定式法

定式法

Schemasverfahren

zur

Ausgleichung

der grossen von Vierecke mit zwei Diagonalen gebildeten

Dreieckskette

von

S. W. LIU.

劉述文 作於
中央陸地測量學校

1941

前　　言
VORWORT.

施行三角測量有必然的發生次之兩種事實，亦即發生兩種問題：

(1)已完成三角網或鎖之一部分，一面將已完成者，先行平均計算(*Ausgleichen*)，一面繼續擴張三角網或鎖。

(2)已經平均計算之三角網或鎖，依事業之進展，往往有再行增加條件方程式(*Bedingungsgleichungen*)之必要。

就第一問題言之，依歷史上所昭示者，最初只能分段平均，強為結合，可使發生不可忽視之系統誤差，而無法補救；就第二問題言之，只能放棄以前之平均計算工作，加入增加條件，重行平均計算而已．且第一問題，假使吾人放棄以前之平均計算，實行大範圍三角網或鎖之同時平均計算，則因法方程式(*Normalgleichungen*)過多，吝解所得之関屬值(*Korrelaten*)(日語名比倫值)，又有大不確實之危險．

Gauss 為挽救上之弊端起見，發明近似法(*Näherungsverfahren*)，曾應用之以平均漢洛佛弧度測量之三角網，惜其法在 Gauss 生前，未曾公佈，故未流傳，直至其死後，約五十年 L. Krüger 由其遺稿中，始發現此法，其後 L. Krüger 加以變通，完成兩組法(*Zweigruppenverfahren*)，見其所著 Prof L. Krüger „Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen." Veröffentlichung des König. preuss. Geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 18. Postdam 1905. Druck und Verlage von B. G. Teubner in Leipzig」中。

惟兩組法祇限於兩組方能適用，即就第一問題言之，若第一組三角網或鎖平均計算之後，可增加第二組三角網或鎖，雖不放棄第一組平均計算之工作，而仍能得同時一瀉注成之平均結果，且可免法方程式過多同時答解不能得精良結果之弊。但三角網或鎖，祇能增加一次，若再有第三組之三角網或鎖，則其法亦窮，仍不能計算矣。就對二問題亦然。

後十餘年 H. Boltz. 將兩組法擴張而為展開法（Eentwicklungsverfahren），此法見其所著「Entwicklungsverfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate, Veröffentlichung des preussischen geodätischen Institutes, Neue folge Nr. 90, 1923. Druck und Verlage Von P. Stankiewicz Buchdruckerei G. M. B. H. in Berlin」中，由是在第一組平均之後，不僅可增加第二組，而並可陸續增加第三組第四組…而仍能得一瀉注成之結果矣。

其後 Werner Jenne 見三角網或鎖之平均計算中，角方程式（Winkelgleichungen）最多，且其法方程式亦簡單而有規律，因思利用展開法先平均角方程式，然後再增加其他之條件方程式，由連行列式可變為連分數之關係，查出任意分枝之單三角鎖及有中点多邊形之三角鎖及其閉合環三角鎖之角方程式之法方程式，答解後閉塞差 W 之係數可利用点表示（Punktdarstellung）直接書之為連分數，並推而廣之，凡双倍鎖之三角網，由中央對稱三角網以及不對稱之三角網，有對角綫之三角網以及測站平均（Stationsausgleichungen）方向量平均（Vektorische Ausgleichung）等等，均可將關屬值展開

式中W之係數書爲連分數，其法詳其所著「Kettenbruchformeln und Korrelattentabellen für trigonometrische Netze mit einigen Beitragen zur Auflösung beliebiger System einfacher linearer Gleichungen mit Hilfe von Kettenbrüchen, Veröffent. d. Pren. Geod. Institutes. Neue Folge Nr. 107, 1937, Druch von Buchdruckerei-Friekert & Co., Berlin SW11. Vorm. P. Stankiewicz Buchdruckerei G m b H.」書中。

H. Boltz 既出版展開法之後，經十餘年之推進，又由展開法脫化而爲代替法(Substitutionsverfahren).(見Substitutionsverfahren zum Ausgleichen grosser Dreiecksnetze in einem Guss nach der Methode der kleinsten Quadrate von H. Boltz, Neu Folge Nr.108, 1938):

以上爲近代三角網或鎖之平均計算發展上之經過，他不具論，惟作者讀 W. Jenne 氏之書，于我心有戚戚焉。盖我國大三角測量之惟一機構爲全國陸地測量總局之三角科，近十餘年来，所作之大三角鎖均係倣照美國海岸量地局(U.S. Cost and Geodetic Survey)所用之圖形，卽概爲有二對角线之四邊形，而此種圖形之三個角方程式，依Handbuch der Vermessungskunde von Jordan, B.I.A.7. §79. S.290-293 所述之法，可使其法方程式爲特别簡單之形狀。作者在十餘年前，亦将此法編入量地學(Höhere Geodäsie)講義以教學子，然Jordan 書中，只就一個四邊形而言，若四邊形之個數增多，及鎖形複雜時，則法方程式亦因之複雜，不如Jodan書中所述之簡單矣。„有問于作者曰，三角鎖不能祇一四邊形

定式法

目錄

定式法

Schemasverfahren
Zur Ausgleichungen der grossen von Vierecke mit zwei Diagonalen gebildeten Dreieckskette.

§.1. Boltz 之展開法(Entwicklungs verfahren)之基本關係式.

設將一大三角網之獨立條件方程式，分為兩組(in Zwei Gruppen)各為 r 個及 ν 個，閉塞差 w 之下標，各以阿剌伯數字或羅馬數字表之如下：

$$(1)\quad\begin{cases} 1)\quad a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_mv_m=w_1\\ 2)\quad b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_mv_m=w_2\\ \quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\qquad\cdot\\ r)\quad r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_mv_m=w_r \end{cases}$$

$$(2)\quad\begin{cases} \mathrm{I})\quad \alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_mv_m=w_{\mathrm{I}}\\ \mathrm{II})\quad \beta_1v_1+\beta_2v_2+\cdots+\beta_mv_m=w_{\mathrm{II}}\\ \quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\qquad\cdot\\ \nu)\quad \nu_1v_1+\nu_2v_2+\cdots+\nu_mv_m=w_\nu \end{cases}$$

此等 $(r+\nu)$ 個條件方程式，相應之關屬值，順次以 $K_1, K_2 \cdots K_r$ 及 $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}} \cdots K_\nu$ 表之，則由最小自乘法已知此兩組共同平

均(ausgleichungen)之改正數為下之代數的形式：

$$(2a)\begin{cases} v_1=a_1K_1+b_1K_2+\cdots+r_1K_r+\alpha_1K_I+\beta_1K_{II}+\cdots+\nu_1K_\nu \\ v_2=a_2K_1+b_2K_2+\cdots+r_2K_r+\alpha_2K_I+\beta_2K_{II}+\cdots+\nu_2K_\nu \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ v_m=a_mK_1+b_mK_2+\cdots+r_mK_r+\alpha_mK_I+\beta_mK_{II}+\cdots+\nu_mK_\nu \end{cases}$$

將此式代入上之(1)(2)兩式，則得共同平均之法方程式為：

$$(3)\begin{cases} (aa)K_1+(ab)K_2+\cdots+(ar)K_r=w_1-(a\alpha)K_I-(a\beta)K_{II}-\cdots-(a\nu)K_\nu \\ (ab)K_1+(bb)K_2+\cdots+(br)K_r=w_2-(b\alpha)K_I-(b\beta)K_{II}-\cdots-(b\nu)K_\nu \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ (ra)K_1+(rb)K_2+\cdots+(rr)K_r=w_r-(r\alpha)K_I-(r\beta)K_{II}-\cdots-(r\nu)K_\nu \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} (\alpha a)K_1+(\alpha b)K_2+\cdots+(\alpha r)K_r+(\alpha\alpha)K_I+(\alpha\beta)K_{II}+\cdots+(\alpha\nu)K_\nu=w_I \\ (\beta a)K_1+(\beta b)K_2+\cdots+(\beta r)K_r+(\beta\alpha)K_I+(\beta\beta)K_{II}+\cdots+(\beta\nu)K_\nu=w_{II} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdot \\ (\nu a)K_1+(\nu b)K_2+\cdots+(\nu r)K_r+(\nu\alpha)K_I+(\nu\beta)K_{II}+\cdots+(\nu\nu)K_\nu=w_\nu \end{cases}$$

方程式(3)之左邊，恰為一法方程式系之形狀，若將其右邊順次以 w_1' $w_2'\cdots w_r'$ 代之，並視 w' 等為不定值，依不定答解法答解方程式(3)，則得

$$(5)\begin{cases} K_1=f_{11}w_1'+f_{12}w_2'+\cdots+f_{1r}w_r' \\ K_2=f_{21}w_1'+f_{22}w_2'+\cdots+f_{2r}w_r' \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot \\ K_r=f_{r1}w_1'+f_{r2}w_2'+\cdots+f_{rr}w_r' \end{cases}$$

但

$$f_{ik}=f_{ki}$$

若將(5)式內之 w_i' $(i=1,2,\cdots,r)$ 順次以(1)式內之 w_i $(i=1,2,\cdots,r)$ 代之，則得單獨平均第一組條件方程式(1)之相應之關屬值　今命此等關屬值為 K_1', K_2', $\cdots K_r'$ 則

$$(6)\begin{cases} K'_1=f_{1\cdot1}w_1+f_{1\cdot2}w_2+\cdots+f_{1\cdot r}w_r \\ K'_2=f_{2\cdot1}w_1+f_{2\cdot2}w_2+\cdots+f_{2\cdot r}w_r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ K'_r=f_{r\cdot1}w_1+f_{r\cdot2}w_2+\cdots+f_{r\cdot r}w_r \end{cases}$$

由此等K'可算得，只單獨平均第一組條件方程式之改正數v'，若以(3)之右邊之式代入(5)式之w'則

$$(7)\begin{cases} K_1=f_{1\cdot1}w_1-f_{1\cdot1}(a\alpha)K_I-f_{1\cdot1}(a\beta)K_{II}-\cdots-f_{1\cdot1}(a\nu)K_\nu \\ \quad +f_{1\cdot2}w_2-f_{1\cdot2}(b\alpha)K_I-f_{1\cdot2}(b\beta)K_{II}-\cdots-f_{1\cdot2}(b\nu)K_\nu \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \quad +f_{1\cdot r}w_r-f_{1\cdot r}(r\alpha)K_I-f_{1\cdot r}(r\beta)K_{II}-\cdots-f_{1\cdot r}(r\nu)K_\nu \\ K_2=f_{2\cdot1}w_1-f_{2\cdot1}(a\alpha)K_I-f_{2\cdot1}(a\beta)K_{II}-\cdots-f_{2\cdot1}(a\nu)K_\nu \\ \quad +f_{2\cdot2}w_2-f_{2\cdot2}(b\alpha)K_I-f_{2\cdot2}(b\beta)K_{II}-\cdots-f_{2\cdot2}(b\nu)K_\nu \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ \qquad\qquad \text{餘　類　推} \\ K_r=f_{r\cdot1}w_1-f_{r\cdot1}(a\alpha)K_I-f_{r\cdot1}(a\beta)K_{II}-\cdots-f_{r\cdot1}(a\nu)K_\nu \\ \quad +f_{r\cdot2}w_2-f_{r\cdot2}(b\alpha)K_I-f_{r\cdot2}(b\beta)K_{II}-\cdots-f_{r\cdot2}(b\nu)K_\nu \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \quad +f_{r\cdot r}w_r-f_{r\cdot r}(r\alpha)K_I-f_{r\cdot r}(r\beta)K_{II}-\cdots-f_{r\cdot r}(r\nu)K_\nu \end{cases}$$

(7)式內關屬值$K_i\ (i=1,2,\cdots r)$之垂直之第一行之各數，即爲(6)式中之各K'_i之值；(7)式內K_i其餘各垂直行之係數亦与(6)式內K'_i之形式相同，僅須將(6)式內之$w_1, w_2\cdots w_r$以法方程式(3)內之係數：

$$(7a)\begin{cases} -(a\alpha), -(b\alpha), \cdots -(r\alpha) \\ -(a\beta), -(b\beta), \cdots -(r\beta) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ -(a\nu), -(b\nu), \cdots -(r\nu) \end{cases}$$

代換之耳，因此等垂直行与(6)式之各橫列有相似之關係，故以下將此等各垂直行以$Z_{s\cdot i}\ (S=I, II, \cdots \nu)\ (i=1,2,\cdots r)$表之

，並名 $Z_{s \cdot i}$ 為介關屬值（Zwischenkorrelaten），即

$$(8)\begin{cases} Z_{I\cdot 1}=-f_{1\cdot 1}(a\alpha)-f_{1\cdot 2}(b\alpha)-\cdots-f_{1\cdot r}(r\alpha) \\ Z_{I\cdot 2}=-f_{2\cdot 1}(a\alpha)-f_{2\cdot 2}(b\alpha)-\cdots-f_{2\cdot r}(r\alpha) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ Z_{I\cdot r}=-f_{r\cdot 1}(a\alpha)-f_{r\cdot 2}(b\alpha)-\cdots-f_{r\cdot r}(r\alpha) \\ \text{餘　類　推} \\ Z_{\nu\cdot 1}=-f_{1\cdot 1}(a\nu)-f_{1\cdot 2}(b\nu)-\cdots-f_{1\cdot r}(r\nu) \\ Z_{\nu\cdot 2}=-f_{2\cdot 1}(a\nu)-f_{2\cdot 2}(b\nu)-\cdots-f_{2\cdot r}(r\nu) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ Z_{\nu\cdot r}=-f_{r\cdot 1}(a\nu)-f_{r\cdot 2}(b\nu)\cdots-f_{r\cdot r}(r\nu) \end{cases}$$

由是（7）式可簡書為：

$$(9)\begin{cases} K_1=K_1'+Z_{I\cdot 1}K_I+Z_{II\cdot 1}K_{II}+\cdots+Z_{\nu\cdot 1}K_\nu \\ K_2=K_2'+Z_{I\cdot 2}K_I+Z_{II\cdot 2}K_{II}+\cdots+Z_{\nu\cdot 2}K_\nu \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ K_r=K_r'+Z_{I\cdot r}K_I+Z_{II\cdot r}K_{II}+\cdots+Z_{\nu\cdot r}K_\nu \end{cases}$$

（9）內各式之第一項，依（6）式知其為常數，為第一組條件方程式之閉塞差之函數；其餘各項之係數，即為各介關屬值，不僅与（6）式有關，且与第二組條件方程式之法方程式（（4）式）之係數有關，故無論何時，均可計算得之．反之（9）式內之 K_S（$S=I, II, \cdots \nu$）為第二組條件方程式之關屬值，至今尚為未知數，欲計算此等關屬值，可有兩種方法；第一可將方程式（9）代入（2a）式，並將所得之改正數 v，再代入（2）式，即得 K_S 之法方程式．第二此等 K_S 之法方程式，亦可直接得之，蓋將（9）式代入（4）式，即得其法方程式為：

$$(10)\begin{cases} A_{I\cdot I}K_I+A_{I\cdot II}K_{II}+\cdots+A_{I\cdot\nu}K_\nu=W_I \\ A_{II\cdot I}K_I+A_{II\cdot II}K_{II}+\cdots+A_{II\cdot\nu}K_\nu=W_{II} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{\nu\cdot I}K_I+A_{\nu\cdot II}K_{II}+\cdots+A_{\nu\cdot\nu}K_\nu=W_\nu \end{cases}$$

但

$$
(11)\left\{
\begin{aligned}
A_{I\cdot I} &= (\alpha\alpha)+(\alpha a)Z_{I\cdot 1}+(\alpha b)Z_{I\cdot 2}+(\alpha c)Z_{I\cdot 3}+\cdots+(\alpha r)Z_{I\cdot r}\\
A_{I\cdot II} &= (\alpha\beta)+(\alpha a)Z_{II\cdot 1}+(\alpha b)Z_{II\cdot 2}+(\alpha c)Z_{II\cdot 3}+\cdots+(\alpha r)Z_{II\cdot r}\\
A_{I\cdot III} &= (\alpha\gamma)+(\alpha a)Z_{III\cdot 1}+(\alpha b)Z_{III\cdot 2}+(\alpha c)Z_{III\cdot 3}+\cdots+(\alpha r)Z_{III\cdot r}\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\\
A_{I\cdot\nu} &= (\alpha\nu)+(\alpha a)Z_{\nu\cdot 1}+(\alpha b)Z_{\nu\cdot 2}+(\alpha c)Z_{\nu\cdot 3}+\cdots+(\alpha r)Z_{\nu\cdot r}\\
W_{I} &= w_{I}-(\alpha a)K'_1-(\alpha b)K'_2-(\alpha c)K'_3-\cdots-(\alpha r)K'_r\\
A_{II\cdot I} &= (\beta\alpha)+(\beta a)Z_{I\cdot 1}+(\beta b)Z_{I\cdot 2}+(\beta c)Z_{I\cdot 3}+\cdots+(\beta r)Z_{I\cdot r}\\
A_{II\cdot II} &= (\beta\beta)+(\beta a)Z_{II\cdot 1}+(\beta b)Z_{II\cdot 2}+(\beta c)Z_{II\cdot 3}+\cdots+(\beta r)Z_{II\cdot r}\\
A_{II\cdot III} &= (\beta\gamma)+(\beta a)Z_{III\cdot 1}+(\beta b)Z_{III\cdot 2}+(\beta c)Z_{III\cdot 3}+\cdots+(\beta r)Z_{III\cdot r}\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\\
A_{II\cdot\nu} &= (\beta\nu)+(\beta a)Z_{\nu\cdot 1}+(\beta b)Z_{\nu\cdot 2}+(\beta c)Z_{\nu\cdot 3}+\cdots+(\beta r)Z_{\nu\cdot r}\\
W_{II} &= w_{II}-(\beta a)K'_1-(\beta b)K'_2-(\beta c)K'_3-\cdots-(\beta r)K'_r\\
&\text{餘　類　推}\\
A_{\nu\cdot I} &= (\nu\alpha)+(\nu a)Z_{I\cdot 1}+(\nu b)Z_{I\cdot 2}+(\nu c)Z_{I\cdot 3}+\cdots+(\nu r)Z_{I\cdot r}\\
A_{\nu\cdot II} &= (\nu\beta)+(\nu a)Z_{II\cdot 1}+(\nu b)Z_{II\cdot 2}+(\nu c)Z_{II\cdot 3}+\cdots+(\nu r)Z_{II\cdot r}\\
A_{\nu\cdot III} &= (\nu\gamma)+(\nu a)Z_{III\cdot 1}+(\nu b)Z_{III\cdot 2}+(\nu c)Z_{III\cdot 3}+\cdots+(\nu r)Z_{III\cdot r}\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\\
A_{\nu\cdot\nu} &= (\nu\nu)+(\nu a)Z_{\nu\cdot 1}+(\nu b)Z+(\nu c)Z_{\nu\cdot 3}+\cdots+(\nu r)Z_{\nu\cdot r}\\
W_{\nu} &= w_{\nu}-(\nu a)K'_1-(\nu b)K'_2-(\nu c)K'_3-\cdots-(\nu r)K'_r
\end{aligned}
\right.
$$

Prof L. Krüger 在其所著 Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen (F. Nr. 18) 書内 S.7 亦載有与(11)式相同之方程式.

方程式(10)自然与一切法方程式相同，有對稱之性質，在(11)式中未明白表示此種性質，若欲加以証明，只須將(8)式代入(11)式即可．此項對稱性不僅可利用以使工作節省

(Arbeitsersparnis) 並可為計算介關屬值，以及計算法方程式 (11) 式之係數時供檢点 (Kontrolle) 之用.

(11) 式內之 W_S ($S = I, II, \cdots, \nu$) 各式，若以 K_i ($i = 1, 2, \cdots r$) 之展開式 (6) 代入，則得

$$
(11a)\left\{
\begin{aligned}
W_I &= w_I - (\alpha a) f_{1\cdot1} w_1 - (\alpha a) f_{1\cdot2} w_2 - \cdots - (\alpha a) f_{1\cdot r} w_r \\
&\quad - (\alpha b) f_{2\cdot1} w_1 - (\alpha b) f_{2\cdot2} w_2 - \cdots - (\alpha b) f_{2\cdot r} w_r \\
&\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdot \\
&\quad - (\alpha r) f_{r\cdot1} w_1 - (\alpha r) f_{r\cdot2} w_2 - \cdots - (\alpha r) f_{r\cdot r} w_r \\
&= w_I + Z_{I\cdot1} w_1 + Z_{I\cdot2} w_2 + \cdots + Z_{I\cdot r} w_r \\
W_{II} &= w_{II} - (\beta a) f_{1\cdot1} w_1 - (\beta a) f_{1\cdot2} w_2 - \cdots - (\beta a) f_{1\cdot r} w_r \\
&\quad - (\beta b) f_{2\cdot1} w_1 - (\beta b) f_{2\cdot2} w_2 - \cdots - (\beta b) f_{2\cdot r} w_r \\
&\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdot \\
&\quad - (\beta r) f_{r\cdot1} w_1 - (\beta r) f_{r\cdot2} w_2 - \cdots - (\beta r) f_{r\cdot r} w_r \\
&= w_{II} + Z_{II\cdot1} w_1 + Z_{II\cdot2} w_2 + \cdots + Z_{II\cdot r} w_r \\
&\qquad\qquad \text{餘 類 推} \\
W_\nu &= w_\nu - (\nu a) f_{1\cdot1} w_1 - (\nu a) f_{1\cdot2} w_2 - \cdots - (\nu a) f_{1\cdot r} w_r \\
&\quad - (\nu b) f_{2\cdot1} w_1 - (\nu b) f_{2\cdot2} w_2 - \cdots - (\nu b) f_{2\cdot r} w_r \\
&\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdot \\
&\quad - (\nu r) f_{r\cdot1} w_1 - (\nu r) f_{r\cdot2} w_2 - \cdots - (\nu r) f_{r\cdot r} w_r \\
&= w_\nu + Z_{\nu\cdot1} w_1 + Z_{\nu\cdot2} w_2 + \cdots + Z_{\nu\cdot r} w_r
\end{aligned}
\right.
$$

由 (11a) 式及 (9) 式觀之可知 W_I 展開式內 w_i 之係數与 (9) 式內垂直行 K_I 之係數相同，W_{II} 展開式內 w_i 之係數与 (9) 式垂直行 K_{II} 之係數相同，同樣 W_ν 展開式內 w_i 之係數与 (9) 式內垂直行 K_ν 之係數相同.

以上所述，其理論的結果与 L. Krüger 証明之結果毫無差異，僅其設計在使与實用的計算進行 (Rechuungsgang) 多所適合耳，若假設依關屬值展開式 (6) 以計算第一組係件方程式

之平均，則雖就 L. Krüger 書中 §3. 所載之數字例題亦可表明其計算進行；並可成就分為兩組平均之法，H. Boltz 將 L. Krüger 之「兩組法」加以補充，即反復應用「兩組法」以成展開法 {見 Boltz 所著之 Entwicklungs Verfahren (F. Nr. 90)}，其主要之目的，因「兩組法」只限制兩組平均，故設法打破此種限制，而可任意擴大平均之範圍也。

若將 (10) 式答解之，以得 K_s $(S=I, II, \cdots V)$ 之值，代入 (9) 式，以得兩組共同平均之關屬值，再由 (2a) 式以得兩組共同平均之方向改正數，然如此解答 (10) 式，只求 K_s 之值，而不求 K_s 關于閉塞差 $w_1, w_2, \cdots w_r, w_I, w_{II}, \cdots w_V$ 之展開式，則以後若再有另一組條件方程式，亦欲共同平均，便無從加入矣，故 H. Boltz 將 L. Krüger 之「兩組法」加以擴充，即答解 (10) 式，不僅求 K_s $(S=I, II, \cdots V)$ 之值，而仍依不定答解法求 K_s 之展開式，此 Boltz 所以取名為「展開法」也。

為達此目的，只須反覆應用 L. Krüger 之法，當答解 (10) 式時，視 W_s $(S=I, II, \cdots V)$ 為未定數，依 Gauss 約化法答解之，即得

$$(12)\quad \begin{cases} K_I = F_{I\cdot I} W_I + F_{I\cdot II} W_{II} + \cdots + F_{I\cdot V} W_V \\ K_{II} = F_{II\cdot I} W_I + F_{II\cdot II} W_{II} + \cdots + F_{II\cdot V} W_V \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \\ K_V = F_{V\cdot I} W_I + F_{V\cdot II} W_{II} + \cdots + F_{V\cdot V} W_V \end{cases}$$

為能將此式展開為原來之閉塞差 $w_1, w_2, \cdots w_r, w_I, w_{II} \cdots w_V$ 之展開式，可將 (6) 式 K_i $(i=1,2,\cdots r)$ 代入 (11) 式 W_s $(S=I, II, \cdots V)$ 則得

$$(13)\quad \begin{cases} W_I = w_I + Z_{I\cdot 1} w_1 + Z_{I\cdot 2} w_2 + \cdots + Z_{I\cdot r} w_r \\ W_{II} = w_{II} + Z_{II\cdot 1} w_1 + Z_{II\cdot 2} w_2 + \cdots + Z_{II\cdot r} w_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vdots \\ W_\nu = w_\nu + Z_{\nu 1} w_1 + Z_{\nu 2} w_2 + \cdots + Z_{\nu r} w_r \end{cases}$$

将此式代入(12)式即得

$$(14)\begin{cases} K_I = \varphi_{I\cdot 1} w_1 + \varphi_{I\cdot 2} w_2 + \cdots + \varphi_{I\cdot r} w_r + F_{I\cdot I} w_I + F_{I\cdot II} w_{II} + \cdots + F_{I\cdot\nu} w_\nu \\ K_{II} = \varphi_{II\cdot 1} w_1 + \varphi_{II\cdot 2} w_2 + \cdots + \varphi_{II\cdot r} w_r + F_{II\cdot I} w_I + F_{II\cdot II} w_{II} + \cdots + F_{II\cdot\nu} w_\nu \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \\ K_\nu = \varphi_{\nu\cdot 1} w_1 + \varphi_{\nu\cdot 2} w_2 + \cdots + \varphi_{\nu\cdot r} w_r + F_{\nu\cdot I} w_I + F_{\nu\cdot II} w_{II} + \cdots + F_{\nu\nu} w_\nu \end{cases}$$

但

$$(15)\begin{cases} \varphi_{I\cdot 1} = F_{I\cdot I} Z_{I\cdot 1} + F_{I\cdot II} Z_{II\cdot 1} + \cdots + F_{I\cdot\nu} Z_{\nu\cdot 1} \\ \varphi_{I\cdot 2} = F_{I\cdot I} Z_{I\cdot 2} + F_{I\cdot II} Z_{II\cdot 2} + \cdots + F_{I\cdot\nu} Z_{\nu\cdot 2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \varphi_{I\cdot r} = F_{I\cdot I} Z_{I\cdot r} + F_{I\cdot II} Z_{II\cdot r} + \cdots + F_{I\cdot\nu} Z_{\nu\cdot r} \\ \varphi_{II\cdot 1} = F_{II\cdot I} Z_{I\cdot 1} + F_{II\cdot II} Z_{II\cdot 1} + \cdots + F_{II\cdot\nu} Z_{\nu\cdot 1} \\ \varphi_{II\cdot 2} = F_{II\cdot I} Z_{I\cdot 2} + F_{II\cdot II} Z_{II\cdot 2} + \cdots + F_{II\cdot\nu} Z_{\nu\cdot 2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \varphi_{II\cdot r} = F_{II\cdot I} Z_{I\cdot r} + F_{II\cdot II} Z_{II\cdot r} + \cdots + F_{II\cdot\nu} Z_{\nu\cdot r} \\ \text{餘類推} \\ \varphi_{\nu\cdot 1} = F_{\nu\cdot I} Z_{I\cdot 1} + F_{\nu\cdot II} Z_{II\cdot 1} + \cdots + F_{\nu\nu} Z_{\nu\cdot 1} \\ \varphi_{\nu\cdot 2} = F_{\nu\cdot I} Z_{I\cdot 2} + F_{\nu\cdot II} Z_{II\cdot 2} + \cdots + F_{\nu\nu} Z_{\nu\cdot 2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \varphi_{\nu\cdot r} = F_{\nu\cdot I} Z_{I\cdot r} + F_{\nu\cdot II} Z_{II\cdot r} + \cdots + F_{\nu\nu} Z_{\nu\cdot r} \end{cases}$$

方程式(14)即為$K_s(S=I,II,\cdots\nu)$与第一組閉塞差$w_1,w_2,\cdots w_r$並与第二組閉塞差$w_I,w_{II},\cdots w_\nu$之完全關係式．現在還欲将第一組之關屬值亦表為与(14)相應之形式；為達此目的，我們将$K_i(i=1,2,\cdots r)$之展開式(6)及$K_s(S=I,II,\cdots\nu)$之展開式(3)代入(9)式即得：

$$
(16)\begin{cases}
K_1=\varphi_{1\cdot 1}w_1+\varphi_{1\cdot 2}w_2+\cdots+\varphi_{1\cdot r}w_r+\varphi_{1\cdot I}w_I+\varphi_{1\cdot II}w_{II}+\cdots+\varphi_{1\cdot \nu}w_\nu\\
K_2=\varphi_{2\cdot 1}w_1+\varphi_{2\cdot 2}w_2+\cdots+\varphi_{2\cdot r}w_r+\varphi_{2\cdot I}w_I+\varphi_{2\cdot II}w_{II}+\cdots+\varphi_{2\cdot \nu}w_\nu\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\\
K_r=\varphi_{r\cdot 1}w_1+\varphi_{r\cdot 2}w_2+\cdots+\varphi_{r\cdot r}w_r+\varphi_{r\cdot I}w_I+\varphi_{r\cdot II}w_{II}+\cdots+\varphi_{r\cdot \nu}w_\nu
\end{cases}
$$

但

$$
(17)\begin{cases}
\varphi_{1\cdot 1}=f_{1\cdot 1}+Z_{I\cdot 1}\varphi_{I\cdot 1}+Z_{II\cdot 1}\varphi_{II\cdot 1}+\cdots+Z_{\nu\cdot 1}\varphi_{\nu\cdot 1}\\
\varphi_{1\cdot 2}=f_{1\cdot 2}+Z_{I\cdot 1}\varphi_{I\cdot 2}+Z_{II\cdot 1}\varphi_{II\cdot 2}+\cdots+Z_{\nu\cdot 1}\varphi_{\nu\cdot 2}\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\\
\varphi_{1\cdot r}=f_{1\cdot r}+Z_{I\cdot 1}\varphi_{I\cdot r}+Z_{II\cdot 1}\varphi_{II\cdot r}+\cdots+Z_{\nu\cdot 1}\varphi_{\nu\cdot r}\\
\varphi_{2\cdot 1}=f_{2\cdot 1}+Z_{I\cdot 2}\varphi_{I\cdot 1}+Z_{II\cdot 2}\varphi_{II\cdot 1}+\cdots+Z_{\nu\cdot 2}\varphi_{\nu\cdot 1}\\
\varphi_{2\cdot 2}=f_{2\cdot 2}+Z_{I\cdot 2}\varphi_{I\cdot 2}+Z_{II\cdot 2}\varphi_{II\cdot 2}+\cdots+Z_{\nu\cdot 2}\varphi_{\nu\cdot 2}\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\\
\varphi_{2\cdot r}=f_{2\cdot r}+Z_{I\cdot 2}\varphi_{I\cdot r}+Z_{II\cdot 2}\varphi_{II\cdot r}+\cdots+Z_{\nu\cdot 2}\varphi_{\nu\cdot r}\\
\text{餘　類　推}\\
\varphi_{r\cdot 1}=f_{r\cdot 1}+Z_{I\cdot r}\varphi_{I\cdot 1}+Z_{II\cdot r}\varphi_{II\cdot 1}+\cdots+Z_{\nu\cdot r}\varphi_{\nu\cdot 1}\\
\varphi_{r\cdot 2}=f_{r\cdot 2}+Z_{I\cdot r}\varphi_{I\cdot 2}+Z_{II\cdot r}\varphi_{II\cdot 2}+\cdots+Z_{\nu\cdot r}\varphi_{\nu\cdot 2}\\
\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdots\qquad\cdot\\
\varphi_{r\cdot r}=f_{r\cdot r}+Z_{I\cdot r}\varphi_{I\cdot r}+Z_{II\cdot r}\varphi_{II\cdot r}+\cdots+Z_{\nu\cdot r}\varphi_{\nu\cdot r}
\end{cases}
$$

由(14)及(16)两式，即可得两組之關屬值，而与(5)式之形式相當，且(14)(16)两式之結果，亦即与連合(3)(4)两式為一組，平均之結果相同矣；由是我們又可将另外之新條件方程式，視為特別之一組，而再度施行「两組法」，而處置此特別之一組之法与第一次施行「两組法」時，處置原來之第二組條件方程式之法同．如此逐步将第二組牽入第一組隨時得其鎔為一氣之平均，其主要結果，不僅如Gauss約化法之專求關屬值之數值，，並視閉塞差為不定值，以得關屬值之展開

式，然後以閉塞差之數值代入展開式以得關屬值之數值．

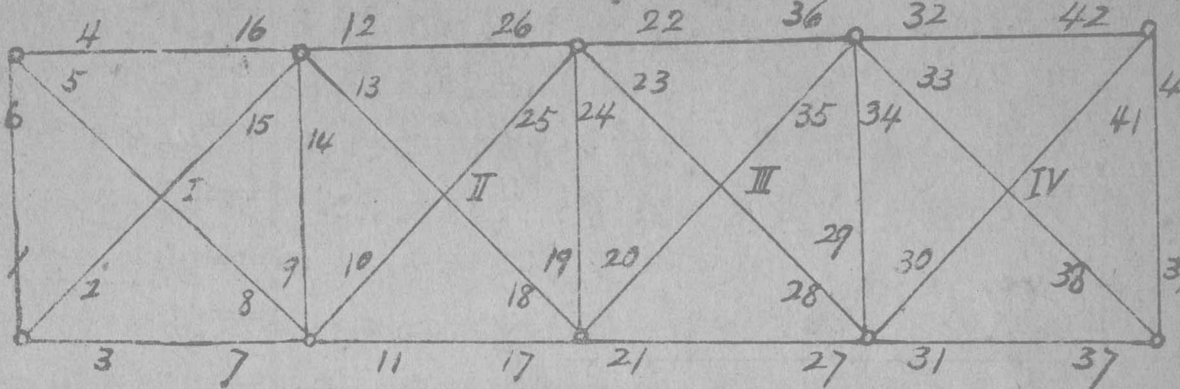
反復Gauss-Krüger的兩組法(Die Gauss-Krüger sche Zweigruppen-Methode)，或展開法(Entwickungsverfahren)較Gauss之約化法(Algoritmus)為佳而有甚多優点，且此優点，在大三角測量(Grosstriangulationen)時有特大之重要性者也．

在Gauss約化法答解一法方程式系之時，僅能分為部分系(Teilsystem)，而将單獨各部分平均(Teilausgleichungen)依新的强制條件(Zwangsbedingungen)以使之互相結合耳．反之在「展開法」則將現有法方程式系分為任意多之組(Gruppen)而依計算使順次互相聯合，而使其結果相當于一瀉注成(in einem guss)之精密平均之結果；換言之，展開法較Gauss約化法可應用于較大之平均範圍(Der Ausgleickungsbereich)且在「展開法」對于閉塞差之計算所生之誤差，較Gauss約化法所生之誤差少得多，盖一閉塞差因計算取捨所發生之变動，在關屬值展開式是容易改正者，在Gauss約化法，欲改正如此之誤差，若不隨即完全将平均計算重行再算，則將成為廣大之新計算也．

§2. 平均一律由四邊形有二對角線所成之大三角鎖之角方程式平均後關屬值展開式之形式．

今暫設三角鎖為一律由四個四邊形有二對角綫者所成，且各四邊形為互不掩蓋者，其觀測方向之順序如下第一圖所示．依Jordan之Handbuch für Vermessungs~~wesen~~kunde，I. B. 7. A. S. 290之法；其角方程式不採用三角方程式，而採用四角形及扭四角形之四角方程式：

Fig 1.



每一四邊形内之三個角方程式，今規定其次序，首先為四角形□之角方程式，其次為扭四角形⧗之角方程式，最後為扭四角形⋈之角方程式，並就其全鎖十二個角方程式之閉合差，順次命之為$w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{12}$，得角方程式如次表：

角方程式表

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}
-1		+1	-1		+1	-1		+1					-1		+1								
	-1	+1	+1	-1		-1	+1							+1	-1								
-1	+1			-1	+1		+1	-1					+1	-1									
								-1		+1	-1		+1			-1		+1					-1
									-1	+1	+1	-1				-1	+1						
								-1	+1			-1	+1				+1	-1					+1
																		-1		+1	-1		+1
																			-1	+1	+1	-1	
																		-1	+1			-1	+1