则事件 A 发生的概率可用 $P(A) = \frac{m}{n}$ 来表示,这里 e_1,e_2,$\cdots$,e_n 是一完备事件组.

6. 概率的性质

(1) $P(A) \geqslant 0$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性:设 $A_1, A_2, \cdots$,是一列两两互不相容的事件,即

$$A_iA_j = \varnothing, \quad (i \neq j), \quad i,j = 1,2,\cdots$$

则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$

(4) 有限可加性:设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件,即

$$A_iA_j = \varnothing, \quad (i \neq j), \quad i,j = 1,2,\cdots,n$$

则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$$

(5) 单调不减性:若事件 $A \subset B$,则

$$P(A) \leqslant P(B)$$

(6) 若事件:设 A、B 是两个事件,则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

特别地,若 $B\subset A$ 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

(7) 加法公式:对任意两事件 A、B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

该公式可推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形:

$$P(A_1VA_2V\cdots VA_n)=\sum_{i=1}^{n}P(Ai)-\sum P(AiAj)+\sum P(AiAjA_k)+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)1\leqslant i<j\leqslant n$$

$1\leqslant i<j<k\leqslant n$

(8) 互补性:

$$P(\overline{A})=1-P(A);$$

(9) 可分性:对任意两事件 A、B,有

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}).$$

7. 条件概率的定义、性质

设 A、B 为两个事件,且 $P(B)>0$,则称 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率,记为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

根据条件概率定义,不难验证它具有下列三个性质,即

(1) $P(A\mid B)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega\mid B)=1$;

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B).$$

8. 概率的乘法公式

设 A、B 为两个事件,若 $P(A)>0$ 或 $P(B)>0$,则由条件概率定义,得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),(P(A)>0)$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B).(P(B)>0)$$

一般地,设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

9. 全概率公式

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间,$B_1,B_2,\cdots$ 为 Ω 的一个完备事件组,设 A 为样本空间 Ω 的事件,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots)$,则

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots.$$

10. 贝叶斯(Bayes)公式

设 A 为样本空间 Ω 的事件,$B_1,B_2,\cdots$ 为 Ω 的一个完备事件组,且 $P(A)>0$,$P(B_i)>0$,则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A \mid B_i)} \qquad i=1,2,\cdots.$$

11. 独立性

若事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A,B 是相互独立的.

对于 3 个事件 A,B,C,若下面 4 个等式同时成立:

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立,若仅前三式成立则称 A,B,C 两两独立. 注意两两独立推不出相互独立.

12. 独立试验序列模型

设随机试验满足

(1) 在相同条件下进行 n 次重复试验;

(2) 每次试验只有两种可能结果,A 发生或 A 不发生;

(3) 在每次试验中,A 发生的概率均一样,即 $P(A)=p$;

(4) 各次试验是相互独立的,则称这种试验为贝努里(Brnoulli) 概型,或称为 n 重贝努里试验.

在 n 重贝努里试验中,人们感兴趣的是事件 A 发生的次数. 若用 $P_n(k)$ 或 $b(n,p,k)$ 表示 n 重贝努里试验中 A 出现 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率,由于

$$P(A)=p, \qquad P(\overline{A})=1-p=q$$

则有

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\cdots,n.$$

重、难点解答

1. 随机试验的全部可能结果组成的集合称为样本空间,样本空间的子集称为事件,所以从本质上讲样本空间与事件都是集合,因此有关集合论的理论在这里都可以使用,例如集合的交、并、补运算实际上就是事件的积、和、差运算等.

2. 关于概率的定义,不同的版本书上有不同的定义,主要有统计定义、古典定义、公理化定义等. 注意它们的区别与联系.

3. 古典概率的计算是本章的重点与难点之一,特别要注意利用古典概型的计算公式时要注意满足两个条件,即有限性与等可能性. 有关事件的样本点的计数问题可复习排列组合等内容.

4. 求某个事件的概率时,常遇到求"至少"或"至多"等事件概率的问题. 若从正面考察这些事件,它们往往是诸多事件的和或积,求解时很繁琐. 但"至少"、"至多"这些事件的对立事件却又比较简单,且其概率也很容易求出. 此时,不妨来一个逆向思考,先求其对立事件的概率,然后再求原来的事件的概率. 运用公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$ 即可.

5. 在本章中我们也学习了条件概率的概念和计算方法,要注意不要把事件的条件

概率与积事件的概率混淆,即 $P(A \mid B)$ 与 $P(AB)$ 是不同的概念.

6. 条件概率的计算方法有两种,一是限制样本空间,例如求$P(B \mid A)$,事件 A 已经发生,因此样本空间不属于A的点就可排除,样本空间可缩减为 $S' = A$,在A中计算事件B的概率. 二是直接应用定义,例如计算 $P(B \mid A)$,我们可先计算 $P(AB)$,$P(A)$,再利用条件概率的定义来计算.

7. 全概率公式与 Bayes 公式是使用广泛的重要公式. 全概率公式的基本思想是把较复杂的事件概率计算分解为较简单的事件的概率计算. 而 Bayes 公式往往用于从结果分析原因时的概率计算,帮助我们追查事件的起因. 全概率公式是已知原因求结果,贝叶斯公式是已知结果求原因,但运用贝叶斯公式计算时往往要用到全概率公式. 注意在使用全概率公式或贝叶斯公式时,对样本空间进行划分,划分后的事件组必须是完备事件组.

8. 二项概率公式是用于计算在n重 Bernoulli 试验中事件A恰好出现k次的概率,也是一个应用广泛的公式. 要注意"恰好出现k次"、"至多出现k次"和"至少出现k次"的区别.

9. 事件的独立性是很重要的概念,在概率论与数理统计中经常使用到. 对于事件的独立性,往往我们并不根据其定义,而是根据实际背景来判定. 要注意一组事件相互独立与两两独立是不同的.

10. 还要特别注意两事件"相互独立"与"互不相容"的区别. 一般地两事件独立与两事件互不相容是没有关系的.

11. 注意$P(\varnothing) = 0$,$P(\Omega) = 1$,但反之不对,即若$P(A) = 0$,我们得不到$A = \varnothing$,同样$P(A) = 1$,我们得不到 $A = \Omega$. 这一点我们以后经常要用到. 例如,$P(AB) = P(A)$,我们推不出 $B \subset A$.

典型例题分析

【例 1】 设 A、B、C 是三事件,用 A、B、C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A、B、C 都发生;

(3) A、B、C 中不多于一个发生.

分析　弄清不同事件之间的关系,根据事件运算的定义按要求写出相应表达式,注意第三问中"不多于一个"的理解.

解　(1) 事件可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) 事件可表示为 ABC;

(3) 方法一:该事件可表示为

$$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup \overline{A}B\overline{C}$$

(即只有一个发生和 ABC 都不发生)

方法二:表示为$\overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{C}$

方法三:表示为$\overline{AB \cup BC \cup AC}$

【例 2】 设事件A、B、C满足$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \dfrac{1}{4}$,$P(ABC) = \dfrac{1}{16}$,求$A$、$B$、$C$中不多于一个发生的概率.

分析　首先要写出 A、B、C 中不多于一个发生的表达式. A、B、C 中不多于一个可用

$\overline{AB \cup AC \cup BC}$ 来表达. 故本题是求 $P(\overline{AB \cup AC \cup BC})$.

解　A、B、C 中不多于一个发生的对立事件即为 A、B、C 至少两个发生,故所求概率可表示为

$$\begin{aligned}P\overline{(AB \cup AC \cup BC)} &= 1 - P(AB \cup AC \cup BC) \\ &= 1-[P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)- \\ &\quad P(ABC)-P(ABC)+P(ABC)] \\ &= 1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

注　本题中使用的公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

是公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

的进一步推广. 此公式还可推广到 n 个事件.

【例 3】某种产品商标为“MAXAM”,其中有 2 个字母已经脱落,求脱落的字母为“AA”的概率;为“MA”的概率.

分析　首先应讨论脱落的字母为哪两个,再按照脱落字母概率相等进行计算. 这是一古典概型问题.

解　字母“MAXAM”中两个字母脱落的样本空间为:

{MA, MX, MA, MM, AX, AA, AM, XA, XM, AM}

则脱落字母为“AA”的概率为$\frac{1}{10}$,

则脱落字母为“MA”的概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

【例 4】假定男性、女性出生率相同,在有三个孩子的家庭中,已知有一男孩,求三个孩子都是男孩的概率.

分析　这是条件概率问题,可以有两条计算途径:一是利用条件概率定义计算;二是改变样本空间,将条件概率化为无条件概率来计算.

解法一　设事件A = “三个孩子中至少有一个男孩”

B = “三个孩子都是男孩”

由于样本空间中共有 $2^3 = 8$ 个样本点,故

$$P(A) = \frac{7}{8} \quad P(AB) = \frac{1}{8}$$

利用条件概率定义,

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{7}$$

解法二　已知三个孩子中至少有一个男孩,则原样本空间中“三个孩子都是女孩”这一基本事件可以除去.

因此样本空间中样本点个数由原来的 8 个减为 7 个,而“三个都是男孩”只是其中之一,故所求概率为

$$P = \frac{1}{7}$$

【例 5】袋中装有 6 个白球，5 个黑球，一次取出 3 个球，发现都是同一颜色的，求这种颜色是白色的概率.

分析　从袋中 11 个球中一次取出 3 个球共有 C_{11}^3 种取法，因此样本空间中含有 C_{11}^3 个样本点. 在“取出 3 个球为同一颜色”的条件下，缩减的样本空间为 $C_6^3+C_5^3$ 个样本点. 因此本题可按照条件概率中的缩减样本空间方法计算.

解法一　记 $A=\{$取出 3 个球是同色球$\}$

$B=\{$取出 3 个为白球$\}$

由古典概型计算公式有：

$$P(A)=\frac{C_6^3+C_5^3}{C_{11}^3}$$

$$P(AB)=P(B)=\frac{C_6^3}{C_{11}^3}$$

因此，由条件概率公式有：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{C_6^3/C_{11}^3}{(C_6^3+C_5^3)/C_{11}^3}=\frac{2}{3}.$$

解法二　由分析可知，所求概率为

$$P=\frac{C_6^3}{C_6^3+C_5^3}=\frac{2}{3}$$

注　(1) 由两种解法可知，解法二实际上是对解法一的简化，在解法一中，分子分母同时消去 C_{11}^3 即得到解法二.

(2) 若将本题中数据改为“$2n$ 个白球，$2n-1$ 个黑球，一次取 n 个球”，其结果不变，有兴趣的同学可以进一步进行计算.

【例 6】袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个黄球，30 个白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是多少？

分析　第一个人可能取得白球，也可能取得黄球，但题中没有给出说明，因此本题要用到全概率公式 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$ 来求解.

解　设 $A_1=\{$第一个人取得黄球$\}$

$A_2=\{$第二个人取得黄球$\}$

则 $\overline{A_1}=\{$第一个人取得白球$\}$

由古典概型计算公式可得：

$$P(A_1)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5},P(\overline{A_1})=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{19}{49},P(A_2\mid \overline{A_1})=\frac{20}{49}$$

因此利用全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid \overline{A_1})\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{49}\\&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

【例 7】设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A、B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该产品属于 A 厂生产的概

率是________.

分析 本题是由结果(发现次品)分析原因(何厂生产)时的概率计算,因此可使用贝叶斯公式.使用贝叶斯公式时,注意对样本空间进行划分,划分后的事件组必须是完备事件组.

解 设$A=\{$任取一件产品是A厂生产的$\}$,

$B=\{$任取一件产品是B厂生产的$\}$,

$C=\{$任取一件产品是次品$\}$.

则

$$P(A)=60\%=0.6, P(B)=40\%=0.4$$
$$P(C\mid A)=1\%=0.01, P(C\mid B)=2\%=0.02$$

由于A、B构成一完备事件组,由贝叶斯公式,有

$$\begin{aligned}P(A\mid C)&=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}\\&=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

【例8】设有来自三个地区的各10名、15名、25名考生的报名表,其中女生的报名表分别为3份、7份和5份.随机地抽取一个地区的报名表,从中先后抽出2份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率;

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率.

分析 先抽到的一份是女生表,该表可能是三个地区中的某一个.故可用全概率公式来求解,而求后抽到的一份是男生表的前提下求先求出的一份是女生表则是条件概率问题.

本题是全概率公式和条件概率公式的综合应用,注意对公式的理解.

解 设$B_i=\{$报名表是第i个地区的考生的$\}$, $i=1,2,3$

$A_j=\{$第j次抽到的是女生表$\}$, $j=1,2$

由题设,有

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(A_1\mid B_1)=\frac{3}{10}, P(A_1\mid B_2)=\frac{7}{15}, P(A_1\mid B_3)=\frac{5}{25}$$

(1) 先抽到的一份是女生表的概率为

$$\begin{aligned}P(A_1)&=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\mid B_i)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}\end{aligned}$$

(2) 根据题意,所求概率为

$$P(A_1\mid \overline{A_2})=\frac{P(A_1\overline{A_2})}{P(\overline{A_2})}$$

由全概率公式有

$$P(A_1\overline{A_2})=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\overline{A_2}\mid B_i)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7\times 8}{15\times 14}+\frac{5\times 20}{25\times 24}\right)$$
$$=\frac{2}{9}$$

而 $P(\overline{A_2})=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\overline{A_2}\mid B_i)$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

最后所求概率为

$$P=P(A_1\mid\overline{A_2})=\frac{P(A_1\overline{A_2})}{P(\overline{A_2})}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}$$

【例9】将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正反各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件　　（　　）

A. A_1,A_2,A_3 相互独立　　B. A_2,A_3,A_4 相互独立

C. A_1,A_2,A_3 两两独立　　D. A_2,A_3,A_4 两两独立

分析　本题考查的“相互独立”和“两两独立”的概念.

对于三个事件 A_1,A_2,A_3，若

$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$，$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$

则称它们“两两独立”；若另外还成立

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

则称它们“相互独立”.

解　这是一个古典概型问题，样本空间为{正正，正反，反反，反正}，样本空间的样本点为 4 个. 其中，事件 A_1,A_2,A_3,A_4 的样本点个数分别为 2,2,2,1，因而

$$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{1}{2},P(A_3)=\frac{1}{2},P(A_4)=\frac{1}{4},$$

因为 A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3 包含的样本点个数分别为 1,1,1，因此

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4}.$$

根据定义知：A_1,A_2,A_3 两两独立

又由于 $P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，因此不相互独立.

又由于 $P(A_3A_4)=0$　故 BD 均不成立，因而选 C.

课后习题全解

1. 互不相容事件与对立事件的区别何在？说出下列各对事件的关系.

(1) $|x-a|<\delta$ 与 $x-a\geqslant\delta$；　(2) $x>20$ 与 $x\leqslant 20$；

(3) $x>20$ 与 $x<18$；　(4) $x>20$ 与 $x\leqslant 22$；

(5) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中只有一个废品；

(6) 20 个产品全是合格品与 20 个产品中至少有一个废品.

解　若两事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的