



信息科学与工程系列专著

通信业务量理论与应用

Tele-traffic Theory and Applications

(下册)

逯昭义 孙丽珺 著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

电子信息科技专著出版专项资金资助出版
信息科学与工程系列专著

通信业务量理论与应用

Tele-traffic Theory and Applications

(下册)

逯昭义 孙丽珺 著

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

通信业务量理论是以发展的通信技术为物理背景,利用并扩展运筹学、排队论及矩阵理论、概率论等各种数学手段,通过建立数学模型和仿真模型来发展通信理论的一门应用基础学科。本书系统讲述了通信业务量(Tele-traffic)理论与应用,分为上、下册,共4篇:Ⅰ 基础理论篇;Ⅱ 扩展理论篇;Ⅲ 应用篇;Ⅳ 前沿研究篇。其中下册包括后两篇,主要内容包括计算机网络数学建模和性能解析,现代、后现代通信的部分业务量问题。

本书取材新颖,具有一定的理论高度,可供高等院校电子、计算机、通信、信息科学、应用数学、管理科学、数量经济与技术经济学、计量生命科学等专业的博士生、教师及有关研究单位科研人员研读,也可作为研究生、高年级本科生的专业课或选修课的教材或参考书。本书还可作为电子通信信息类科技人员的案头文献。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

通信业务量理论与应用.下册/逯昭义,孙丽珺著. —北京:电子工业出版社,2011.7
(信息科学与工程系列专著)
ISBN 978-7-121-13772-3

I. ①通… II. ①逯… ②孙… III. ①通信技术—业务管理 IV. ①TN

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第106180号

责任编辑: 窦 昊

印 刷:

装 订: 北京中新伟业印刷有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 13 字数: 330千字

印 次: 2011年7月第1次印刷

印 数: 2000册 定价: 49.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

应用数学的一个重要分支——排队论，早就在各行各业，包括交通、运输、民航、建筑、医疗、信息、通信等各种服务部门被广泛应用。然而在目前的诸多应用中，促进排队论得到重要发展的只有通信领域。排队论与通信已经紧密结合，形成了一门重要的学科发展方向——通信业务量理论（Tele-traffic Theory，也称为通信信息量理论）。出现这种情况的原因有二：① 排队论的第一篇论著，即 A. K. Erlang（爱尔兰）的著作“Solution of some problems in the theory of probability of significance in automatic telephone exchanges”，是通过分析电话交换机的运行情况而得到的。电话交换是一种技术实践，在实践的基础上产生理论是符合科学规律的。因此，可以说排队论起源于通信。② 排队论创立后，它在通信领域的应用，有力地促进了通信技术，包括电话交换、计算机网络通信等的发展。这种在理论指导下的再实践也是符合科学发展规律的。总之，实践—理论—再实践—再理论是科学技术发展的必然规律，电信科学也不例外，因此在电信科学中产生业务量理论就不难理解了。

从目前看，通信业务量理论的发展经历了这样几个发展时期：① 通信业务量理论的出现。在 20 世纪初人们把概率论引入电话网而创立早期的通信业务量理论以后，伴随着通信技术的进步，该理论得到了一定发展。然而只是自 20 世纪 50 年代以来，当运筹学（OR）和排队论得到发展后，通信业务量理论才形成一门较完整的理论而登上电信科学的学术舞台。② 通信业务量理论的发展及计算机通信网信息量理论的形成。自 20 世纪 70 年代以来，计算机通信网络得到了很大发展，与此同时，人们把通信业务量理论扩展到计算机通信网络，用它评价网络性能，设计建造性价比更优异的计算机通信网络。经过 30 多年的研究进展，人们发展了通信业务量理论。20 世纪末，当典型排队论（以肯达尔模型为代表）发展到非典型排队论（以扩展肯达尔模型为代表）时，出现了计算机通信网信息量理论。与早期的通信业务量理论相比，它已成为电信科学发展的新起点。由于复杂的网络分层协议代替了简单的电话通信规程，也由于复杂的计算机网络代替了比较简单的电话网系统，所以在计算机通信网信息量理论中，数据单元替代了呼叫，非即时通信或准即时通信代替了即时通信，各种非典型排队模型代替了典型排队模型，数学模型及解析方法也发生了很大改变，等等。③ 后现代通信业务量理论正在建立。自 1995 年以来，正当计算机通信网信息量理论飞快发展之际，研究人员在 ATM（异步交换方式）交换网上发现了信息的猝发现象。这一重要现象表明，对高速综合业务网，采用自相似模型远比马尔可夫模型更符合实际，因此进一步研究自相似业务量问题对宽带综合业务网络更具有重要意义。在通信技术飞速发展，将要在全球实现后现代通信的 21 世纪前叶，通信理论中的通信业务量理论进入了第三个发展阶段。显然将自相似理论及近似自相似理论引入后现代通信而使后现代通信得以发展的业务量理论，是当前及今后一个时期的重要研究任务。

发展通信业务量理论的研究，是当前国内外同行学者的研究热点。其中为数有限的中国学者也处于这一研究的前沿领域。但从研究进展看，关键难点是长相关理论。在这方面，目前并未取得突破性进展，要取得突破恐怕还有一个过程。目前很多国外学者进

行了诸多近似研究，而国内学者的研究大多处于“开场白”状态，即小综述状态。然而这一点并不妨碍那些为数有限的中国学者紧跟国际前沿而不舍弃的奋斗精神。反过来，如果我们不跟随该方向的前沿发展水平，多年后，当国外研究已取得重大进展时，将会后悔和遗憾。因为那时我们将很难占有一席之地。出于这样的考虑，也为了吸引诸多青年学者投入这一研究中来，本书作者竭尽全力完成了《通信业务量理论与应用》这部专著，以敬献读者。特别要献给为发展通信业务量理论而不惜辛劳的同行学者，希望能起到抛砖引玉的作用。

本书内容较多，分上、下册出版。上册的主要内容包括：I 基础理论篇——典型肯达尔模型；II 扩展理论篇——非典型（扩展型）肯达尔模型。下册的主要内容包括：III 应用篇——计算机网络数学建模；IV 前沿研究篇——现代、后现代通信的部分业务量问题。本书的优势在于其手稿曾作为最近 10 届研究生“计算机通信网信息量理论”课的讲稿，边讲授边锤炼，先后五次易稿，不断增加新内容；本书作者在最近的 25 年间，坚持计算机通信网络理论的研究，在国内外一流学术刊物上发表过上百篇学术论文，其中数十篇被 SCI、EI 收录，应该说对通信业务量的发展前沿跟随较紧。为了使内容新颖，这些研究成果与其他重要参考文献一起都反映到了本书中。本书（下册）第 12 章由孙丽珺、逯昭义两人执笔，第 14 章及下册附录 A、B 由孙丽珺执笔，其余章节由逯昭义执笔。本书（下册）各章节脱稿后，冯慧芳（博士）、逯迈（博士）与作者一起完成了统稿和甄别任务。

在写作手法上，本书与纯数学著作略有不同，许多章节通过“深入浅出”的阐述，强化了物理概念和物理意义的讨论，从而使读者既能把握应用数学的严密性，又能把握明确的物理概念。

在本书写作过程中，作者曾访问过诸多同行学者。其中，有北京邮电大学通信研究所国家重点实验室陈俊亮教授（中国科学院院士），电子科技大学电子通信研究所光纤国家重点实验室李乐民教授（中国工程院院士），青岛大学复杂性科学研究所张嗣瀛教授（中国科学院院士），天津大学计算机科学与技术系舒炎泰教授（博导），北京航空航天大学理学院王天民教授（博导），云南大学信息学院赵东风教授（博导），暨南大学电子信息学院王思明教授，以及陈永义教授、杨庆德教授、樊建席教授、王立宏教授等，或征询他们的意见，或请求佐证问题。研究生罗秀秀、宁玉新、吕磊（博士）、崔杰、杨兴梅、姜辉（博士）、刘海光、逯进（博士）等参与了本书书稿（下册）的计算机文字处理以及在统稿过程中对电子版的修改工作，郭菊英协助作者参与了校对、清样等辅助工作。在本书出版之际，谨向他们致谢。

本书是国家自然科学基金项目（No.60902634）的重要研究内容。在国家自然科学基金的支持下，作者加大了写作力度，现在终于能够使本书与广大读者见面了。在此，谨向国家自然科学基金委员会致敬。

个人的水平毕竟有限，书中难免还存在错误和不足之处，敬请广大读者批评指正。

作 者

2011 年 3 月于青岛

全书通用符号

本书出现的参数符号很多,大致分为全书通用符号和各章节专用符号。对通用符号除在此处集中解释外,在书中第一次出现的地方再给予解释,后续出现则不再解释。对专用符号分别在各章节予以集中解释,以加深读者印象。

$F(x)$: 概率变量 X 不超过 x 值的概率,即 $F(x)=P(X\leq x)$, $F(x)$ 称为分布函数,其中 P 表示概率。

$f(x)$: 概率变量 X 为连续型变量,则 $f(x)=dF(x)/dx$ 为概率密度函数。

$f(x_j)$: X 为离散型概率变量, X 取值为 x_j , $j=0,1,2,\cdots$, 则 $f(x_j)=P(X=x_j)$ 为概率质量函数。

$E[X]$: 概率变量 X 的平均值。

$V[X]$: 概率变量 X 的方差。

M_k : k 阶阶乘矩符号。

B_k : k 阶二项矩符号。

$C[X,Y]$: X, Y 的协方差。

$R[X,Y]$: X, Y 的相关系数。

LS: 拉普拉斯-斯蒂吉尔斯变换。

$G(Z)$: 概率母函数,与 Z 变换相同。

λ : 顾客到达率, $1/\lambda$ 为到达间隔。

μc : 顾客服务率。设数据单元长度为 $1/\mu$, 数据速率为 c , 则 $1/(\mu c)$ 为数据单元所占时宽, 自然, μc 为单位时间传输的数据单元数。在计算机通信信息量理论中, 通常把数据单元当做顾客, 因此 μc 为服务率。将服务率设为 μc 而不是像通常排队论中设为 μ , 其原因正在于此。

u : 服务员服务强度, 也称忙闲度, $u=\lambda/(n\mu c)$ 。当服务员数 $n=1$ 时, $u=\lambda/(\mu c)$ 称为业务量, 这时通常以 ρ 代替 u , 即 $\rho=\lambda/\mu c$, 是单服务员的服务强度。

P_{ij} : 系统状态由 i 转移为 j 的转移概率, $P_{ij}=P(X_{r+1}=j|X_r=i)$, $r=0,1,2,\cdots$, r 表示时点, 当然 r 也可用字母 n 等取代。

P_i : 系统处于 i 状态的状态概率。 P_i 是绝对概率, 不是转移概率, $P_i=\lim_{n\rightarrow\infty}P_i(n)$ 。

P : 系统状态由 i 转移为 j 的转移概率矩阵, $P=[P_{ij}]$ 。

$P_{ij}^{[m]}$: 系统状态由 i 经 m 步转移为 j 的转移概率。

P^m : 系统状态由 i 经 m 步转移为 j 的转移概率矩阵, $P^m=[P_{ij}^{[m]}]$ 。

$P_i(n)$: 第 n 时刻系统处于 i 状态的绝对概率, $P_i(n)=P(X_n=i)$ 。如果以转移步为计时单位, 则 $P_i(n)$ 也是系统在第 n 步处于状态 i 的概率。

$\{P_i(n), \forall i, \forall n\}$: 系统在第 n 时刻处于各种状态的概率分布列, 用列矩阵表示为

$$[P_0(n) \ P_1(n) \ P_2(n) \ \cdots P_j(n) \ \cdots] \stackrel{\text{令}}{=} [P_i(n)] \stackrel{\text{平稳}}{=} [P_i] = P_i$$

$P_i(0)$: 初始时刻 0 系统处于 i 状态的绝对概率, 即初始概率。 $P_i(0) = P(X_0 = i)$ 。

$\{P_i(0), \forall i\}$: 系统在初始时刻处于各种状态的概率分布列, 用列矩阵表示为

$$[P_0(0) \ P_1(0) \ P_2(0) \ \cdots \ P_j(0) \ \cdots] \stackrel{\Delta}{=} [P_i(0)] = \mathbf{P}_i(0)$$

π : 所有服务员都处于忙碌状态, 顾客需要等待的概率。

L : 系统长度, 即系统中有顾客的平均数。

L_q : 排队长度, 队列中有排队顾客的平均数。

W : 顾客滞留时间, 即平均等待时间与平均服务时间之和。

W_q : 平均等待时间。 $L_q = \lambda W_q$, $L = \lambda W$ 。

M: 泊松流或负指数服务。

D: 定常分布。

G: 一般分布。

E_k : k 阶爱尔兰分布。

H: 超几何分布。

L: 二项式分布, 准随机分布。

FCFS: 先来先服务。

LCFS: 后来先服务。

RSS: 随机选择服务。

L-RSS: 局部随机选择服务。

PR: 优先权服务。

Ba: 集体 (批量) 服务或到达。

Sc: 离散型到达。

Fe: 有反馈到达。

Mu: 多路到达。

Pa: 并联排队系统。

In: 间歇服务。

Sh: 移动服务。

Di: 杂乱排队系统。

HD: 中途有脱离的排队系统。

CL: 改换队列的排队系统。

AL: 服务员轮换服务系统。

MC: 多级循环排队系统。

MN: 多级网络排队系统。

MS: 多级串型排队系统。

TRT: 实测令牌循环时间。

TTRT: 目标令牌循环时间。

Δt : 时隙。

$H(t)$: 服务时间分布。

$Q(t)$: 循环时间分布。

$R(t)$: 回归时间分布, 也称间歇时间分布。

目 录

III 应用篇——计算机网络数学建模

第 8 章 计算机局域网 (LAN) 的性能解析评价	2
8.1 总线型 LAN 的存取方式——CSMA/CD 的系统模型及解析	2
8.1.1 竞争-冲突随机服务方式综述	2
8.1.2 CSMA/CD 存取方式的数学建模	4
8.2 星形 LAN 存取方式的系统模型和排队模型	10
8.2.1 多星 LAN 存取方式分析	10
8.2.2 竞争-冲突淘汰 I 类系统模型的数学建模	12
8.2.3 竞争-冲突淘汰 II 类系统模型的数学建模	21
8.2.4 竞争-冲突淘汰 III 类系统模型的数学建模	28
8.2.5 竞争-冲突淘汰 IV 类系统模型的数学建模	33
8.3 环形 LAN 存取方式——Token passing 的排队模型	44
8.3.1 令牌环形 LAN 存取方式概述及排队模型综述	44
8.3.2 单令牌环形 LAN 和单报文分组令牌环形 LAN 性能解析评价	49
8.3.3 多令牌环形 LAN 的性能解析评价	51
第 9 章 计算机城域网 (MAN) 的性能解析评价	54
9.1 令牌双环复用网的性能分析	54
9.2 光纤分布式数据接口 (FDDI) 的性能解析评价	56
9.2.1 FDDI 的排队模型	56
9.2.2 FDDI 排队模型的深化研究结果	61
第 10 章 计算机广域网 (WAN) 的性能解析评价	67
10.1 虚拟连接型分层协议网的排队模型	67
10.1.1 排队模型的确立	67
10.1.2 数学解析	70
10.2 异步交换方式 (ATM) 交换网络的排队模型	74
10.2.1 ATM 交换网络的系统模型综述	74
10.2.2 输出端设立排队室的 ATM 交换系统排队模型	78
10.2.3 输入端设立排队室的 ATM 交换系统排队模型及数学解析	88

IV 前沿研究篇——现代、后现代通信的部分业务量问题

第 11 章 断续泊松过程 (IPP)	104
11.1 IPP 解析	104
11.1.1 IPP 的物理背景	104

11.1.2	流体图	104
11.1.3	前向重复时间分布	107
11.1.4	IPP 生成间隔分布	108
11.1.5	超指数分布	108
11.2	IPP 生成间隔分布的另一种解法	109
第 12 章	排队论中的矩阵几何法	113
12.1	矩阵几何法相关矩阵	113
12.1.1	几个特殊矩阵	113
12.1.2	转移概率矩阵与转移率矩阵	120
12.2	赖斯 (Neuts) 的矩阵几何法	128
12.2.1	相位型 (PH) 分布	128
12.2.2	矩阵几何法的引入	132
12.2.3	M/PH/1	138
12.2.4	二维半马氏过程	140
12.2.5	一维半马氏过程的一种扩展	145
第 13 章	马尔可夫调制的泊松过程	148
13.1	(GI+M)/M/1	148
13.1.1	(GI+M)/M/1 排队模型	148
13.1.2	(GI+M) 两类顾客的等待时间分布	154
13.2	MMPP(2)/M/1	156
13.2.1	MMPP(2) 的特性	156
13.2.2	MMPP(2)/M/1 的解析	158
第 14 章	计算机网络性能评价中的一种流体流动模型	160
14.1	流体流动模型的一种物理背景及描述	160
14.2	流体流模型的解析	162
14.2.1	特征值和特征向量的引入	162
14.2.2	数学解析简介	165
附录 A	有关矩阵问题的基础知识	170
A.1	矩阵运算	171
A.2	线性方程组的求解	177
A.3	线性变换及相关矩阵问题	180
附录 B	通信技术与通信业务量理论	188
B.1	近代、现代、后现代通信技术的发展	188
B.2	通信业务量理论的发展过程	190
B.3	后现代通信业务量理论的建立及前沿研究课题	192
下册参考文献		194

III 应用篇

——计算机网络数学建模

第 8 章 计算机局域网 (LAN) 的性能解析评价

8.1 总线型 LAN 的存取方式——CSMA/CD 的系统模型及解析

8.1.1 竞争-冲突随机服务方式综述

1. 竞争-冲突随机服务方式分类

在社会的服务生活中, 顾客(泛指广义的顾客)发生冲突是一种司空见惯的现象, 比如人们抢购某种紧俏的商品; 众人同时拥到狭窄的车门; 许多车辆堵塞在桥上或道路的咽喉地带; 开会时与会者争先恐后地要求发言; 同时找领导反映情况者因顺序而冲突; 几个班级的学生因抢占球场而冲突, 等等。由于多个顾客竞争而产生的冲突, 往往造成两种后果: 使服务员在一段时间内无法进行服务; 顾客等待服务时间必然要发生变化。为此, 人们在长期的社会生活中找到了妥善解决顾客冲突的各种办法, 如争执的顾客在排队后得到有序的服务; 只允许一个顾客(或一个顾客集团)得到服务; 系统暂时中断服务等。

社会生活中自然而然出现的这种服务冲突现象以及竞争-冲突服务方式在科学技术的发展中是否有借鉴应用价值呢? 长期以来人们很少问津。近年来随着计算机通信网络技术的发展, 在局部网络中, 有人模仿社会服务解决冲突现象的方法, 提出了性能优异的存取方式 CSMA/CD^[1] (Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection, 带冲突检测的载波侦听多路访问), 之后, 人们感到有必要深入探讨这个问题了。

社会生活中虽然存在着各种各样的竞争冲突现象, 但都可以归纳为如图 8-1 所示的基本过程。按消除冲突的不同办法及其后系统的服务状态, 对竞争-冲突型随机服务分类, 最能反映竞争-冲突服务的实际特征。竞争-冲突型随机服务可以区分为两个大类, 依据消除冲突的措施, 每个大类又可以区分为若干个小类, 如图 8-2 所示。

第一大类与第二大类的主要区别是冲突消除后只有一个顾客(或部分顾客)得到服务还是冲突各方都能得到有序的服务, 从而决定了下次冲突参与者不同。

虽然冲突型随机服务系统可分为多类, 但在服务员如何进行服务(即服务规约)的问题上有其共同特征。它与典型排队模型不同, 顾客的服务并非是一个接一个(或一批接一批)地进行, 而是在两次服务之间因冲突等原因存在一个时间间隔, 即服务员“受理请求与处理冲突”的时间。同样, 这种服务与多队列服务员循环移动服务也有区别。多队列循环移动服务虽然服务员有“步行时间”(对某特定队列是间歇服务), 但就每一个队列而言是先来先服务。而竞争-冲突型服务中因存在冲突, 能进入服务的顾客具有随机性。

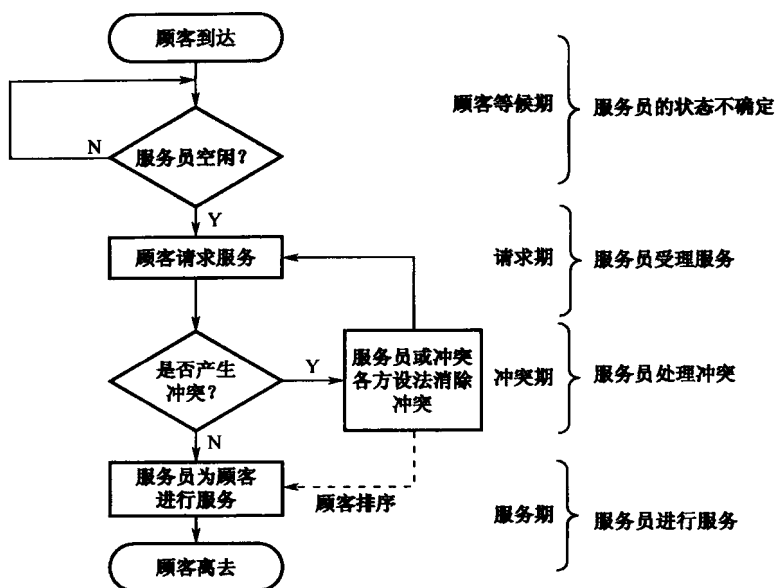


图 8-1 顾客在竞争-冲突型随机服务的流程图

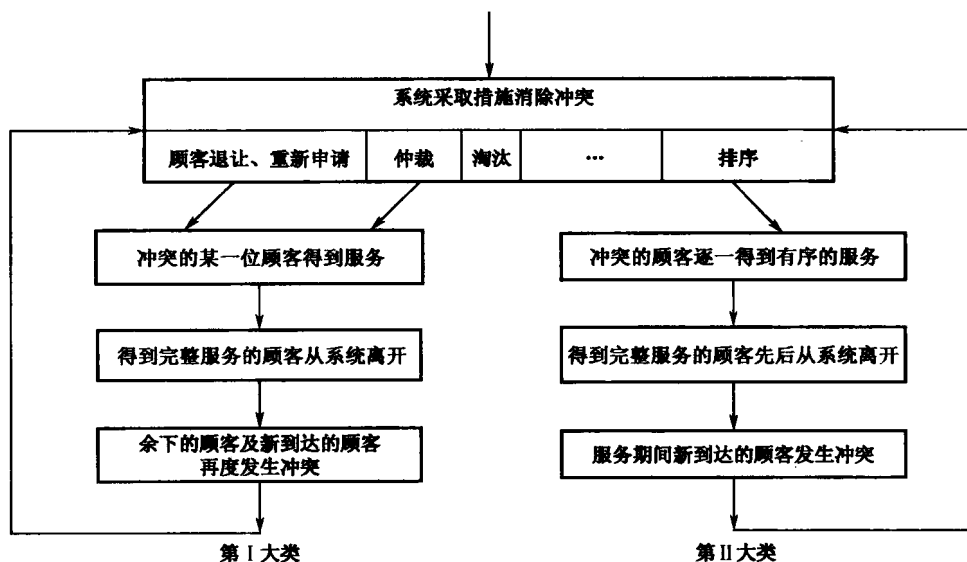


图 8-2 竞争-冲突型随机服务分类

第 I 大类竞争-冲突型随机服务有两种重要情况：顾客的竞争是随机发生的，只有经过退让和重新请求服务，并且不发生冲突时，某个顾客才能获得服务权。顾客的冲突是随机发生的，只有经过仲裁或者随机淘汰，才能让竞争各方中的一个（或几个）获得服务权。

2. 竞争-冲突型服务的系统模型

经过简单分析可得上述多种竞争-冲突型随机服务的系统模型，如图 8-3 所示。由图可见，竞争-冲突型系统模型与典型排队的系统模型相比，由原来的四步式，即顾客到达

→排队室排队→顾客接受服务→顾客离去，分为五步式，多出了“顾客竞争服务权”。和典型排队服务一样，这种系统也可以考虑服务失败顾客返回的所谓反馈问题。

图 8-3 的 (a) 和 (b) 系统虽然都是竞争-冲突型随机服务系统，但二者有一个关键性的区别。在图 8-3 (a) 中，当两个或多个顾客竞争服务权时，因必然产生冲突而全部返回排队室准备重新参加竞争，而在图 8-3 (b) 中，当竞争时，不论参加者如何之多，必然是一个顾客（或一群顾客）获得服务权而接受服务，其余顾客返回排队室准备重新参加竞争。我们将图 8-3 (a) 的形式称为“冲突后退式”，将图 8-3 (b) 的形式称为“冲突仲裁式”或“冲突淘汰式”。本节对前者进行解析，关于竞争-冲突淘汰式系统将在本章多星 LAN 一节讲述。

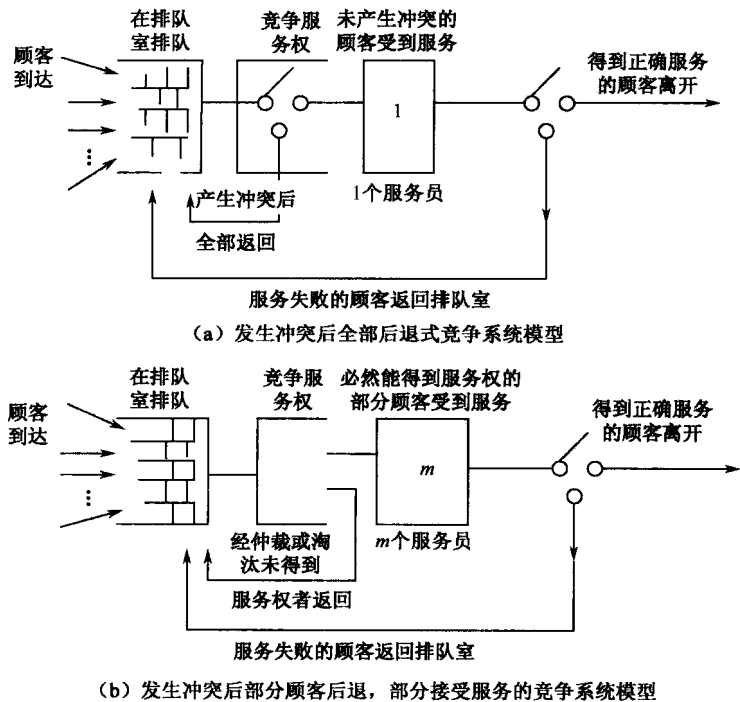


图 8-3 竞争-冲突型服务系统模型

8.1.2 CSMA/CD 存取方式的数学建模

1. 竞争-冲突后退式服务系统模型的引入

总线型 LAN 介质存取控制方式——CSMA/CD 的物理运行机理可用如图 8-4 所示的流程表示^[2]。

由图 8-4 可见，CSMA/CD 的系统模型正是图 8-3 (a)。这种系统模型与肯达尔的典型系统模型（见上册图 2-1）相比，多出了“顾客竞争服务权”。在图 8-3 (a) 中，顾客对应报文分组，排队室对应缓冲器，服务员对应 LAN 的总线。如果在该图中忽略服务失败的情况，且从服务员的角度考虑其服务流程，则如图 8-5 所示。

图 8-3 (a) 和图 8-5 反映出 CSMA/CD 是竞争-冲突后退方式的服务本质，因此本节以这两个图为依据来讨论竞争-冲突后退式服务系统的数学建模。

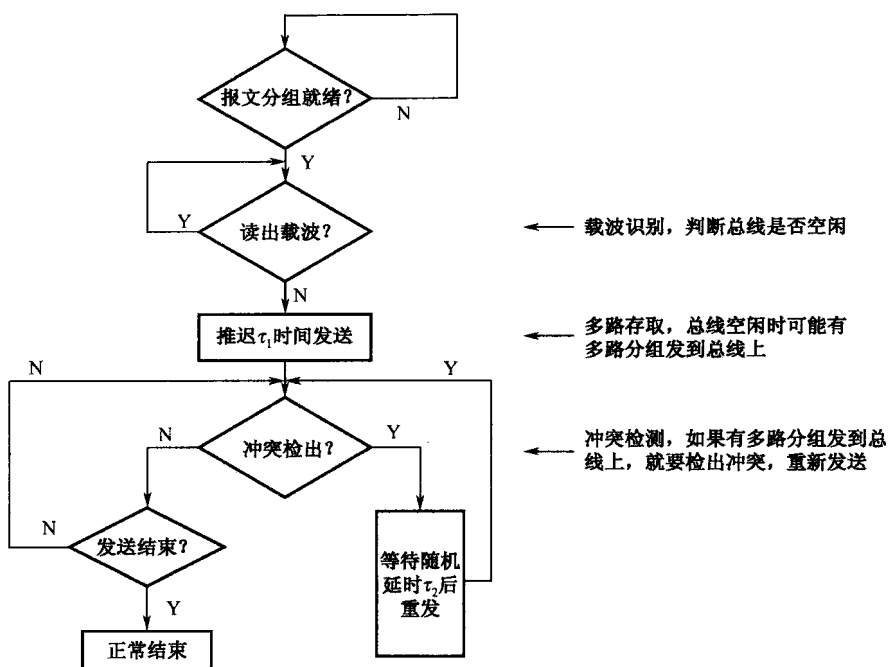


图 8-4 CSMA/CD 流程

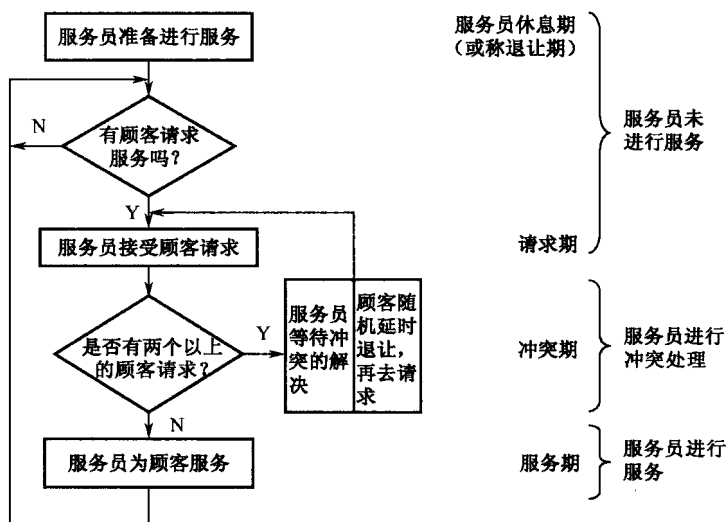
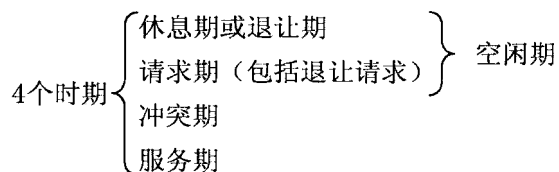
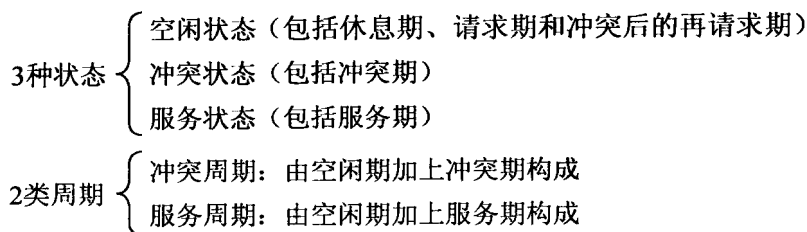


图 8-5 冲突后退式随机服务流程

2. 解析条件的设定

由图 8-5 可知, 系统分为 4 个时期, 3 种状态, 2 类周期^[3], 即





4 个时期和 2 类周期的关系如图 8-6 所示。由图 8-6 不难看出：服务期和冲突期之后必定是空闲期，而最短的空闲期等于请求期（这时休息期或退让期为 0），服务期只为 1 个顾客服务，不会出现连续服务；在请求期如果只有 1 个顾客请求服务，则服务成功，出现服务周期；如果有 2 个以上顾客请求服务，则发生冲突，出现冲突周期。

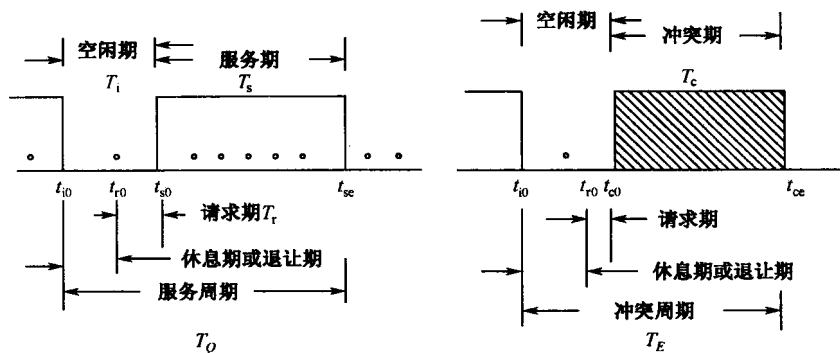


图 8-6 服务周期与冲突周期的组成

设终端数为 $N(2 \leq N < \infty)$ ，每个终端每次只能产生 1 个分组（即顾客），即每个终端的发送缓冲器只有 1 个缓冲区间，只能存放单个分组。已产生的分组在未服务结束前，不产生新的分组。

将时间轴划分成以 τ_p 为单位的时隙。常见的 τ_p 的时宽为终端之间标准线路传播时延。 τ_p 的设定将时间轴离散化了。

设当前没有分组的终端在 τ_p 内产生分组（即产生顾客）的概率为 p_q ， $0 < p_q < 1$ 。有顾客的源在一个时隙内试图请求服务（即试图发送报文分组）的概率为 p_r ， $0 < p_r < 1$ 。请注意产生顾客与顾客请求服务是两种事件，产生顾客可在任何时间（服务期、冲突期、空闲期）发生，而顾客请求服务只能在空闲期发生。

本解析设服务期和冲突期遵从定长分布。设服务期为 T_s ，冲突期为 T_c ， T_s 和 T_c 都是 τ_p 的整数倍。

在空闲期的某一时隙产生的顾客必定在该时隙提出服务请求，而不顾及系统中是否有别的顾客请求服务。在服务期和冲突期产生的顾客理应一等到空闲期就立即请求服务，但这就意味着要产生冲突。为此设定顾客以概率 p_r 在服务期和冲突期之后的时隙请求服务。

本解析由于以离散时间对服务系统进行解析，又由于已经设定服务时间和冲突时间为定长分布，为了能形成嵌入马尔可夫链，特设定顾客产生和顾客请求服务都遵从二项式分布。众所周知，离散情况下的二项式分布可近似看做泊松分布，因此顾客产生和顾客请求无后效性。本解析由于假设服务时间遵从定长分布，因此任一时刻 t 剩余的服务时间分布有后效性。为此只能在特殊时点即无后效性的时点来考虑顾客变化。该时点正

是服务期或冲突期结束的时点。设该时隙系统等待顾客数为 m ，那么该时隙之后 m 的变化完全取决于到达分布，而到达又是二项式分布，所以 m 的变化能形成马尔可夫链。本问题中服务时间和冲突时间之后为空闲期，而空闲期无顾客服务，因此空闲期的任一时点都可选择为观察时点。为解析方便，选 t_{r0} 为观察时点。

本解析中所用到的重要符号已在上面标明，大体与本书所用符号一致。考虑到本解析所用符号较多，且出现一些不常用符号，特在此集中解释。

N	顾客源总数， $2 \leq N < \infty$
T_s	服务期时宽，单位为时隙 τ_p ，起点为 t_{s0} ，终点为 t_{se}
T_c	冲突期时宽，单位为 τ_p ，起点为 t_{c0} ，终点为 t_{ce}
T_r	请求期时宽， $T_r = \tau_p$ ，起点为 t_{r0}
T_i	空闲期时宽，单位为 τ_p ，起点为 t_{i0}
$\bar{T}$	服务周期、冲突周期的共同均值
P_{mn}	以 t_{r0} 为观察时点，顾客数由 m 变为 n 的转移概率 $0 \leq m \leq N, 0 \leq n \leq N$
$P_{mn}^{(v)}$	从观察时点起，经过 v 个时隙，顾客数由 m 变为 n 的转移概率
$P_{mn}^{(v)}(s)$	在服务周期里，从 t_{r0} 开始，经 v 个时隙后顾客数由 m 变为 n 的转移概率
$P_{mn}^{(v)}(c)$	在冲突周期里，从 t_{r0} 开始，经 v 个时隙后顾客数由 m 变为 n 的转移概率
P_g	原本无顾客的源在空闲期的一个时隙里产生 1 个顾客的概率
p_r	原本有顾客的源在空闲期的一个时隙里提出请求服务的概率
S_{mj}	在服务周期的请求期里，顾客数由 m 变成 j 的概率
F_{mj}	在冲突周期的请求期里，顾客数由 m 变成 j 的概率
$M_s(t_{r0})$ 、 $M_c(t_{r0})$	在服务周期、冲突周期的 t_{r0} 时刻的顾客数
$\bar{M}$	在该服务系统中，产生了顾客的源数均值
$\bar{A}_m(T_s, T_c)$	服务期和冲突期中所有时隙顾客数累计的均值
$P_m(s)$	在服务周期的 t_{r0} 时刻顾客数为 m 的概率
$\bar{I}_m$	t_{i0} 时刻顾客数为 m 的空闲期的均值
π_m	在平衡状态下， t_{s0} 、 t_{r0} 、 t_{i0} 时刻顾客数为 m 的概率
S	有效服务量，即吞吐量，本解析中 S 为 $S = T_s / \bar{T}$
W_q	顾客从产生到开始接受服务的平均等待时延
W	顾客在系统的平均总时延
$M_{(t_{s0})}$	服务期始点的顾客数
$M_{(t_{c0})}$	冲突期始点的顾客数
$M_{(t_{i0})}$	空闲期始点的顾客数

3. 解析计算与性能分析

1) 服务周期与冲突周期的顾客转移概率 P_{mn}

在 T_s 或 T_c 的第一个时隙的起点 $M_{s,c} = m$ ，经过 $(v-1)$ 个时隙 $M_{s,c}^{(v-1)} = n$ 的概率遵从二项式分布，为

$$P_{mn}^{(v-1)} = C_{N-m}^{n-m} [1 - (1 - p_g)^{(v-1)}]^{n-m} (1 - p_g)^{(v-1)(N-n)} \quad (8.1)$$

其中, $(1 - p_g)^{v-1}$ 表示一个原本无顾客的源在 $(v-1)$ 时隙不产生顾客的概率; $(1 - p_g)^{N-n}$ 表示 $(N-n)$ 个原本无顾客的源在 1 个时隙不产生顾客的概率; $1 - (1 - p_g)^{v-1}$ 表示一个原本无顾客的源在 $(v-1)$ 时隙产生顾客的概率。

在服务周期里 $M_s(t_{r0}) = m$, T_r 之后经 $(v-1)$ 个时隙, $M_s^{(v)} = n$ 的概率为

$$P_{mn}^{(v)}(s) = [S_{mj} |_{j=m} + S_{mj} |_{j=m+1}] P_{jn}^{(v-1)} \quad (8.2)$$

其中, $S_{mj} |_{j=m} = P\{M(t_{s0}) = m, \text{服务成功} | \text{请求期} m \text{个顾客源有顾客}\}$

$S_{mj} |_{j=m+1} = P\{M(t_{s0}) = m+1, \text{服务成功} | \text{请求期} m \text{个顾客源有顾客}\}$

$S_{mj} |_{j=m}$ 一式说明在服务周期的请求期里, 虽然不产生新顾客, 但在已有顾客的源中, 只有一个源的顾客提出请求。 $S_{mj} |_{j=m+1}$ 说明在请求期新产生 1 个顾客且必然提出服务请求, 原来有顾客的 m 个源都没有提出请求, 通过分析可得

$$S_{mj} |_{j=m} = \frac{(1 - p_g)^{N-m} \cdot C_m^1 p_r (1 - p_r)^{m-1}}{1 - (1 - p_g)^{N-m} (1 - p_r)^m}$$

$$S_{mj} |_{j=m+1} = \frac{C_{N-m}^1 p_g (1 - p_g)^{N-(m+1)} \cdot (1 - p_r)^m}{1 - (1 - p_g)^{N-m} (1 - p_r)^m} \quad (8.3)$$

其中, $1 - (1 - p_g)^{N-m} (1 - p_r)^m$ 表示有顾客请求服务的概率; $C_m^1 p_r (1 - p_r)^{m-1}$ 表示在服务周期的请求期里, 只有 1 个顾客提出请求的概率, 符合二项式分布的设定; $(1 - p_g)^{N-m}$ 表示 $(N-m)$ 个无顾客的源在请求期不产生顾客 (自然无服务请求) 的概率。故式 (8.3) 的分子表示请求期只有 1 个顾客提出请求 (自然能受到服务) 的概率。

$M_c(t_{r0}) = m$, T_r 之后经 $(v-1)$ 个时隙, 在冲突周期里, $M_c^{(v)} = n$ 的概率为

$$P_{mn}^{(v)}(c) = [F_{mj} |_{j=m} + F_{mj} |_{j=m+1} + F_{mj} |_{j>m+1}] P_{jn}^{(v-1)} \quad (8.4)$$

$F_{mj} |_{j=m}$ 说明在冲突周期的请求期里虽然不产生新顾客, 但已有顾客有 2 个或 2 个以上提出请求。 $F_{mj} |_{j=m+1}$ 说明在请求期除了新产生 1 个顾客且必然提出请求外, 原有顾客也有提请求者。 $F_{mj} |_{j>m+1}$ 说明在请求期, 新产生了两个或多个顾客, 无论原有顾客是否提出请求, 也必然会产生冲突。通过分析可得上面 3 个条件概率为

$$F_{mj} |_{j=m} = \frac{(1 - p_g)^{N-m} \cdot [1 - (1 - p_r)^m - C_m^1 p_r (1 - p_r)^{m-1}]}{1 - (1 - p_g)^{N-m} (1 - p_r)^m} \quad (8.5)$$

其中, $[1 - (1 - p_r)^m - C_m^1 p_r (1 - p_r)^{m-1}]$ 表示除去以下 2 种情况的概率, 请求期 $M(t_{r0}) = m$, 但都不请求; 请求期 $M(t_{r0}) = m$, 其中 1 个请求, $(m-1)$ 个不请求。

$$F_{mj} |_{j=m+1} = \frac{C_{N-m}^1 p_g (1 - p_g)^{N-(m+1)} \cdot [1 - (1 - p_r)^m]}{1 - (1 - p_g)^{N-m} (1 - p_r)^m} \quad (8.6)$$

$$F_{mj} |_{j>m+1} = \sum_{j=m+2}^n \frac{C_{N-m}^{j-m} (1 - p_g)^{N-j} p_g^{j-m}}{1 - (1 - p_g)^{N-m} (1 - p_r)^m}$$

于是, 将服务周期与冲突周期一起考虑, 可得 $M(t_{r0}) = m$ 到 $M(t_{sc}, t_{cc}) = n$ 的转移概率为

$$P_{mn} = P_{m(n+1)}^{(T_s+1)}(s) + P_{mn}^{(T_c+1)}(c)$$