陆云光　成志新　编著

双曲守恒律和补偿列紧方法

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了补偿列紧方法在单个守恒律方程和一些双曲守恒律系统中的应用. 主要内容包括: 单个守恒律方程的 L^∞ 解或 L^p 解; 二次流系统、Le Roux 系统、等熵气体动力学系统、一维欧拉方程组和弹性力学系统等双曲守恒律系统的 L^∞ 解, 以及弹性力学系统的 L^p 解; 双曲守恒律系统的零松弛现象.

本书可供理工科大学数学、应用数学和其他相关专业的高年级本科生、研究生、教师以及相关的科学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

双曲守恒律和补偿列紧方法/陆云光, 成志新编著. —北京: 科学出版社, 2011

ISBN 978-7-03-032590-7

Ⅰ.①双… Ⅱ.①陆… ②成… Ⅲ.①补偿法-应用-双曲型方程: 守恒方程-研究 Ⅳ.①O175.27 ②O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 214433 号

责任编辑: 牛宇锋 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 赵 博 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 12 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2011 年 12 月第一次印刷 印张: 13 1/2

字数: 262 000

定价: 50.00 元

前　言

本书是围绕作者多年来的研究工作写成的，大部分内容取材于作者发表的论文. 为了保持本书的系统性，某些章节也介绍了国内外核心期刊发表的他人工作.

双曲守恒律是偏微分方程研究领域的一个主要分支. 大量问题来自于物理、化学、生物、力学等中的自然现象，因而对双曲守恒律的研究具有非常强的应用背景和理论价值.

本书共分 16 章，介绍了补偿列紧方法在单个守恒律方程和一些双曲守恒律系统中的应用. 主要内容包括：单个守恒律方程的 L^∞ 或 L^p 解的存在性；二次流系统、Le Roux 系统、等熵气体动力学系统、一维欧拉方程组和弹性力学系统等非线性双曲守恒律系统的 L^∞ 解的存在性，以及弹性力学系统的 L^p 解的存在性；双曲守恒律系统的零松弛现象.

本书除少数几章外，章末都有评注，介绍正文未涉及的问题或有关问题的最新成果和方法，以及正文内容的出处、历史与现状.

在写作过程中，杭州师范大学理学院的领导一直给予支持与帮助，第二作者所在单位盐城师范学院的领导也一直给予支持与帮助，在此深表谢意.

此外，本书的出版得到杭州师范大学海外人才引进基金、浙江省千人计划项目的资助，也得到科学出版社的大力支持. 谨此致谢.

限于作者水平，书中难免存在不足及疏漏之处，恳请读者批评指正.

陆云光
杭州师范大学
成志新
盐城师范学院
2011 年 9 月 2 日

目　　录

第 1 章　绪　　论

双曲守恒律系统是非常重要的数学模型，可以用来描述许多出现于交通流、流体力学、弹性力学、气体动力学和流体动力学等中的物理现象. 一般来说，即使初值小且光滑，非线性双曲守恒律系统的柯西问题也不存在全局古典解，这意味着解通常会在某个有限时刻出现间断，即产生激波. 因为解不连续而不能在古典意义下满足方程组，所以我们必须研究它的广义解，即在分布意义下满足方程组的函数.

考虑具有下述形式的拟线性偏微分方程组：

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{0}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \tag{1.0.1}$$

其中, 向量函数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))^{\mathrm{T}}$ 中的每个分量表示守恒物理量的密度；$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = (f_1(\boldsymbol{u}), \cdots, f_n(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ 为流函数. 通常这些方程组称为双曲守恒律. 假设 $\boldsymbol{u}$ 是系统 (1.0.1) 带可测初值

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) \tag{1.0.2}$$

的柯西问题的古典解, 则用试验函数 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 乘方程组 (1.0.1) 并在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上分部积分得

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\boldsymbol{u}\phi_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\phi_x] \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{u}_0 \phi \mathrm{d}x = \boldsymbol{0}. \tag{1.0.3}$$

定义 1.0.1　称函数 $\boldsymbol{u}(x,t) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ $(1 < p \leqslant \infty)$ 为柯西问题 (1.0.1)–(1.0.2) $(\boldsymbol{u}_0(x) \in L^p(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n))$ 的弱解，如果等式 (1.0.3) 对任意的试验函数 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 成立.

解的存在性问题是非线性双曲守恒律系统理论中的一个重要方面. 它有助于检验建立的数学模型是否合理, 问题是否适定等. 为了得到所给双曲守恒律的弱解或广义解, 一个标准的方法是在方程组 (1.0.1) 的右边加上小的抛物扰动项 $\varepsilon \boldsymbol{u}_{xx}$, 然后考虑

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \varepsilon \boldsymbol{u}_{xx}, \tag{1.0.4}$$

其中, $\varepsilon > 0$ 是常数, 称为黏性参数. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 可由下述关于一般拟线性抛物型方程组解的存在性及其性质的定理得到柯西问题 (1.0.4)–(1.0.2) 的解.

定理 1.0.1 (1) 设初值 $\boldsymbol{u}_0(x)$ 有界可测, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 柯西问题 (1.0.4)-(1.0.2) 存在唯一的局部光滑解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\tau); \mathbb{R}^n)$, 其中 $\tau > 0$ 只与初值的 L^∞ 范数有关.

(2) 若解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 有先验 L^∞ 估计 $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} \leqslant M(\varepsilon,T)$, 则解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 在 $\mathbb{R} \times [0,T]$ 上存在唯一.

(3) 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, 且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} \boldsymbol{u}_0(x) = \boldsymbol{0}$, 则解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 满足

$$\lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t) = \boldsymbol{0} \text{ 对 } t \in [0,T] \text{ 一致成立}. \tag{1.0.5}$$

(4) 进一步, 若系统 (1.0.2) 中的某个方程具有如下形式:

$$w_t + (wg(\boldsymbol{u}))_x = \varepsilon w_{xx}, \tag{1.0.6}$$

其中, 函数 $g(\boldsymbol{u}) \in C(\mathbb{R}^n)$, 则

$$w^\varepsilon(x,t) \geqslant c(t,\varepsilon,\delta) > 0, \quad \text{如果 } w_0(x) \geqslant \delta > 0. \tag{1.0.7}$$

其中, δ 为正常数, 函数 $c(t,\varepsilon,\delta)$ 可能在时间 t 趋于无穷或 ε 趋于零时趋于零.

证明 (1) 首先运用 Green 核 $G^\varepsilon(x-y,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \exp\left\{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}\right\}$ 把柯西问题 (1.0.4)-(1.0.2) 写成与其等价的积分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(x,t) = &\int_{-\infty}^{\infty} G^\varepsilon(x-y,t)\boldsymbol{u}_0(y)\mathrm{d}y \\ &+ \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(y,s)) \frac{\partial G^\varepsilon(x-y,t-s)}{\partial y}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

然后由压缩映像原理即可证得解的局部存在性.

(2) 若解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 有先验 L^∞ 估计 $\|\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} \leqslant M(\varepsilon,T)$, 则由结论 (1), 步长时间 τ 只与 $M(\varepsilon,T)$ 有关, 所以解 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)$ 可逐步延拓到整个 $[0,T]$ 上.

(3) 由得到局部解的过程不难看出解的性质 (1.0.5).

结论 (1)~(3) 的详细证明请读者参阅专著 [1, 2]. 下面是由 Bereux 和 Sainsaulieu 对 (1.0.7) 给出的证明, 请参阅文献 [3, 4].

(4) 令 $v = \ln w$, 则可把方程 (1.0.6) 写成如下形式:

$$v_t + g(\boldsymbol{u})v_x + g(\boldsymbol{u})_x = \varepsilon(v_{xx} + v_x^2),$$

即

$$v_t = \varepsilon v_{xx} + \varepsilon\left(v_x - \frac{g(\boldsymbol{u})}{2\varepsilon}\right)^2 - g(\boldsymbol{u})_x - \frac{g^2(\boldsymbol{u})}{4\varepsilon}. \tag{1.0.8}$$

方程 (1.0.8) 带初值 $v_0(x) = \ln w_0(x)$ 的解可表示为

$$
\begin{aligned}
v(x,t) = & \int_{-\infty}^{\infty} G^\varepsilon(x-y,t)v_0(y)\mathrm{d}y \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varepsilon \left(v_x - \frac{g(\boldsymbol{u})}{2\varepsilon} \right)^2 - \frac{g^2(\boldsymbol{u})}{4\varepsilon} - g(\boldsymbol{u})_x \right) G^\varepsilon(x-y,t-s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\int_{-\infty}^{\infty} G^\varepsilon(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial G^\varepsilon(x-y,t-s)}{\partial y} \right| \mathrm{d}y\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon t}} \quad (t > 0),
$$

所以

$$
\begin{aligned}
v \geqslant & \ln\delta + \int_0^t \mathrm{d}s \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{u}(y,s)) \frac{\partial G^\varepsilon(x-y,t-s)}{\partial y} \\
& - \frac{g^2(\boldsymbol{u}(y,s))}{4\varepsilon} G^\varepsilon(x-y,t-s)\mathrm{d}y \\
\geqslant & \ln\delta - C_1\sqrt{\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{C_2}{\varepsilon}t - C_3 t = -C(t,\varepsilon,\delta) > -\infty.
\end{aligned}
$$

这表明 $w^\varepsilon(x,t)$ 有一个正下界 $c(t,\varepsilon,\delta)$, 即 (1.0.7) 获证. 证毕. □

定理 1.0.1 中得到的解称为黏性解. 若已经得到一列黏性解 $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$, 并且 $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ 在 $L^p(1 < p \leqslant \infty)$ 中关于 ε 一致有界, 则存在其子列 $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ 使得

$$
\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t) \rightharpoonup (\text{或} \overset{*}{\rightharpoonup}) \ \boldsymbol{u}(x,t) \ (\varepsilon \to 0);
$$

而且存在子列 $\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\}$ 使得

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^\varepsilon(x,t)) \rightharpoonup (\text{或} \overset{*}{\rightharpoonup}) \ \boldsymbol{l}(x,t) \ (\varepsilon \to 0),
$$

如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 满足适当的增长性条件. 今后除非特别说明, 无论怎样选取 $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ 的子列, 仍把它记为 $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$. 若

$$
\boldsymbol{l}(x,t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x,t)), \quad \text{a.e. } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \tag{1.0.9}
$$

则在 (1.0.4) 中令 $\varepsilon \to 0$, 即知 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 是柯西问题 (1.0.1)-(1.0.2) 的一个弱解. 可如何得到非线性流函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 关于黏性解序列 $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ 的弱连续性 (1.0.9) 呢? 这就要借助于补偿列紧理论.

为何这个理论称为 “补偿列紧”? 粗略地说, 这个术语源于下面的事实:

若一列函数 $\{w^\varepsilon(x,t)\}$ 满足

$$
w^\varepsilon(x,t) \rightharpoonup w(x,t) \tag{1.0.10}
$$

且

$$(w^\varepsilon)^2 + (w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2 + w^3 \text{ 或者 } (w^\varepsilon)^2 - (w^\varepsilon)^3 \rightharpoonup w^2 - w^3, \tag{1.0.11}$$

则一般来说, $w^\varepsilon(x,t)$ 非紧; 但若 (1.0.11) 中的任一弱紧用来 "补偿" 另一弱紧就会得到 $w^\varepsilon(x,t)$ 的紧性. 事实上, 把它们相加就有 $(w^\varepsilon)^2 \rightharpoonup w^2$, 这与 (1.0.10) 相结合就蕴涵着 w^ε 的紧性.

本书主要介绍补偿列紧方法在单个守恒律方程和一些由两个或三个方程组成的特殊系统中的应用, 也讨论了补偿列紧方法在一些带松弛扰动的物理学系统中的应用. 本书其余章节的内容安排如下:

第 2 章介绍补偿列紧理论中的几个重要定理, 如 Young 测度表示定理、二阶行列式的弱连续性定理以及紧嵌入定理等.

第 3 章讨论标量方程带 L^∞ 初值和 L^p 初值的柯西问题, 并且对标量方程 L^∞ 解和 L^p 解的存在性给出一个没有应用 Young 测度的简化证明.

第 4 章有两部分. 第一部分介绍与 2×2 双曲守恒律系统相关的一些基本概念, 如严格双曲、真正非线性、线性退化、黎曼不变量以及熵-熵流等; 第二部分介绍得到黏性解的 L^∞ 估计的一个框架, 即不变域理论.

第 5 章研究一个特殊的对称双曲系统. 该系统与标量方程非常相似, 因为它的一个特征场总是线性退化, 尽管另外一个特征场真正非线性. 这个系统非常有趣, 因为沿着真正非线性的特征场不需要任何正则性条件就可得到黏性解序列在 L^∞ 空间中的紧性, 但沿着线性退化的特征场必须加上一些正则性条件 (如有界变差估计) 以确保黏性解序列的紧性.

第 6 章研究一个特殊的二次流系统. 该系统在原点非严格双曲, 两个特征场分别在 u 的正、负半轴上线性退化, 其熵方程和绝热指数 $\gamma = 2$ 时的多方气体动力学系统的熵方程相同. 用补偿列紧方法研究这个系统的主要困难是熵-熵流在原点奇异. 通过对经典 Fuchsian 方程的解及其性质的分析, 显式地构造了二次流系统的四族 Lax 型熵-熵流, 并且得到了关于这些熵的必要估计.

第 7 章利用第 6 章给出的方法研究 Le Roux 系统, 它也在原点非严格双曲, 但熵方程和绝热指数 $\gamma = 5/3$ 时的多方气体动力学系统的熵方程相同. 这个系统是典型的 Temple 型系统, 其两个特征场都是直线.

第 8 章有六部分, 研究最具代表性的双曲守恒律系统即所谓的等熵气体动力学系统. 第一部分至第三部分讨论 $\gamma > 1$ 时的多方气体动力学系统的 L^∞ 熵解; 第四部分利用前面建立的框架研究推广的河流系统; 第五部分借助解析开拓理论结合补偿列紧方法证明等温气体动力学系统广义解的存在性; 第六部分对一般的等熵气体动力学系统作了一些研究.

第 9 章有三部分. 第一、二部分利用第 6、7 章中的方法研究两个特殊的一

维欧拉方程组. 就光滑解而言, 它们分别等价于多方气体动力学系统 $\gamma > 3$ 和 $\gamma = \infty$ 的情形. 第三部分应用补偿列紧方法和动力学公式相结合的思想得到一个经典的欧拉方程组的 L^∞ 熵解. 该方程组与多方气体动力学系统有着相同的熵-熵流.

第 10 章讨论一般的一维可压缩流体流的欧拉方程组. 这个更为一般的系统在真空直线 $\rho = 0$ 上非严格双曲. 应用补偿列紧方法处理这个系统的一个主要困难就是如何构造熵-熵流并且得到关于这些熵的必要估计. 因为文献 [5] 中构造严格双曲系统的 Lax 型熵-熵流的方法在这里失效, 所以该章介绍具有特殊形式的 Lax 熵, 并利用二阶常微分方程的奇异扰动理论成功地得到关于这些熵的必要估计, 然后用 DiPerna 方法来研究这个非严格双曲系统.

第 11 章运用第 10 章中的方法讨论一般弹性力学系统的 L^∞ 熵解.

第 12 章介绍关于弹性力学系统的 $L^p(1 < p < \infty)$ 弱解的一些重要结果, 其中包含分别由 Lin 和 Shearer 给出的关于人工黏性解和物理黏性解的紧性框架, 还讨论后一紧性框架在通过多孔介质的绝热气体流系统中的应用. 然而, 为了避免烦琐的数学公式, 本书没有对这两个紧性框架给予证明. 这两个框架非常重要, 是研究第 16 章中由三个方程组成的双曲系统的松弛问题的基础.

第 13~16 章介绍补偿列紧方法在松弛问题中的应用.

第 13 章介绍松弛奇性问题的一般刻画.

第 14 章证明两个关于一般的带刚性松弛和控制扩散的 2×2 非线性守恒律系统之奇异极限的基本定理, 并且讨论了它们在一些重要的非线性双曲守恒律系统中的应用.

第 15 章介绍关于一般 2×2 双曲守恒律系统的刚性松弛极限的一个框架, 并据此研究了一个推广的交通流模型.

第 16 章介绍一个描述化学反应的 3×3 系统的刚性松弛极限, 并讨论了该系统的一个特殊情形以及 $2n \times 2n$ 色谱学双曲系统的纯松弛极限.

第 2 章　补偿列紧理论

补偿列紧理论是一门庞大的学科. 然而, 直到现在, 它在双曲守恒律中的所有应用都与本章给出的定理有关.

2.1　Young 测度表示定理

定理 2.1.1 (Young 测度表示定理)　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为开集, $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^S$ 是一列可测函数, 则存在 $\{\boldsymbol{u}^n(x)\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(x)\}$ 和一族正测度 $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$(a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$) 使得对任意的 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 有

$$\text{w}^*\text{-}\lim f(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda), \tag{2.1.1}$$

其中, 函数空间 $C_0(\mathbb{R}^S) = \{f(s) \in C(\mathbb{R}^S) : \lim\limits_{|s| \to \infty} f(s) = 0\}$; $M(\mathbb{R}^S)$ 为其共轭空间; $\text{w}^*\text{-}\lim$ 表示 L^∞ 空间中的弱 $*$ 极限. 进一步, 若 $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})$ 的值域包含在 $G \subset \mathbb{R}^S$, 则 $\operatorname{supp} \nu_{\boldsymbol{x}} \subset G$; 若 $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})$ 的 L^∞ 范数一致有界或者 G 是 $\mathbb{R}^S$ 中的紧集, 则 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 是概率测度, 即 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的质量为 1.

证明　设 $E = \{f^m\}$ 为 $C_0(\mathbb{R}^S)$ 的一稠密子集, 则 $\{f^1(\boldsymbol{u}^n)\}$ 在 Ω 中有界, 从而存在 $\{\boldsymbol{u}^n\}$ 的一个子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^1}\}$ 及 $\alpha(f^1)(\boldsymbol{x}) \in L^\infty(\Omega)$ 使得

$$\text{w}^*\text{-}\lim f^1(\boldsymbol{u}^{n_k^1}) = \alpha(f^1)(\boldsymbol{x});$$

而且, $\{f^2(\boldsymbol{u}^{n_k^1})\}$ 也在 Ω 中有界, 因而存在 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^1}\}$ 的一个子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^2}\}$ 及 $\alpha(f^2)(\boldsymbol{x}) \in L^\infty(\Omega)$ 使得

$$\text{w}^*\text{-}\lim f^2(\boldsymbol{u}^{n_k^2}) = \alpha(f^2)(\boldsymbol{x}).$$

这个过程一直进行下去, 我们就得到子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k^m}\}$ 及 $\alpha(f^m)(\boldsymbol{x})$ 使得

(1) $\{\boldsymbol{u}^{n_k^1}\} \supset \{\boldsymbol{u}^{n_k^2}\} \supset \cdots \supset \{\boldsymbol{u}^{n_k^m}\} \supset \cdots$, 并且

(2) 对任意给定的 m, $\text{w}^*\text{-}\lim f^m(\boldsymbol{u}^{n_k^m}) = \alpha(f^m)(\boldsymbol{x})$.

抽取对角线子列, 令 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}\} = \{\boldsymbol{u}^{n_k^k}\}$, 则由 (2), 对任意给定的正整数 m 有

$$\text{w}^*\text{-}\lim f^m(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \alpha(f^m)(\boldsymbol{x}). \tag{2.1.2}$$

对每个 $f^m \in E$, 定义 $L^1(\Omega)$ 上的有界泛函 $I(f^m)$ 如下:

$$\langle I(f^m), \psi \rangle = \int_\Omega \psi \alpha(f^m) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \psi f^m(\boldsymbol{u}^{n_k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega).$$

对任一给定的 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$, 存在 $\{f^l\} \subset E$ 使得 $f = \lim\limits_{l \to \infty} f^l$. 现在证明下述极限存在并把之记为 $I(f)$, 即

$$\langle I(f), \psi \rangle = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \psi f(\boldsymbol{u}^{n_k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega). \tag{2.1.3}$$

事实上, 对任意 $\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}, \boldsymbol{u}^{n_{k_2}}$ 有

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \psi [f(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \\
\leqslant & \left| \int_\Omega \psi [f(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}})] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| + \left| \int_\Omega \psi [f(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \\
&+ \left| \int_\Omega \psi [f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \\
\leqslant & 2\|f - f^l\|_{C_0} \|\psi\|_{L^1} + \left| \int_\Omega \psi [f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_1}}) - f^l(\boldsymbol{u}^{n_{k_2}})] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right|.
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

首先选取 l 足够大使得 (2.1.4) 右边的第一项充分小, 而由 (2.1.2), (2.1.4) 右边的第二项也充分小, 只要 n_{k_1} 和 n_{k_2} 足够大. 故对固定的 $\psi \in L^1(\Omega)$, $\left\{ \int_\Omega \psi f(\boldsymbol{u}^{n_k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right\}$ 是柯西列, 即 (2.1.3) 成立. 因此

$$|\langle I(f), \psi \rangle| \leqslant \|f\|_{C_0} \|\psi\|_{L^1}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega). \tag{2.1.5}$$

这说明 $I(f)$ 是 $L^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函, 因而由 Riesz 表示定理, 存在 $\alpha(f)(x) \in L^\infty(\Omega)$ 使得

$$\langle I(f), \psi \rangle = \int_\Omega \alpha(f) \psi \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega). \tag{2.1.6}$$

此外,

$$\begin{aligned}
\alpha(f_1 + f_2) &= \alpha(f_1) + \alpha(f_2), \quad \forall f_i \in C_0(\mathbb{R}^S) \ (i = 1, 2), \\
\alpha(kf) &= k\alpha(f), \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^S), \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

不失一般性, 假设 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 都是函数 $\alpha(f)$ 的勒贝格点, 则对任意给定的 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, 令

$$\psi(x) = (\text{meas}\, B_r(\boldsymbol{x}_0))^{-1} \chi_{B_r(\boldsymbol{x}_0)},$$

其中, $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ 是以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心 r 为半径的球; $\chi_{B_r(\boldsymbol{x}_0)}$ 是 $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ 的特征函数. 于是由 (2.1.5)–(2.1.6), 有

$$\left| (\text{meas}\, B_r(\boldsymbol{x}_0))^{-1} \int_{B_r(\boldsymbol{x}_0)} \alpha(f) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \leqslant \|f\|_{C_0}.$$

令 $r \to 0$ 即得 $|\alpha(f)(\boldsymbol{x}_0)| \leqslant \|f\|_{C_0}$. 又因 $\alpha(f)$ 关于 f 线性, 故 $\alpha(f)(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $C_0(\mathbb{R}^S)$ 上的有界线性泛函. 因此根据 Riesz 表示定理, 存在 $\nu_{\boldsymbol{x}_0} \in M(\mathbb{R}^S)$ 使得

$$\alpha(f)(\boldsymbol{x}_0) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}_0} \rangle = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}_0}.$$

再由 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意性得

$$\langle I(f), \psi \rangle = \int_\Omega \psi \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}} \rangle \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \psi \in L^1(\Omega),$$

其中, $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$ (a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$). 至此等式 (2.1.1) 获得了证明.

注意到对任意正函数 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 有

$$\alpha(f)(\boldsymbol{x}) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}} \rangle \geqslant 0 \quad (\text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega),$$

这表明 $\nu_{\boldsymbol{x}}$(a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$) 是正测度.

若 $\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})$ 的值域包含在 $G \subset \mathbb{R}^S$ 中, 可选取 $f \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 满足 $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^S - \{G\}$, 则显然有

$$0 = \text{w}^*\text{-}\lim f(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda),$$

这表明 $\operatorname{supp} \nu \subset G$.

最后, 若 $\boldsymbol{u}^n(x)$ 的 L^∞ 范数一致有界或 G 是 $\mathbb{R}^S$ 中的紧集, 令 $f \equiv 1$, 则由 (2.1.1) 得 $\int_G \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda) = 1$. 所以 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的质量为 1, 即 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 是概率测度. 证毕. □

推论 2.1.1 *如果可测函数列 $\{\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})\}$ 在 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^S)$ $(1 < p < \infty)$ 中一致有界, 那么存在 $\{\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ 和一族正测度 $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$ (a.e. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$) 使得对任意有界可测集 $A \subset \mathbb{R}^N$ 有*

$$\text{w-}\lim f(\boldsymbol{u}^{n_k}) = \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^S} f(\lambda) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda), \tag{2.1.7}$$

其中, w-lim 表示 $L^1(A)$ 中的弱极限, 函数 $f \in C(\mathbb{R}^S)$ 满足

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{f(\lambda)}{|\lambda|^p} = 0. \tag{2.1.8}$$

证明 不失一般性设 $f \geqslant 0$. 令 $f^m = \theta^m f \in C_0(\mathbb{R}^S)$, 其中 $\theta^m \in C_0(\mathbb{R}^S)$ 定义如下:

$$\theta^m(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leqslant m, \\ 1 + m - |\lambda|, & m \leqslant |\lambda| \leqslant m+1, \\ 0, & |\lambda| \geqslant m+1. \end{cases}$$

因为对任意 $\phi \in L^\infty(A)$ 有

$$\left|\int_A \phi[f^m(\boldsymbol{u}^n) - f(\boldsymbol{u}^n)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \|\phi\|_{L^\infty(A)} \int_{\{\boldsymbol{x}\in A:|\boldsymbol{u}^n|\geqslant m\}} f(\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$\leqslant \|\phi\|_{L^\infty(A)} \|\boldsymbol{u}^n\|^p_{L^p(A)} \max_{|\lambda|\geqslant m} \frac{f(\lambda)}{|\lambda|^p},$$

所以由式 (2.1.8) 知

$$\lim_{m\to\infty} \int_A \phi f^m(\boldsymbol{u}^n)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A \phi f(\boldsymbol{u}^n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \phi \in L^\infty(A) \tag{2.1.9}$$

关于 n 一致成立.

另一方面, 根据定理 2.1.1, 存在 $\{\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ 和一族正测度 $\nu_{\boldsymbol{x}} \in M(\mathbb{R}^S)$ 使得对任何 $m \in \mathbb{N}$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_A \phi f^m(\boldsymbol{u}^{n_k})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A \phi\langle f^m(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \forall \phi \in L^\infty(A). \tag{2.1.10}$$

又由 Levi 单调收敛定理得

$$\lim_{m\to\infty} \int_A \phi\langle f^m(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_A \phi\langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.1.11}$$

结合式 (2.1.9)~(2.1.11) 即得等式 (2.1.7). 证毕. □

定理 2.1.2 *若对几乎所有的 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ 有推论 2.1.1 中 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的支集是独点集, 则存在子列 $\{\boldsymbol{u}^{\varepsilon_k}\}$ 在 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 中强收敛于 $\boldsymbol{u}$; 并且, $\nu_{\boldsymbol{x}} = \delta_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$.*

证明 因为 $\nu_{\boldsymbol{x}}$ 的支集只含一个点, 所以存在函数 $v(\boldsymbol{x})$ 使 $\nu_{\boldsymbol{x}} = \delta_{v(\boldsymbol{x})}$ (a.e. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$). 由于 $1 < p < \infty$, 因而可以在推论 2.1.1 中依次令 $f(\lambda) = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, S$ 得到

$$u_i^{n_k} = f(\boldsymbol{u}^{n_k}) \rightharpoonup \langle f(\lambda), \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle = \langle \lambda_i, \nu_{\boldsymbol{x}}\rangle = v_i.$$

由弱极限的唯一性,$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

对 $1 < q < p$ 定义 $f_i(\lambda) = |\lambda_i|^q$, $i = 1, 2, \cdots, S$, 则由推论 2.1.1, 对任意紧集 $K \subset \mathbb{R}^N$ 有

$$\int_K |u_i^{n_k}|^q \mathrm{d}\boldsymbol{x} \to \int_K \int_{\mathbb{R}^S} f_i(\lambda)\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{x}}(\lambda)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
$$= \int_K |u_i^{n_k}|^q \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

这说明 $\|\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\|_{L^q(K)} \to \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\|_{L^q(K)}$. 因为 $L^q(K)$ $(q > 1)$ 是一致凸的 Banach 空间, 所以由 Radon 定理, $\{\boldsymbol{u}^{n_k}(\boldsymbol{x})\}$ 在 $L^q(K)$ $(1 \leqslant q < p)$ 中强收敛. 故由 K 的任意性, $\{\boldsymbol{u}^{n_k}\}$ 在 $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)(1 \leqslant q < p)$ 中强收敛于 $\boldsymbol{u}$. □

注意到 $L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, 我们易得下述推论.

推论 2.1.2　若定理 2.1.1 中 $\{u^n(x)\}$ 的 L^∞ 范数一致有界且 ν_x 的支集只含一个点, 则 $\{u^{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 u; 并且 $\nu_x = \delta_{u(x)}$.

2.2　二阶行列式的弱连续性定理

定理 2.2.1　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界开集, $H^{-1}(\Omega)$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间. 假设

(H_1) 在 $L^2(\Omega)$ 中, $\boldsymbol{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \cdots, u_p^\varepsilon) \rightharpoonup \boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_p)$;

(H_2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_k}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧.

若二次型 $Q = Q(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^p)$ 满足 $Q|_\wedge(\lambda) \geqslant 0$, 其中

$$\wedge = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^p : \exists \xi \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\} \text{ 使得 } \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk}\lambda_j\xi_k = 0,\ i = 1, 2, \cdots, q\right\}, \tag{2.2.1}$$

且在分布意义下 $Q(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \rightharpoonup l$ (l 可能为一测度), 则

$$l \geqslant Q(\boldsymbol{u}). \tag{2.2.2}$$

在分布意义下成立

证明　把证明分为四步.

1° 作变换 $v_i^\varepsilon = u_i^\varepsilon - u_i$, 则 (H_1) 和 (H_2) 等价于

(1) 在 $L^2(\Omega)$ 中, $v_j^\varepsilon \rightharpoonup 0$ $(j = 1, 2, \cdots, p)$;

(2) $\displaystyle\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_k}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 在 H_{loc}^{-1} 中紧.

因为 Q 是二次型, 所以存在双线性函数 $q(a, b)$ 使得 $Q(a) = q(a, a)$, 因而

$$Q(\boldsymbol{v}^\varepsilon) = Q(\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}) = Q(\boldsymbol{u}^\varepsilon) - 2q(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \boldsymbol{u}) + Q(\boldsymbol{u}).$$

由于当 b 固定时, $q(a, b)$ 关于 a 线性, 所以 $q(\boldsymbol{u}^\varepsilon, \boldsymbol{u}) \rightharpoonup q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = Q(\boldsymbol{u})$. 因此由 $Q(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \rightharpoonup l$ 得

$$Q(\boldsymbol{v}^\varepsilon) \rightharpoonup l - Q(\boldsymbol{u}).$$

2° 令 $\boldsymbol{w}^\varepsilon = \phi\boldsymbol{v}^\varepsilon$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, 则 supp $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中的紧集, 且

$$\text{在 } L^2(\Omega) \text{ 中},\quad \boldsymbol{w}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{0}. \tag{2.2.3}$$

由于

$$\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_k} = \phi\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial x_k} + \sum_{j,k} a_{ijk}v_j^\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial x_k}, \tag{2.2.4}$$

且上式右端的第一项在 $H^{-1}(\Omega)$ 中紧, 所以

$$\sum_{j,k} a_{ijk} \frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_k} \text{ 按 } H^{-1}(\Omega) \text{ 中的强拓扑紧.}$$

于是可选取其子列使得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j,k} a_{ijk} \frac{\partial w_j^\varepsilon}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{按 } H^{-1}(\Omega) \text{ 中的强拓扑}), \tag{2.2.5}$$

$$Q(\boldsymbol{w}^\varepsilon) \rightharpoonup \phi^2[l - Q(\boldsymbol{u})].$$

3° 为了证得 (2.2.2), 只需证明

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega Q(\boldsymbol{w}^\varepsilon) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0, \tag{2.2.6}$$

这是因为

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega Q(\phi \boldsymbol{v}^\varepsilon) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_\Omega \phi^2[l - Q(\boldsymbol{u})] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0$$

对所有的 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ 成立, 这蕴涵着 $l - Q(\boldsymbol{u}) \geqslant 0$.

4° 定义 w_j^ε 的 Fourier 变换

$$\widehat{w_j^\varepsilon} = F(w_j^\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} w_j^\varepsilon(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x})} \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.2.7}$$

现在按 Hermitian 形式把 Q 从 $\mathbb{R}^p$ 延拓到 $\mathbb{C}^p$. 由于 Q 是二次型, 所以可设

$$Q(\lambda) = \sum_{j,k} q_{jk} \lambda_j \lambda_k,$$

其中, $q_{jk} = q_{kj}$ 为实系数. 定义

$$\widetilde{Q}(\lambda) = \sum_{j,k} q_{jk} \lambda_j \overline{\lambda_k}.$$

我们断言

$$\mathrm{Re}\ (\widetilde{Q}(\lambda)) \geqslant 0, \quad \forall \lambda \in \wedge + \mathrm{i} \wedge. \tag{2.2.8}$$

事实上, 若 $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2$ $(\lambda_1,\ \lambda_2 \in \wedge)$, 则

$$\widetilde{Q}(\lambda) = [Q(\lambda_1) + Q(\lambda_2)] + \mathrm{i}[q(\lambda_1, \lambda_2) - q(\lambda_2, \lambda_1)].$$

这蕴涵着 (2.2.8).

应用 Plancherel 恒等式