科学版

研究生教学丛书

控制系统中的矩阵理论

陈东彦 石宇静 吴玉虎 编著

科学出版社

科学版研究生教学丛书

控制系统中的矩阵理论

陈东彦　石宇静　吴玉虎　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了矩阵理论的基本内容及其在控制系统中的有关应用. 全书共分 10 章，主要内容包括矩阵理论基础、范数与测度、矩阵的相似标准形、矩阵分解、矩阵特征值的估计与定位、矩阵函数、几种重要的矩阵、矩阵的广义逆、矩阵不等式，以及矩阵方程等. 本书内容丰富，每章中都配有适当的例题和一定量的习题.

本书可作为应用数学、运筹学与控制论、计算数学、控制理论与控制工程、系统理论、系统工程等专业的研究生教材，也可供相关专业的教师和科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

控制系统中的矩阵理论/陈东彦，石宇静，吴玉虎编著. —北京：科学出版社，2011

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 978-7-03-031748-3

Ⅰ. 控… Ⅱ. ①陈…②石…③吴… Ⅲ. 矩阵-应用-控制系统-研究生-教材 Ⅳ. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 123368 号

责任编辑：王 静 房 阳 / 责任校对：郑金红

责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2011 年 7 月第一次印刷 印张：14 1/4

印数：1—2 500 字数：280 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着科学技术的迅猛发展，各学科领域广泛融合，科学研究工作对数学工具的需求越来越强，科技进步对数学工具的依赖也越来越多. 同时，科技发展对数学工具的需求也极大地促进了数学自身的发展，矩阵理论就是在不断地满足科技发展需要的过程中形成并得到完善的. 矩阵理论在数学的诸多学科分支及多个科学技术领域都得到了广泛的应用，特别是在数值分析、最优化方法、微分方程、概率论与数理统计、控制理论、系统工程等学科领域中起着十分重要的作用，并正在逐步渗透到经济管理、金融保险、社会科学等新的领域. 计算机及计算技术的迅速发展也为矩阵理论的应用提供了强大的技术支持，矩阵的相关理论方法已成为理工科研究生的必修内容. 现在流行的矩阵理论方面的书籍种类繁多，但学科领域的不同使得对矩阵理论需求的差异很大，要选择一本合适的书作为教材、参考书，无论对教者还是对读者都是十分重要的，也是不容易的. 理论太多难读难懂，理论太少又不成体系. 考虑众多因素，并结合哈尔滨理工大学的教学实际，作者在多年教学积累的基础上，对内容适当取舍，并进行了精心组织与安排，使所编教材在理论上具有系统性、完整性，在计算上具有可操作性、直观性.

本书以矩阵的基本理论为基础，重点介绍矩阵在控制理论中的相关应用，内容选择与难度掌握介于纯粹的矩阵理论与工科矩阵分析之间，更适合于应用数学、运筹学与控制论、计算数学、控制理论与控制工程、系统理论、系统工程等专业使用. 全书共包括 10 章. 第 1 章介绍线性代数中有关矩阵的基本概念和简单性质、正规矩阵和 Hermite 矩阵的有关性质，以及矩阵在控制系统中的一些具体应用；第 2 章介绍向量范数、矩阵范数与矩阵测度的概念及性质；第 3 章介绍 λ 矩阵的有关内容、矩阵的 Jordan 标准形及 Cayley-Hamilton 定理；第 4 章介绍矩阵的几种常用分解——三角分解、秩分解、谱分解和奇异值分解；第 5 章介绍矩阵特征值上下界的估计、特征值定位的 Gerschgorin 圆盘定理以及受扰动矩阵的特征值的扰动分析；第 6 章介绍矩阵函数的定义、计算与谱分解，矩阵函数序列和矩阵级数以及矩阵函数的分析运算；第 7 章介绍非负矩阵、M 矩阵以及稳定矩阵的概念及性质；第 8 章介绍矩阵的几种常用的广义逆及其在方程组求解问题中的有关应用；第 9 章介绍矩阵的部分数值特征不等式，如矩阵的行列式、特征值和迹的不等式，以及线性矩阵不等式的基本内容及其在处理控制系统中的应用；第 10 章介绍矩阵线性方程的可解条件、解的表示与性质，矩阵非线性方程（矩阵 Riccati 方程）的可解条件、解的性质，以及矩阵方程解的估计结果. 其中第 9 章和第 10 章的内容包含了作者收集和整理的相关研究的近期成果，也包含了作者的部分研究成果.

本书的主要内容已在哈尔滨理工大学应用数学学科和理工科相关专业的研究生教学中多次讲授，因此，在内容选择方面注重了理论研究与实际应用的结合，希望所编写的内容能对数学及相关交叉学科的教学和研究提供一些方便和有益的帮助. 本书第 3 章由吴玉虎编写，第 8 章由石宇静编写，其余各章由陈东彦编写，最后由陈东彦统稿. 本书的出版得到国家自然科学基金(10771047)的资助. 作者感谢在本书的编写和出版过程中提出宝贵意见的各位专家，感谢科学出版社编辑们的辛勤工作，感谢哈尔滨理工大学有关师生、领导的帮助和支持.

由于作者水平所限，书中难免有疏漏和不足之处，敬请读者批评指正.

作 者

2011 年 2 月

符 号 说 明

符号	含义
$F,\mathbf{R},\mathbf{C}$	数域(实或复数域)、实数域、复数域
$F^n,\mathbf{R}^n,\mathbf{C}^n$	n 维(实或复)向量空间、n 维实向量空间、n 维复向量空间
$F^{m\times n},\mathbf{R}^{m\times n},\mathbf{C}^{m\times n}$	$m\times n$(实或复)矩阵空间、$m\times n$ 实矩阵空间、$m\times n$ 复矩阵空间
$A,B,C,\cdots$	矩阵
O,I_n	零矩阵、n 阶单位矩阵
$\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$	以数 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为对角元素的对角矩阵
$\mathrm{diag}\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$	以矩阵 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 为对角块的分块对角矩阵
$x,y,z,\cdots$	列向量
0, $\mathbf{0}$	数零、零列向量
A_{ij}	矩阵 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式
A^*	矩阵 A 的伴随矩阵
$\|A\|,\|x\|,\|\lambda\|$	矩阵 A 的模矩阵、向量 x 的模向量、数 λ 的模或绝对值
$\overline{A},\overline{x},\overline{\lambda}$	矩阵 A 的共轭矩阵、向量 x 的共轭向量、数 λ 的共轭复数
$A^{\mathrm{T}},A^{\mathrm{H}};x^{\mathrm{T}},x^{\mathrm{H}}$	矩阵 A 的转置矩阵、共轭转置矩阵;向量 x 的转置向量、共轭转置向量
$\det(A),\lambda(A),\mathrm{tr}(A)$	方阵 A 的行列式、特征值、迹
$\rho(A),\tilde{\rho}(A),\mu(A)$	方阵 A 的谱半径、谱、测度
$\mathrm{rank}(A),\sigma(A)$	矩阵 A 的秩、奇异值
$\mathrm{Im}(A),\ker(A)$	矩阵 A 的值域、核空间
$\mathrm{Vec}(A)$	矩阵 A 的向量化
$A^{-1},A^{-},A_{\mathrm{r}}^{-}$	矩阵 A 的逆、减号逆、自反减号逆
$A_{\mathrm{m}}^{-},A_{\mathrm{l}}^{-},A^{+}$	矩阵 A 的最小范数广义逆、最小二乘广义逆、加号逆
$\mathrm{Im}\,\lambda,\mathrm{Re}\,\lambda$	数 λ 的虚部、实部
i	虚数单位,$\mathrm{i}^2=-1$
$\\|\cdot\\|,\\|\cdot\\|_{\mathrm{m}}$	向量范数或矩阵算子范数、矩阵范数
$\\|\cdot\\|_1,\\|\cdot\\|_2,\\|\cdot\\|_\infty$	向量的 1 范数、2 范数、∞范数或矩阵的算子 1 范数、2 范数、∞范数

$A \geqslant 0(A > 0)$	A 是半正定矩阵(A 是正定矩阵)
$A \geqslant O(A > O)$	A 是非负矩阵(A 是正矩阵)
$x \geqslant \mathbf{0}(x > \mathbf{0})$	x 是非负向量(x 是正向量)
$A \geqslant B(A > B)$	$A-B$ 是半正定矩阵或 $A-B$ 是非负矩阵($A-B$ 是正定矩阵或 $A-B$ 是正矩阵)

目　　录

第 1 章　矩阵理论基础

本章主要介绍在线性代数中有关矩阵理论的部分知识，为后面各章的学习做准备.

1.1　矩阵及其数值特征

定义 1.1　设 F 表示某个数域（实数域 **R** 或复数域 **C**），$a_{ij}\in F(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，称如下具有 m 行 n 列的矩形阵列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

为一个 $m\times n$ 型矩阵，简记为 $A=(a_{ij})\in F^{m\times n}$或$A=(a_{ij})_{m\times n}$. 当 $m=n$ 时，称矩阵 A 为 n 阶方阵，简记为 $A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$或$A=(a_{ij})_{n\times n}$.

关于矩阵维数、矩阵元素、矩阵相等的概念，以及矩阵的加法、数乘、乘积、乘幂等运算都与线性代数中相同，在此不一一介绍.

在矩阵运算中，有时为了需要，常用贯穿整个矩阵的一组水平线或垂直线将矩阵分成若干块，每块皆为原矩阵的子矩阵，而将矩阵 A 写成如下形式：

$$A=\begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} & \cdots & \widetilde{A}_{1r} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & \cdots & \widetilde{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{A}_{s1} & \widetilde{A}_{s2} & \cdots & \widetilde{A}_{sr} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

称式(1-2)为分块矩阵 A，其中 $\widetilde{A}_{kl}$ 为分块矩阵 A 的第 k 行 l 列位置的子矩阵，其维数为 $m_k\times n_l(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,r)$，并且 $\sum\limits_{k=1}^{s}m_k=m,\sum\limits_{l=1}^{r}n_l=n$. 称 $\widetilde{A}_{kl}$ 为分块矩阵 A 的元素. 当 $s=r$ 时，称分块矩阵 A 为分块方阵.

例如，将矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{bmatrix}_{4\times 6}$ $(m=4,n=6)$分块为

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array}\right]_{4\times 6} \triangleq \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{13} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}, \quad s=2, r=3$$

其中

$$\widetilde{A}_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_{13}=\begin{bmatrix} a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_{22}=\begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}_{23}=\begin{bmatrix} a_{36} \\ a_{46} \end{bmatrix}$$

并且 $m_1=m_2=2, n_1=3, n_2=2, n_3=1, m_1+m_2=4, n_1+n_2+n_3=6$. 当然，对矩阵 A 还可以有其他的分块方法，可根据实际运算的需要选择.

分块矩阵具有与普通矩阵类似的维数、元素、相等的概念，以及与普通矩阵相同的加法、数乘、乘法、乘幂等运算准则. 需要注意的是，对分块矩阵进行运算时还要注意到块与块之间运算的可行性.

下面回顾一下矩阵的基本概念、常用的数值特征及性质，有关证明均能在线性代数或高等代数书籍中找到.

1.1.1　方阵的行列式

行列式是与方阵紧密相关的数值特征，在逆矩阵、非奇异矩阵概念及性质的研究中具有重要作用.

定义 1.2　设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$，$A$ 的行列式定义为

$$\det(A)=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

或

$$\det(A)=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

其中 $i_1 i_2\cdots i_n$ 与 $j_1 j_2\cdots j_n$ 均为数 $1,2,\cdots,n$ 的任意全排列，$\tau(\cdot)$表示某一全排列的逆序数.

矩阵 A 的行列式也常记作$|A|$，为使符号不易混淆，本书采取记号 $\det(A)$.

方阵的行列式有如下几个重要性质：

性质 1.1　(1) $\det(A)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$，其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，即方阵 A 的行列式等于其任意一行(或列) 的各元素 a_{ij} 与其对应的代数余子式 A_{ij} 的乘积之和.

由此可知，$\det(A)$是 A 的任一行(或列)的元素的线性函数.

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{il}=0(k\neq l)$ 或 $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{lj}=0(k\neq l,k,l=1,2,\cdots,n)$，即方阵 A 的某一行(列)的元素与另外一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

(3) 若 $A,B\in F^{n\times n}$，则 $\det(AB)=\det(A)\det(B)=\det(BA)$，即方阵乘积的行列式可交换.

定义 1.3 对 n 阶方阵 $A\in F^{n\times n}$，如果 $\det(A)\neq 0$，则称 A 为非奇异矩阵；否则，称 A 为奇异矩阵.

用 A^* 表示矩阵 $A\in F^{n\times n}$ 的伴随矩阵，即 $A^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$，其中 A_{ij} 为矩阵 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵的转置矩阵. 由性质 1.1(1)知

$$A^*A=AA^*=\det(A)I_n$$

定义 1.4 对于 n 阶方阵 $A\in F^{n\times n}$，如果存在 n 阶方阵 $B\in F^{n\times n}$，使得 $AB=BA=I_n$，则称矩阵 A 为可逆矩阵(简称为可逆)，并且 B 称为 A 的逆矩阵，记为 $B=A^{-1}$.

由矩阵可逆的概念及性质 1.1(3)易知，矩阵 A 是可逆的当且仅当 $\det(A)\neq 0$，即 A 为非奇异矩阵. 当 A 为非奇异矩阵时，$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*$，同时还有 $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$.

1.1.2 矩阵的秩

定义 1.5 在矩阵 $A\in F^{m\times n}$ 中任意选取 k 个行和 l 个列，位于交叉位置的 kl 个元素按照原来的相对位置构成 A 的一个 $k\times l$ 阶子矩阵. 当 $k=l$ 时，称 $k\times l$ 阶子矩阵为 k 阶子矩阵. k 阶子矩阵的行列式称为 A 的 k 阶子式.

定义 1.6 设矩阵 $A\in F^{m\times n}$，称 A 的非零子式的最大阶数为矩阵 A 的秩，亦即 A 中非奇异子矩阵的最大阶数为矩阵 A 的秩，记为 $\mathrm{rank}(A)$.

由定义 1.6，除了当 A 为零矩阵时有 $\mathrm{rank}(A)=0$ 外，对任何非零矩阵 A 都有 $\mathrm{rank}(A)\geqslant 1$. 一般地，$\mathrm{rank}(A)\leqslant\min\{m,n\}$.

对矩阵 $A\in F^{m\times n}$，若满足 $\mathrm{rank}(A)=m$，则称 A 为行满秩的；若满足 $\mathrm{rank}(A)=n$，则称 A 为列满秩的. 对 n 阶方阵 $A\in F^{n\times n}$，若 $\mathrm{rank}(A)=n$，则称 A 为满秩的. 方阵 A 是满秩的当且仅当它既是行满秩的，又是列满秩的，从而 A 是非奇异的(或 A 是可逆的).

矩阵的秩具有如下常用性质：

性质 1.2 (1) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^{\mathrm{H}})(A\in F^{m\times n})$，其中 A^{H} 为 A 的共轭转置矩阵；

(2) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(PA)=\mathrm{rank}(AQ)=\mathrm{rank}(PAQ)$，其中 $A\in F^{m\times n}$，且 $P\in F^{m\times m}$ 和 $Q\in F^{n\times n}$ 均为满秩的；

(3) $\mathrm{rank}(AB)\leqslant\min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}(A\in F^{m\times s},B\in F^{s\times n})$；

(4) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^{\mathrm{H}})=\mathrm{rank}(A^{\mathrm{H}}A)(A\in F^{n\times n})$；

(5) $\mathrm{rank}(A+B)\leqslant\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)(A,B\in F^{m\times n})$；

(6) $\mathrm{rank}(\mathrm{diag}\{\widetilde{A}_{11},\widetilde{A}_{22},\cdots,\widetilde{A}_{ss}\})=\sum_{j=1}^{s}\mathrm{rank}(\widetilde{A}_{jj})$，其中 $\mathrm{diag}\{\widetilde{A}_{11},\widetilde{A}_{22},\cdots,\widetilde{A}_{ss}\}$ 表示以 $\widetilde{A}_{jj}\in F^{n_j\times n_j}(j=1,2,\cdots,s)$ 为对角块的分块对角矩阵.

1.1.3　方阵的特征值

定义 1.7　对 n 阶方阵 $A\in F^{n\times n}$，如果存在数 λ 和 n 维非零向量 $x\neq\mathbf{0}$，使得 $Ax=\lambda x$，则称 λ 为 A 的特征值，称非零向量 x 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

由定义 1.7，若 λ 为 A 的特征值，则必存在 $x\neq\mathbf{0}$，使得 $Ax=\lambda x$，即方程组

$$(\lambda I_n-A)x=\mathbf{0}$$

有非零解，也即系数矩阵 λI_n-A 为奇异矩阵，从而如下方程成立：

$$\det(\lambda I_n-A)=0$$

一般称此方程为方阵 A 的特征方程，多项式 $\det(\lambda I_n-A)$ 为方阵 A 的特征多项式，记为 $\varphi(\lambda)$. A 的特征值必是特征方程的根，因此，也称之为特征根.

n 阶方阵 A 在复数域 $\mathbf{C}$ 内必有 n 个特征值（可以重复，重复的次数称为特征值的代数重数）. 如果设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（可以重复），则 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j)$. 由此可得如下简单结果：

(1) $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}$，$\prod_{j=1}^{n}\lambda_j=\det(A)$；

(2) 矩阵 A 是非奇异的（可逆的或满秩的）当且仅当其所有特征值均非零，即 $\lambda_j\neq0(j=1,2,\cdots,n)$；

(3) $\det(\lambda I_n-A)=\det(\lambda I_n-S^{-1}AS)$，其中 $S\in F^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，即 $S^{-1}AS$ 与 A 具有相同的特征多项式，从而有相同的特征值.

矩阵 A 的所有特征值的集合记为 $\tilde{\rho}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，称集合 $\tilde{\rho}(A)$ 为 A 的谱. 谱 $\tilde{\rho}(A)$ 中各元素模的最大值称为 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$，即

$$\rho(A)=\max\{|\lambda_j|:\lambda_j\in\tilde{\rho}(A)\}=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$$

显然，对于非奇异矩阵 $S\in F^{n\times n}$，矩阵 A 与 $S^{-1}AS$ 具有相同的谱和谱半径.

对于矩阵 $A\in F^{n\times n}$，设 λ_j 为 A 的任意一个特征值，则齐次线性方程组

$$(\lambda_j I_n-A)x=\mathbf{0}$$

的解空间称为矩阵 A 对应于特征值 λ_j 的特征子空间，特征子空间的维数称为特征值 λ_j 的几何重数，并且特征值的几何重数不大于代数重数.

方阵的特征值和特征向量有以下常用性质：

性质 1.3　设 λ 为 n 阶方阵 A 的特征值，对应的特征向量为 x，则

(1) $\mu\lambda$ 和λ^m 分别为μA 和A^m 的特征值,并且对应的特征向量均为 x,其中 μ 为任意常数,m 为正整数;

(2) 若 A 可逆,则 $\lambda^{-1}(\lambda\neq 0)$为 A^{-1} 的特征值,对应的特征向量仍为 x;

(3) $\bar{\lambda}$ 也是 A^{H} 的特征值.

1.1.4 方阵的迹

定义 1.8 对于 n 阶方阵$A\in F^{n\times n}$,称其对角线元素之和为 A 的迹,记为 $\mathrm{tr}(A)$,即 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

矩阵的迹有如下常用性质:

性质 1.4 (1) $\mathrm{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\mathrm{tr}(A)+\beta\mathrm{tr}(B)$,其中 $A,B\in F^{n\times n}$,$\alpha,\beta\in F$;

(2) $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}})=\overline{\mathrm{tr}(A)}$,其中 $A\in F^{n\times n}$;

(3) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$,其中 $A,B\in F^{n\times n}$;

(4) $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$,其中 $A\in F^{n\times n}$,且 $P\in F^{n\times n}$为可逆矩阵;

(5) $x^{\mathrm{H}}Ax=\mathrm{tr}(Axx^{\mathrm{H}})$,其中 $A\in F^{n\times n}$,$x\in F^{n\times 1}$;

(6) $\mathrm{tr}(A^k)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k$,其中$A\in F^{n\times n}$,$k\geqslant 1$为正整数,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为$A$的特征值;

(7) $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{H}}A)=0$ 当且仅当 $A=O$,$A\in F^{n\times m}$;

(8) 若 $A\in F^{n\times n}$且 $A\geqslant 0$(即 A 为半正定矩阵),则 $\mathrm{tr}(A)\geqslant 0$,并且等号成立当且仅当 $A=O$;

(9) 若 $A,B\in F^{n\times n}$且 $A\geqslant B$(即 $A-B$ 为半正定矩阵),则 $\mathrm{tr}(A)\geqslant\mathrm{tr}(B)$,并且等号成立当且仅当 $A=B$.

1.1.5 矩阵的奇异值

对任意矩阵 $A\in F^{m\times n}$,可以证明 $A^{\mathrm{H}}A$ 与 AA^{H} 具有相同的非零特征值(证明可在线性代数或高等代数中找到,在此略去),据此定义矩阵的奇异值如下:

定义 1.9 设矩阵 $A\in F^{m\times n}$,并且 $A^{\mathrm{H}}A$(或 AA^{H})的非零特征值按由大到小排序为 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r>0(r\leqslant n)$,则称 $\sigma_j=\sqrt{\mu_j}$为 A 的正奇异值,常称为奇异值,记为 $\sigma_j(A)(j=1,2,\cdots,r)$,其中 $\sigma_1(A)$为 A 的最大奇异值,$\sigma_r(A)$($r=n$ 时为 $\sigma_n(A)$)为 A 的最小奇异值.

矩阵的奇异值具有如下常用的性质:

性质 1.5 (1) $\sigma_1(A+B)\leqslant\sigma_1(A)+\sigma_1(B)(A,B\in F^{m\times n})$;

(2) $\sigma_1(AB)\leqslant\sigma_1(A)\sigma_1(B)(A,B\in F^{n\times n})$;

(3) 若 $A\in F^{n\times n}$且 A^{-1}存在,则 $\sigma_1(A^{-1})\leqslant\frac{1}{\sigma_n(A)}$;若 $A,B\in F^{n\times n}$且 A^{-1},B^{-1}存

在，则

$$\sigma_n(AB) \geqslant \sigma_n(A)\sigma_n(B), \quad \sigma_n(A+B) \geqslant \sigma_n(A) - \sigma_1(B)$$
$$\sigma_n(A) \leqslant |\lambda_i(A)| \leqslant \sigma_1(A), \quad \sigma_n(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \sigma_1(A)$$

1.2　正规矩阵与 Hermite 矩阵

本节介绍两种特殊的矩阵：正规矩阵与 Hermite 矩阵，它们在矩阵理论中具有重要的作用.

1.2.1　正规矩阵及其性质

定义 1.10　设矩阵 $A \in F^{n\times n}$，如果 $AA^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A$，则称 A 为正规矩阵. 若 $F=\mathbf{C}$，则称 A 为复正规矩阵；若 $F=\mathbf{R}$，则称 A 为实正规矩阵.

特别地，如果 $U \in F^{n\times n}$ 满足 $U^{\mathrm{H}}U = UU^{\mathrm{H}} = I_n$，则称 U 为酉矩阵.

显然，由酉矩阵的定义知，酉矩阵具有如下性质：

性质 1.6　(1) 酉矩阵 U 满足 $U^{-1} = U^{\mathrm{H}}$，并且酉矩阵的逆矩阵也为酉矩阵；

(2) 两个酉矩阵的乘积仍是酉矩阵；

(3) 酉矩阵 U 的列(或行)向量组恰好构成向量空间 F^n 的标准正交基.

定义 1.11　对两个 n 阶矩阵 $A, B \in F^{n\times n}$，如果存在酉矩阵 $U \in F^{n\times n}$，使得 $B = U^{\mathrm{H}}AU$ 或 $B = UAU^{\mathrm{H}}$，则称 n 阶矩阵 A 与 B 为酉相似矩阵.

特别地，当 $F=\mathbf{R}$ 时，$\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的酉矩阵 U 称为正交矩阵，它满足 $U^{\mathrm{T}}U = UU^{\mathrm{T}} = I_n$.

若对 n 阶矩阵 $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$，存在正交矩阵 U 满足 $B = UAU^{\mathrm{T}}$，则称 A 与 B 为正交相似矩阵.

定理 1.1(Schur 定理)　任何 n 阶矩阵 $A \in F^{n\times n}$ 都酉相似于一个上三角阵，即存在一个 n 阶酉矩阵 U 和一个上三角阵 R，使得

$$U^{\mathrm{H}}AU = R$$

其中 R 的主对角元素为 A 的特征值.

证　对矩阵 A 的阶数作归纳法.

对于 $n=1$，定理成立，因为 $A=(a_{11})$，所以有 $I_1^{\mathrm{H}}AI_1 = R$，$R=(a_{11})$，$U=I_1$. 假设定理结论对 $n-1$ 阶矩阵成立，下面证明对于 n 阶矩阵 A，结论也成立.

设 λ_1 是 A 的一个特征值，ξ_1 是对应于 λ_1 的单位特征向量，即 $A\xi_1 = \lambda\xi_1$，$\|\xi_1\|_2 = \sqrt{\xi_1^{\mathrm{H}}\xi_1} = 1$，$\|\cdot\|_2$表示向量的欧几里得范数. 将 ξ_1 扩展为 F^n 的标准正交基 ξ_1，$\xi_2, \cdots, \xi_n$，则

$$U_1 = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$$

为酉矩阵.