

師 範 教 師 叢 書

015014

國民小學算術教學法

水 心 編 著



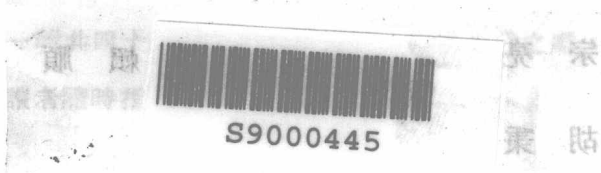
臺 灣 書 店 發 行

G 623.5
882

S 015014

水 心 編 著

國民小學算術教學法



臺灣省教育廳編印

中華民國五十九年九月出版
中華民國六十三年三月再版

師範教師
叢書

國民小學算術教學法

版權所有 • 翻印必究

編印者 臺灣省教育廳

編著者 水 心

指導者 教育部國民教育司

贊助者 聯合國兒童基金會

發行者 臺灣書店

地址：臺北市重慶南路一段十四號

電話：三一三八七五號

印刷者 臺灣書店印刷廠

地址：臺北市忠孝東路一段一七二號

電話：三二七六五九號

師 範 教 師 叢 書

編 審 委 員

—— 以姓名筆劃順序 ——

王 亞 權	孫 允 曾	葉 楚 生
田 培 林	孫 邦 正	劉 眞
朱 匯 森	高 銘 輝	趙 一 葦
林 本	梁 尙 勇	潘 振 球
宗 亮 東	黃 堅 厚	賴 順 生
胡 秉 正	楊 亮 功	
唐 守 謙	賈 馥 茗	

編輯例言

- 一、本叢書主旨在配合師範師專課程標準，編譯各國教育名著，以供師範師專教師、國教輔導人員及國校教師作教學及輔導進修等之參考。
- 二、本叢書之編輯，理論與實際兼顧，以適合本省師範教育及國民教育之實際需要為目標。
- 三、本叢書分為教育原理、教育心理、教育行政、教材教法、學生指導、及教育研究等六類，每一門類冊數不拘。
- 四、本叢書聘請學者專家組織「師範教師叢書編審委員會」負責策劃及審查。
- 五、本叢書特請國內外教育專家學者合作，凡認有適合本叢書出版主旨之各國名著，請來函推薦，擬自行編譯或另行覓人編譯均可。來函請寄「臺中霧峯省教育廳第四科」。
- 六、本叢書第一輯共四十五冊，因包羅廣泛，安排失當之處，自所難免，至祈讀者隨時指教。

序

本廳對師範教育，一向極為重視。光復之初，國民學校師資，代用教師佔總數百分之七十以上，迄民國五十年以後，全省國校已無代用教師存在。現全省在職之五萬四千餘國校教師中，以師範學校畢業者為大宗約三萬八千餘人，師專畢業者為二千餘人。其餘高中、高職畢業者約九千餘人，初中初職畢業者約五千餘人，但均經檢定或登記合格。現全省每年師專師範學校畢業生，除供應國校師資需要外，已略有餘額。全省師範學校改制為師範專科學校，至本年暑假已全部完成。至民國六十一年，新分發服務之國校師資，將全部為師範專科學校畢業。

目前本省師範教育重要問題，一方面在加強在校學生學習，另一方面則為實施在職教師訓練。一項全面性的在職教師進修制度，現正由教育部及本廳研議之中，使有志進修之在職教師，各就其現有學歷，得以補修師範、師專，以至師大及各類研究所等之學分學位，以實際提高教師學歷；並為顧及全省各地區需要，將同時舉辦夜間部、暑期部及函授部等，期以運用各種有效方式，加速達成提高師資素質之目標。

民國五十三年起與聯合國兒童基金會合作，為提高「師資之師資」素質，辦理師範、師專教師訓練，為期八週，參加人數共二百人，另辦理縣市政府視導人員訓練，為期六週，共二百一十七人，國校教師訓練，為期三週，共一萬二千人。除辦理此項短期之在職人員訓練外，並加強國民教育輔導工作，推行國民學校重點輔導計劃，除原有

之省國民教育輔導團及各師範學校輔導人員外，組織各縣市輔導團，實施巡迴教學示範，以改進國民教育，另並編印師範教師叢書四十五種，以供應師範、師專教師教學之參考，國校教師叢書八十種，以供國校教師之參考。

目前國內有關師範教育之教學參考資料不多，仍需借鏡歐美各國文獻。此一叢書，多選自各國教育名著並加以編譯。由本廳敦聘國內專家學者，組織本叢書編審委員會，推薦名著，介紹執筆人選，負責審查或實際參與編譯工作。內容大致分教育原理、教育心理、教育行政、教材教法、學生指導及教育研究等六項。由於各委員及執筆之專家學者之襄助，本叢書乃得及時出刊，相信此一叢書之出版，對改進師範教育之在校學生學習及加強在職師資訓練，均有相當裨益。

當此叢書問世之際，除對各委員及譯作者表示感謝之忱外，教育部國民教育司葉司長楚生為聯合國兒童基金會援助本計劃之實際指導人，對於本計劃之執行提示尤多，在此一併致謝。第二個五年計劃，現正與聯合國兒童基金會商洽之中，故此項出版計劃，仍有繼續之希望，尚祈國內外學者專家及實際參閱本叢書之各教師，繼續提供改進意見，俾資改進，則幸甚焉。

潘振球 民國五六年五月
於臺灣省教育廳

國民小學算術教學法目次

編輯例言

廳長序

上篇 通論	1
第一章 導言	1
第二章 算術科教學目標	6
第三章 算術科課程	12
第四章 算術科教材	21
第五章 算術科教學方法	27
第六章 算術的初步教學	58
中篇 分論	73
第七章 加法	73
第八章 減法	82
第九章 乘法	94
第十章 除法	107
第十一章 倍數、因數、除數、方和根	121
第十二章 分數	130
第十三章 小數	155

第十四章	百分法	170
第十五章	應用問題	176
下篇	美國「新算術」幾個著名的實驗設計簡介	193
第十六章	學校數學研究小組計劃	193
第十七章	大克夫蘭數學設計	229
第十八章	伊利諾大學數學設計	241
第十九章	墨迪遜設計	257
第二十章	集合與數的設計	269
第二十一章	低年級幾何設計	277
第二十二章	明納蘇他小學課程設計	285
第二十三章	美國新算術實驗設計的批評及我國小學算 術教育今後的改進	294

上 篇 通 論

第 一 章 導 言

一、算術的意義

算術可界說為處理數以及數與數間關係的科學。數是抽象的東西，它是由計數、測量和整理日常生活中所遭遇到的各種數量和實物等具體情境中，抽象而來。說算術是數的科學，是因為算術是以計數和一與一的對應 (one-to-one correspondence) 等基本觀念為基礎。此外，數學是研究時間、空間、物質等數量方面的一門範圍較廣的科學；而算術正是整個數學範圍中的一個部分，一個最簡易而最基本的部分。

代數也是數學中的一個分支。不過代數所包含的關於數以及數與數間關係的處理，較之算術為概括。算術所涉及的是一些特殊的情境，例如下列所舉的事實 (facts)： $3+5=8$ 和 $3 \times 5=15$ 。算術也涉及原理 (Principles)。算術所涉及的原理，下列的敘述可作為說明：

如 $3+4=7$ ，則 $4+3=7$ ；如 $3 \times 4=12$ ，則 $4 \times 3=12$ 。

至於代數所涉及的，則是關於數字情境的概括的說明，例如：速度乘時間等於距離，或 $R \times T = D$ 。代數也涉及原理，舉例如下：

如 $a + b = c$ ，則 $b + a = c$ ；如 $f \times g = h$ ，則 $g \times f = h$ 。

在上述例子裏的 a ， b ， c ， f ， g 和 h ，是從某一特定的數量集合中所抽選的任何數或量。代數裏的工作大部分是以公式的利用和

方程式的解答為依據，而這兩者都包含有數量間關係的敘述。在這些敘述中所用的元素（elements）必須滿足某些基本的假定。算術是代數的基層結構，這裏所用的元素是自然數，零，分數和小數。在算術中的運算，普通是以產生上述同種類的元素為限。

數學中也包含幾何。幾何是研究平面和空間裏某些元素的關係。幾何的元素是點、線和平面，而幾何的科學就是研究這些元素間許多可能的關係。這種研究所用的方法是邏輯的推理和演繹的證明。平面形和簡單立方體的一些特性，在算術中要加以研究。標準的幾何作圖以及周邊、面積、體積等的測量，在算術中也很重視。

二、算術的重要性

算術在很早的時候，就被列入小學課程。所謂 3Rs，算術就是其中之一。直到現在，算術依然是基本教育中一個重要科目。其所以如此，實由於下列幾種原因：

(一)是生活環境中之一重要部分 只須稍微注意一下，就可發覺數在我們環境的各方面佔有重要的地位。人和萬物都具有數量的特性，如輕重、大小、年齡、溫度、脈搏跳動等等。以我們穿的服裝而論，上至帽子，下至鞋襪，形式大小顯然不同。此外如時間表、薪資、用費、競技、交通、食物購買，在我們日常生活的各方面，那一項不包含有數在內？類此事例，可以說不勝枚舉。

數在人類生活中如此重要，因此即使是原始人，在他們能讀能寫之前，就已需要一些計算事物多寡的方法。以後文明進步，應用數的機會越來越多，並且產生了一套數的制度。沒有數，我們就不可能有現代的文明。

數既然是我們生活環境中之一重要部分，因此每一個人基本運算方面都需要有相當的能力，來應付日常生活中的簡單數量問題。現在的情形如此，未來生活中的各方面對於算術的依賴，無疑的，一定更多。

(二)爲研習學校許多科目所必需 算術不僅在日常生活中要常常用到，而且也爲研習學校中許多科目所必需。例如在歷史科裏，總不能沒有時期、年代表、圖片、表卡和地圖；地理科裏也斷不能沒有土地大小、人口多少，以及海拔、經緯度、物產數量等資料。此外如音樂、美術、勞作等科，也無一不多多少少包含一些數量計算在內。所以我們要研習其他各科，也需要借助於算術。

(三)爲將來進一步研習自然科學和數學的基礎 最近由於科學發展而引起的時代方面的急劇變化，已促使全世界的國家，都在努力發展科學教育，希望學校能培養出更多的和更好的科學家。科學教育首先要求數學的精通，而數學的精通又有賴於良好的算術作爲基礎。數學爲科學之母，算術則爲數學之后。現代科學先進的國家，對於改進數學教育的努力，已經由大學而中學，最近且已伸展至小學，原因即在於此。

(四)爲從事各業人員所必需 在今天，職業上的成功，大部分有賴於應用算術的能力。農人、商人、包工、家庭主婦、印刷工人等等，所用到的算術已日趨複雜。即使是一般公司裏開列帳單的雇員，在所開列的薪金帳單內，就包含有各種稅捐、保險費、各種加給以及其他一些複雜的計算。至於專門技術人員和專業人員，如工程師、醫師、教師、會計師、心理學家、化學家、數學家等等，也都需要適當的算術能力，作爲執行業務和從事專門研究中所必需的數學的基礎。

(五)有助於高級的思考歷程的發展 算術不僅是一個知識的科目，而且對於高級的思想歷程——如辨別、比較、分析、綜合和排比——的發展，也有貢獻。心理學家現在認為上述這些思考歷程有一些遷移的可能。就這一方面而論，在小學教學科目中，沒有一科能勝過算術的。

小學教育中的算術教育，屬於普通教育範疇。普通教育是幫助個人適應不屬於職業生活的情境的。雖然慎思明辨的思考能力的發展，並不依靠著數學，同時心理學亦雖已充分證明技能不能機械地遷移到其他情境，但數學的思考，無疑地能幫助建立一種便於從事慎思明辨的思維的型式。幾何學對於這方面的貢獻，就是一項實際的例證。

依據蓋茨 (Gates, A. I.) 的意見 (註一)，學習遷移是基於理解。遷移不是機械的，而是參酌過去經驗並適當地應用以前所學得的意義和方法，來審慎地解釋新情境。換言之，就是把從某一情境中所學得的能力，在另一情境中去「應用」。教學生應用，是一種高級的教學。一位數學教師在某一點上教導學生一些從事慎思明辨的思考能力，以期將來能轉移或應用到另一情境中去，這並非是不可能之事。

三、小學算術教學現正發生重大變化

算術雖是小學裏一個古老科目，但它的課程並不是一成不變。其中有一些教材要項，儘管早經大家認可作為算術課程中的一部分，但算術課程的內容，仍然不斷的隨時發生變化。尤其是最近美國人所熱心實驗的小學算術新內容和新方法，業已促使小學算術的教學，發生顯著而重要的改變。他們所以如此地熱心檢討，尋求改進，固然可追

溯到他們國內外所發生的某些有深遠影響的社會學上的和科學上的運動，而以下所列舉的，則是幾項重要而直接有關的近因：

(一)科學技術方面之不斷的進步，已經促使一般少年們必須要通曉一種「新」的數學。

(二)最近各方面對於學校所提出的各種強烈的抨擊和指責（包括正確的和不正確的），已經激起從事進一步研究和實驗的熱忱。

(三)修訂大、中學數學課程的興趣，已經向下延伸到小學階段。

(四)認定一個年級與下一個年級之間以及小學與中學之間，在數學課程上，必須要有較有效的聯繫。

(五)從研究、經驗、觀察等方面所得到的事實，已充分暴露以往算術課程和教學方法的各項限制和缺點。

(六)瞭解數學的結構，已被認為是使兒童理解教材意義的要件。

(七)為了充分供應天才兒童學業上的迫切需要，已經把新的內容引進小學算術課程之中。

(八)由於科學研究發展在國計民生上的重要性，急需改進小學算術教學，為培養未來的科學家和數學家奠立基礎。

我國為發展科學，目前已在高中階段試行新數學。影響所及，我國國民學校的算術教學，在最近的將來亦必將連帶的引起革新。關於發展中的新算術的時代背景，前文已略有說明。在以下各章中，將隨時就小學算術中的若干新觀念，新實施，擇要引叙，並在本書的下篇，介紹幾項“新算術”的實驗，俾作為今後研究改進之一助。

〔附註〕

- 一、據 Thorpe, C.B. : Teaching Elementary Arithmetic (N. Y. : Harper & Brothers, 1962) P.5, 所引。

第二章 算術科教學目標

算術科教學目標是算術教學進程的指標，為決定課程內容及教學方法的重要依據，地位異常重要，所以要首先加以研究。

一、小學算術教學目標之史的發展

算術自經列入小學課程以來，它的教學目標由於時代的推移和學習理論的變化，曾經發生不少次的改變。到了現在，和以前情形相較，已有很多的不同。茲將其中演變的情形，簡述如次。

最初在算術被列為小學教學科目的時期，教學目標完全是限於商場裏計算技能的準備。到了十九世紀，心能訓練說（The Mental discipline theory）極為流行，整個的教育幾乎都以訓練心能為目標。影響所及，算術的教學目標，也一變而為心能的訓練與發展。當時算術課本的內容所以充滿了艱深而繁複的計算教材和應用問題，目的就是希望透過解答這些算術習題所用到的心理操練，來發展心理方面一些重要能力，如記憶，推理等等。後來心理學家詹姆士（William James）提出事實證明，記憶的方法雖可以改良，記憶的能力卻不能增進；桑代克（Thorndike, E.L.）又以確鑿可信的事實，證明沒有一個科目具有優越的訓練價值（註一）。算術科訓練心能的教學目標，這時才發生動搖，乃至逐漸為人所摒棄。

到了二十世紀初期，社會應用說（The Social utility theory）取代了心能訓練說，於是社會應用就成為小學算術的教學目標。依據這一理論，認為算術教學的目的，是在使兒童利用算術解決日常生

活中所遭遇到的數量問題。換言之，所以要教兒童學習算術，是因為算術在生活適應上，有直接的貢獻，而不是因為它有訓練心能的間接價值。根據這一觀點，算術課程的內容，自然要和生活上的實際需要，發生密切的聯繫。爲了探查日常生活中常用到的算術是那些，就有很多人從事社會調查的研究（威爾遜 Wilson, G.M. 在一九一九年所發表的「社會上常用算術的調查」，便是這類研究中最著名的一個），然後以這類調查研究的結果，作爲修訂算術課程內容的依據。後來算術課本中有一些生活上很少用到的教材，漸被刪除，另外又把一些日常應用而經漏列的教材，補進課本，就是受了社會應用這一教學目標的影響。

但算術是具有嚴整論理次序的科目，在學習上不容躐等。依據日常生活中應用次數的多寡，作爲刪定算術教材的標準，足以破壞數的系統之內在的關聯。例如分數除法的社會應用次數雖較分數加、減、乘等法爲少，但就數的系統及數學的思考而言，仍有加以教學的必要。再加自一九三〇年以來，卜朗列爾 (Brownell, w.A.)，摩索 (Moser, H.D.)，道生和羅地爾 (Dawson, D.T. and Ruddell, A.K.) 等人所做的算術學習心理的研究，證明算術教學著重有意義的學習 (Meaningful learning) 優於不重理解、忽視順序的機械而支離破碎的學習，於是如何教學算術使兒童明瞭其意義，逐漸成爲一項運動。從一九三五年起，這種重視理解，著重系統的意義說 (The meaning theory)，漸漸形成爲算術教學上的新觀念。結果，使算術教學一向所重視的社會的目標，又逐漸爲算術之數學的目標所取代。

二、算術教學目標的新觀念

由於卜朗列爾等人所做的算術學科心理的研究而倡導的有意義的算術教學，結果把現代的小學算術教學的重點，引導到數學的方面來，已如前述。最近由於一九五七年以後美國推行「新數學」，使現代小學算術教學重點趨向於數學的方面發展，更加顯著而確定。現在美國研究小學算術教學的專書和論文，在標題上已經有用「Elementary School Mathematics」字樣來代替「Arithmetic」的情形。美國衛生教育福利部教育署於一九六三年所印行的「Elementary School Mathematics」一書，就是一個顯著的例子。這種名詞的改換，足以充分說明小學算術教學重點的改變。而所謂「小學數學」，它的內容，已經不限於以前數學中一支的算術，而是包羅到這一年齡範圍內的兒童能夠學習的數學中所有各支的教材了。

這一教學重點的改變，使現代小學算術的教學目標，屬於數學的部分逐漸加重，屬於社會的部分逐漸減輕。有些算術教學方面的權威，已經把社會應用部分貶降到無足輕重境地，而把算術當作進一步研究高深數學的基礎。例如美國堪薩斯大學(University of Kansas)數學系主任卜萊士(Price, G. B.)在「數學上的進步及其與學校的關聯」一文的結論中說：「總之，我必須強調：小學、初中和高中，打下這數學教育的基礎。我必須強調：小學教師、初中教師和高中教師，對於實現我們為改進數學教育而提供的計劃，是絕對的必要。因為教學是由這些教師施教；而這些教師必須熱心教學，才能使他們的學生繼續研究數學。」(註二)

由上所述，可知現代小學算術教學的目標，已側重它的數學部分；這不僅是爲了加強一般國民修養而提供一項必需的要素，而且還包含有爲他們將來研究數學和自然科學乃至所有其他各科的高深研究，