GAILULUNYUSHULITONGJI

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

概率论与数理统计

同济大学数学系　编著

同济大学出版社

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

概率论与数理统计

同济大学数学系　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写.全书以通俗易懂的语言,深入浅出地讲解概率论与数理统计的知识,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计基本概念、参数估计、假设检验及回归分析等.各章均配有习题,书末附参考答案,附表中列有一系列数值用表.

本书知识系统、详略得当、举例丰富、讲解透彻、难度适宜,适合作为普通高等院校(特别是“二本”及“三本”院校)或成人高校本科或专升本专业的“概率论与数理统计”课程的教材,也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/同济大学数学系编著.--上海:同济大学出版社,2011.7

ISBN 978-7-5608-4571-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①同… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第094693号

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

概率论与数理统计

同济大学数学系 编著

组稿 曹 建 吴丽丽 **责任编辑** 曹 建 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021—65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 13.75

印 数 1—4100

字 数 275000

版 次 2011年7月第1版 2011年7月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4571-5

定 价 23.00元

前　言

随着我国高等教育的迅速发展，为适应部分普通高等院校（“二本”、“三本”）数学基础课程的教学需要，我们应同济大学出版社之约，按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”（以下简称“教学基本要求”），编写了这本《概率论与数理统计》. 全书以通俗易懂的语言，深入浅出地讲解概率论与数理统计的知识，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计基本概念、参数估计、假设检验及回归分析等. 各章均配有习题，书末附参考答案，附表中列有一系列数值用表.

编写本书的基本思路是：精简冗余内容，压缩叙述篇幅；降低教学难度，突出易用特色. 为使本书具有科学性、知识性、可读性和实用性，我们着重采用了以下一些做法：

（1）内容“少而精”，取材紧扣“教学基本要求”. 对于某些属于教学中可讲或可不讲的内容均以 * 号标记，以供不同专业选用或参考.

（2）在着重讲清数学知识概念和有关理论方法的同时，适当淡化某些定理的证明或公式推导的严密性. 例如，根据“教学基本要求”，我们对一些定理的严格证明均予省略，只叙述定理的条件和结论，并借助于几何图形较为直观地解释其概率论或数理统计的意义. 此外，对于某些较为繁复的计算或公式推导，能删去的尽量删去.

（3）相对传统的教材，本教材对章节体系安排作了一些新的尝试.

（4）在对教材中各章、节内容的组织安排上，考虑到应具有科学性和可读性，除了书写的文字应通顺流畅外，还尽量注意做到：由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散. 即使是每节中所选配的例题安排，也均遵循“由简单到复杂，由具体到抽象”的原则. 当引入某种新的数学概念时，尽量按照“实践—认识—实践”的认识规律，先由实际引例出发，抽象出数学概念，从而上升到理论阶段（包括有关性质和计算方法等），再回到实践中去应用. 为体现教材的科学性，我们特别注意防止前后内容脱节，即使遇到个别地方要提前用到后面的知识内容时，也都简要地加以交代说明.

（5）为使教材富有知识性与实用性，我们在某些章节中选用了一些较有实际意义的例题. 以帮助读者扩大知识面、提高在日常生活和工程技术中应用数学知识的能力.

（6）在精简冗余内容、压缩叙述篇幅的同时，对于数学在实践中的应用并未减弱，只是为降低难度而选用了一些好学易懂的例题，以充分体现本书理论联系实际、重视实际应用的特色.

（7）按照“学练结合，学以致用”的原则，本书在各章之后均配置了适量的习题作

业，并附有答案或提示.

我们在编写本书时，主要参考了同济大学概率统计教研组编著、由同济大学出版社已经出版的《概率统计》(第4版)，同时也参考了其他一些同类教材. 在此，我们一并表示衷心的感谢！

本书条理清晰，论述准确；由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散；例题较多，典型性强；深度、广度恰当，便于教和学. 它可作为普通高校(特别是"二本"及"三本"院校)或成人高校本科或专升本专业的"概率论与数理统计"课程的教材，也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考用书.

由于我们编写水平有限，难免有不当或错误之处，敬请广大读者和同行批评指正.

编　者

2011年6月于同济大学

目　　录

1　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 其理论与方法的应用非常广泛,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济以及我们的日常生活. 本章介绍概率论中的基本概念 —— 随机事件与随机事件的概率,并进一步讨论随机事件的关系与运算以及概率的性质与初等计算方法.

1.1　随机事件

在自然界与人类社会的活动中,人们观察到的现象是多种多样的,但归结起来,大体上可以分为两类,一类是确定性现象,另一类是随机现象. 例如,一枚硬币向上抛起后必然会落地;在相同的大气压与温度下,气罐内的分子对罐壁的压力是个常数. 这类现象的共同特点是,在确定的试验条件下,它们必然会发生,称这类现象为**确定性现象**. 另一类现象则不然. 例如,将一枚硬币上抛,着地时究竟是正面向上还是反面向上,这在上抛前是无法断言的. 但是,人们从长期实践中知道,多次重复上抛同一枚硬币,出现正面向上的可能性占 50% 左右,这类在个别试验中呈现不确定的结果而在大量重复试验中结果呈现某种规律性的现象称为**随机现象**,这种规律性称为**统计规律性**. 为研究随机现象的统计规律性作准备,本节介绍随机试验、样本空间与随机事件等概念.

1.1.1　随机试验

在客观世界中,随机现象是极为普遍的. 例如,某地的年降雨量,河流某处的年最高水位,相同条件下生产的电子元件的寿命,某交通道口中午 1h 内汽车流量,等等. 为了对随机现象的统计规律性进行研究,有时要做一些试验. 这里所说的试验,必须具有以下 3 个特点:

(ⅰ) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(ⅱ) 试验的所有可能结果在试验前已经明确,并且不止 1 个;

(ⅲ) 试验前不能确定试验后会出现哪一个结果.

在概率论中,称具有上述 3 个特点的试验为**随机试验**,简称为**试验**.

下面给出一些随机试验的例子:

例 1.1　上抛 1 枚硬币并观察硬币着地时向上的面,这是一个试验.

例 1.2　观察某交通道口中午 1h 内汽车流量(单位:辆),这是一个试验. 可能出现的试验结果可以是非负整数中的任意一个,但试验前无法确定究竟会出现哪一个

非负整数.

例 1.3 从某厂生产的相同型号的灯泡中抽取 1 只,测试它的寿命(即正常工作的小时数).这是一个试验.可能出现的试验结果可以是非负实数中的任意一个,但试验前无法确定究竟会出现哪一个非负实数.

在实际生活中,还存在许多随机试验的例子.例如,彩票的开奖,质检部门对产品的质量检查,等等.

1.1.2 样本空间

要研究一个随机试验,首先要弄清楚这个试验所有可能的结果.每一个可能出现的结果称为**样本点**,记作 ω(必要时,可以带有下标或上标).全体样本点组成的集合称为**样本空间**,记作 Ω.换句话说,样本空间是试验的所有可能结果所组成的集合.这个集合中的元素就是样本点.

例 1.1(续) 在例 1.1 中,样本空间 $\Omega=\{$正面,反面$\}$,它由两个样本点组成.

例 1.2(续) 在例 1.2 中,样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$,它是1个数集,由可列无限个[①]样本点组成.

例 1.3(续) 在例 1.3 中,样本空间 $\Omega=[0,\infty)$,它是1个数集,由不可列无限个样本点组成.

从这 3 个例子中可以看到,样本空间可以是数集,也可以不是数集;样本空间可以是有限集,也可以是无限集.

有时候,为了数学上处理的方便,可以把样本空间作适当的扩大.例如,在例 1.3 中,灯泡寿命实际上不会超过某个足够大的正数,但我们仍取样本空间为 $[0,\infty)$,必要时,甚至还可以取样本空间为 $(-\infty,\infty)$.在例 1.2 中也作了类似的扩大.

1.1.3 随机事件

当我们通过随机试验来研究随机现象时,常常不是关心某一个样本点在试验后是否出现,而是关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现.例如,在例 1.2 中,要通过对该道口汽车流量的观察来决定是否需要扩建道口.假定超过 600 辆便认为需要扩建.这时,我们关心的便是试验结果是否大于 600.满足这一条件的样本点组成了样本空间的 1 个子集.称 1 个随机试验的样本空间的子集为**随机事件**,简称为**事件**.随机事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.仅含 1 个样本点的随机事件称为**基本事件**.在例 1.1 中,有 2 个基本事件——$\{$正面$\}$ 和 $\{$反面$\}$;在例 1.2 与例 1.3 中,分别有无限多个基本事件.

在试验后,如果出现随机事件 A 中所包含的某个样本点,那么,称**事件 A 发生**;否则,就称**事件 A 不发生**.在例 1.2 中,设 A 表示"流量大于600",在试验后,事件 A 可能

---

① 可列无限个的含义是:这无限个元素可以按某种次序排成一列.例如,自然数有可列无限个.

发生，也可能不发生. 如果试验结果是 689，那么，便认为事件 A 发生.

样本空间 Ω 是其自身的 1 个子集，因而也是 1 个事件. 由于样本空间 Ω 包含所有的样本点，因此，每次试验后，必定有 Ω 中的 1 个样本点出现，即 Ω 必然发生. 称 Ω 为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 永远是样本空间的 1 个子集，因而也是 1 个事件. 由于空集 $\varnothing$ 不包含任何一个样本点，因此，每次试验后，$\varnothing$ 必定不发生. 称 $\varnothing$ 为**不可能事件**. 必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 是两个特殊的随机事件.

1.1.4 随机事件之间的关系与运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件，希望通过对较简单的事件的了解去掌握较复杂的事件. 为此，需要研究事件之间的关系与事件之间的运算.

由于事件是一个集合，因此，事件之间的关系与事件之间的运算应该按照集合论中集合之间的关系与集合之间的运算来规定.

给定一个随机试验，Ω 是它的样本空间，事件 A,B,C 与 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 都是 Ω 的子集.

(1) 如果 $A \subset B$(或 $B \supset A$)，那么，称事件 B **包含**事件 A. 它的含义是：事件 A 发生必定导致事件 B 发生. 图 1.1 给出了这种包含关系的一个几何表示.

在例 1.3 中，事件 A 表示“灯泡寿命不超过 200h”，事件 B 表示“灯泡寿命不超过 300h”. 于是，$A \subset B$(或 $B \supset A$).

(2) 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，那么称事件 A 与事件 B **相等**.

(3) 事件 $A \cup B = \{\omega : \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**(或**并事件**). 它的含义是：当且仅当事件 A 与事件 B 中至少有 1 个发生时，事件 $A \cup B$ 发生. 图 1.2 给出了这种运算的一个几何表示.

例如，在某建筑工地上，事件 A 表示“缺少水泥”，事件 B 表示“缺少黄砂”. 于是，和事件 $A \cup B$ 表示“缺少水泥或黄砂”.

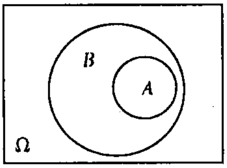

图 1.1 $A \subset B$

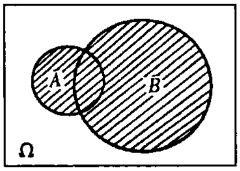

图 1.2 $A \cup B$

一般地，用 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的和事件；用 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

(4) 事件 $A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(或**交事件**). 它的含义是：当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生. 积事件也可以记作 AB. 图 1.3 给出了这种运算的一个几何表示.

例如，某输油管长 10km. 事件 A 表示“前 5km 油管正常工作”，事件 B 表示“后

5km 油管正常工作”. 于是，积事件 $A \cap B$ 表示“整个输油管正常工作”.

一般地，用 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示 n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 的积事件；用 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列无限个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

(5) 事件 $A - B = \{\omega : \omega \in A 且 \omega \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 它的含义是：当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时，事件 $A - B$ 发生. 图 1.4 给出了这种运算的一个几何表示.

例如，某种圆柱形零件的长度与外径都合格时才算合格. 事件 A 表示“长度合格”，事件 B 表示“外径合格”. 于是，差事件 $A - B$ 表示“长度合格但外径不合格”.

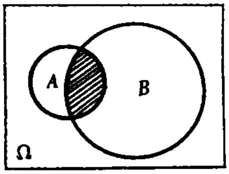

图 1.3 $A \cap B$

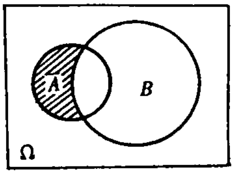

图 1.4 $A - B$

(6) 如果 $A \cap B = \varnothing$，那么，称事件 A 与事件 B **互不相容**(或**互斥**). 它的含义是：事件 A 与事件 B 在 1 次试验后不会同时发生. 图 1.5 给出了这种运算的一个几何表示.

如果一组事件(可以由无限个事件组成)中任意两个事件都互不相容，那么，称这组事件**两两互不相容**.

例如，在例 1.3 中，事件 A 表示“灯泡寿命不超过 200h”，事件 B 表示“灯泡寿命至少为 300h”. 于是，$AB = \varnothing$，即 A 与 B 互不相容. 如果事件 C 表示“灯泡寿命在(200h, 300h)内”，那么，A, B, C 构成一个两两互不相容的事件组. 又如，任意 2 个基本事件总是互不相容；任意一组基本事件总是两两互不相容.

(7) 事件 $\Omega - A$ 称为事件 A 的**对立事件**(或**逆事件**，或**余事件**)，记作 $\overline{A} = \Omega - A$. 它的含义是：当且仅当事件 A 不发生时，事件 $\overline{A}$ 发生. 于是，$A \cap \overline{A} = \varnothing$，$A \cup \overline{A} = \Omega$. 由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，因此称事件 A 与 $\overline{A}$ **互逆**(或**互余**). 图 1.6 给出了这种运算的一个几何表示.

例如，某建筑物在经历一场地震后，事件 A 表示“建筑物倒塌”. 于是，事件 $\overline{A}$ 表示“建筑物幸存”.

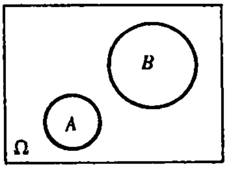

图 1.5 $A \cap B = \varnothing$

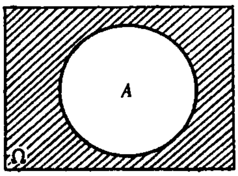

图 1.6 $\overline{A}$

按差事件与对立事件的定义，差事件也可以表示成 $A - B = A\overline{B}$.

与集合论中集合的运算一样，事件之间的运算满足下述定律：

（ⅰ）**交换律** $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

（ⅱ）**结合律** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

（ⅲ）**分配律** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

（ⅳ）**德·摩根**(De Morgan) **法则** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

这些定律都可以推广到任意多个事件.

例 1.4 某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道 1,2,3 组成(图 1.7). 每个水源都足以供应城市的用水. 设事件 A_i 表示“第 i 号管道正常工作”, $i = 1, 2, 3$. 于是，“城市能正常供水”可表示为

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3;$$

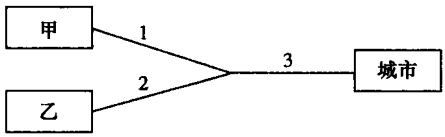

图 1.7 供水系统示意图

由德·摩根法则可知，“城市断水”可表示为

$$\overline{(A_1 \cup A_2) \cap A_3} = (\overline{A_1 \cup A_2}) \cup \overline{A}_3 = (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) \cup \overline{A}_3.$$

例 1.5 某工程队承包建造了 3 幢楼房，设事件 A_i 表示“第 i 幢楼房经验收合格”, $i = 1, 2, 3$. 试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件：

(1) 第 1 幢楼房合格；

(2) 只有第 1 幢楼房合格；

(3) 恰有 1 幢楼房合格；

(4) 至少有 1 幢楼房合格；

(5) 至多有 1 幢楼房合格.

解 事件 $\overline{A}_i$ 表示“第 i 幢楼房经验收不合格”, $i = 1, 2, 3$.

(1) A_1. 这时，第 2 幢、第 3 幢楼房可能合格，也可能不合格.

(2)“只有第 1 幢楼房合格”包含了“第 2 幢、第 3 幢楼房不合格”的意思，因此，这个事件可以表示成 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(3)“恰有 1 幢楼房合格”没有指明究竟哪一幢楼房合格，因此，这个事件可以表示成

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3.$$

$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$ 这 3 个事件构成 1 个两两互不相容的事件组.

(4)“至少有 1 幢楼房合格”可以看成 A_1, A_2, A_3 这 3 个事件中至少有 1 个发生，因此，这个事件可以表示成 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. A_1, A_2, A_3 这 3 个事件不构成 1 个两两互不相容的事件组. 另一方面，“至少有 1 幢楼房合格”的对立事件是“3 幢楼房全不合格”，因此，所求事件也可以表示成 $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}$. 由德·摩根法则知道

$$\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3} = \overline{\overline{A}}_1 \cup \overline{\overline{A}}_2 \cup \overline{\overline{A}}_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

(5) “至多有 1 幢楼房合格”是下列 2 个互不相容的事件的和事件:“恰有 1 幢楼房合格”与“3 幢楼房全不合格”,因此,所求事件可以表示成

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$

由例 1.5(4) 看出,事件的表达一般不唯一.“至少有 1 幢楼房合格”还可以表示成

$$\bigcup_{i=1}^{3}\{\text{恰有 } i \text{ 幢楼房合格}\} = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$$
$$\cup\, \overline{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1\overline{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2\overline{A}_3 \cup A_1 A_2 A_3.$$

这是七个两两互不相容的事件之并.

1.2 等可能概型

在一次试验后,随机事件 A 可能发生,也可能不发生.随机事件发生的可能性的大小用区间$[0,1]$中的一个数来刻画,这个数称为**概率**.事件 $A,B,C,\cdots$ 的概率分别记作 $P(A),P(B),P(C),\cdots$.作为事件的 2 个特殊情况:必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$,自然应该合理地规定

$$P(\Omega)=1,\quad P(\varnothing)=0.$$

如何计算概率?这是本章以下内容讨论的主题.本节讨论最简单的情形 —— **等可能概型**,即样本空间中的每个样本点在一次试验后以相等的可能性出现.

1.2.1 古典型概率

上抛 1 枚硬币,观察硬币着地时向上的面.假定这枚硬币质地均匀,因此,“出现正面”与“出现反面”的可能性是相等的.从常识上知道,这两个事件的概率都应该是$\frac{1}{2}$.

1 个口袋中装有 5 只外形相同的球,分别编有号码 $1,\cdots,5$.现在从这个口袋中任取 1 只,取到偶数号码的球的概率有多大?由于样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_5\}$,这 5 个样本点在 1 次试验后出现的可能性都相等.“取到偶数号码的球”这一事件 $A=\{\omega_2,\omega_4\}$.从常识上知道,$P(A)=\frac{2}{5}$.

一般地,称具有下列 2 个特征的随机试验的数学模型为**古典概型**:

(i) 试验的样本空间 Ω 是个有限集,不妨记作 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$;

(ii) 每个样本点在 1 次试验后以相等的可能性出现,即

$$P(\{\omega_1\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}).$$

古典概型是概率论发展初期的主要研究对象. 在古典概型中，如果事件 A 中包含 n_A 个样本点，那么，规定

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

用这种方法算得的概率称为**古典(型)概率**.

例 1.6 把 1 枚均匀硬币连抛两次. 设事件 A 表示“出现 2 个正面”，事件 B 表示“出现 2 个相同的面”. 试求 $P(A)$ 与 $P(B)$.

解 把 1 枚硬币连抛 2 次看作 1 次试验，依次出现的向上的面看作 1 个样本点. 样本空间 $\Omega = \{$正正，先正后反，先反后正，反反$\}$，这是 1 个古典概型. 因此，$n = 4$. 由 $A = \{$两正$\}$ 知道 $n_A = 1$，因此，$P(A) = \frac{1}{4}$；由 $B = \{$两正，两反$\}$ 知道，$n_B = 2$，因此，$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

在例 1.6 中，如果取样本空间 $\Omega^* = \{$两正，一正一反，两反$\}$，那么，就不能按古典概率公式来计算了，因为各个样本点出现的可能性不相等.

使用古典概率计算公式，要涉及计数运算. 当样本空间中元素较多时，需要用初等数学中有关“计数法”(例如排列组合）的知识.

我们来定义一个记号，它是组合数的推广. 规定

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, & r = 1, 2, \cdots; \\ 1, & r = 0. \end{cases}$$

其中，n 是自然数. 容易验证，当 $r > n$ 时，$\binom{n}{r} = 0$. 当 $r \leqslant n$ 时，$\binom{n}{r}$ 恰是从 n 个不同元素中取出 r 个元素的所有组合的个数.

例 1.7 1 个盒子中装有 10 只晶体管，其中 3 只是不合格品. 从这个盒子中依次随机地取[①] 2 只晶体管. 在下列两种情形下分别求出两只晶体管中恰有 1 只是不合格品的概率：

(1) **有放回抽样** 第一次取出 1 只晶体管，作测试后放回盒子中，第二次再从盒子中取 1 只晶体管；

(2) **无放回抽样** 第一次取出 1 只晶体管，作测试后不放回盒子中，第二次再从盒子中取 1 只晶体管.

解 设事件 A 表示“2 只晶体管中恰有 1 只是不合格品”. 从盒子中依次取 2 只晶

① “随机地取”的含义是，保证盒子中每只晶体管以相等的可能性被取到. 类似的情况以后不再解释.

体管,每一种取法视作1个基本事件.由于样本空间中仅含有限个元素,且晶体管被随机地取出,每个基本事件发生的概率都相等,因此,这是一个古典概型.

(1) 第一次取时,有10只晶体管可供抽取,由于取后放回,因此,第二次取时,仍有10只晶体管可供抽取.按照计数法的乘法原理,一共有 10×10 种取法,即 $n=10\times 10$.

对于事件 A,第一次取到合格品且第二次取到不合格品的取法共有 7×3 种;第一次取到不合格品且第二次取到合格品的取法共有 3×7 种.于是,$n_A=7\times 3+3\times 7$.按照古典概率的计算公式,得

$$P(A)=\frac{7\times 3+3\times 7}{10\times 10}=0.42.$$

(2) 第一次取时,有10只晶体管可供抽取,由于取后不放回,因此,第二次取时,只有9只晶体管可供抽取.按照计数法的乘法原理,一共有 10×9 种取法,即 $n=10\times 9$.

对于事件 A,第一次取到合格品且第二次取到不合格品的取法共有 7×3 种,第一次取到不合格品且第二次取到合格品的取法共有 3×7 种.于是,$n_A=7\times 3+3\times 7$.按照古典概率的计算公式,得

$$P(A)=\frac{7\times 3+3\times 7}{10\times 9}=\frac{42}{90}=0.47.$$

在概率论中,当考虑的事件与抽样次序无关时,无放回抽样也可以看作一次取出若干个样品.例如,在例1.7中,不放回地取2只晶体管也可以看作随机地一次取出2只晶体管.由计数法的组合公式知道,共有 $\binom{10}{2}$ 种取法,即 $n=\binom{10}{2}$.对于事件 A,取到1个合格品、1个不合格品的取法有 $\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{1}$ 种.于是,$n_A=\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{1}$.按照古典概率的计算公式,得

$$P(A)=\frac{\binom{7}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{21}{45}=0.47.$$

这表明用两种不同观点来看待无放回抽样所得到的概率是一样的.注意,这两种不同观点下的样本点及样本空间是不同的.

例1.8 把甲、乙、丙3名学生依次随机地分配到5间宿舍中去,假定每间宿舍最多可住8人.试求这3名学生住在不同宿舍的概率.

解 由于每名学生都可能分配到这5间宿舍中的任意一间,因此共有 $5\times 5\times 5=5^3$ 种分配方案,即 $n=5^3$.设事件 A 表示"这3名学生住在不同的宿舍里".对学生