全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

线性代数

◎ 主　编　张无畏
◎ 副主编　罗兆富　李　源　杨朝丽

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　张无畏

副主编　罗兆富　李　源　杨朝丽

编　者　张无畏　罗兆富　杨　胜　宗　琮　马嘉芸

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国教育科学"十一五"规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"数学类子课题项目研究成果之一。全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换。本书注重由实际问题引出相关概念，强调数学的思想和方法，强化线性代数知识的应用，力争做到由浅入深、由易到难、由具体到抽象，使重点突出、难点分散，注重理论联系实际，尽量使学生学以致用，便于教学。本书例题、习题丰富，每章后配有习题，包括填空题、选择题、判断题、计算题和证明题等多种题型，书末附参考答案。全书知识结构清晰、贴近考研，在现有经济管理类专业线性代数教材的基础上，加入了部分考研的例题和习题，便于学生为考研作准备。

本书可作为高等学校经济管理类专业线性代数教材，也可作为高等学校教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／张无畏主编. —北京：高等教育出版社，2011.2

ISBN 978-7-04-031693-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 002100 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 胡　颖　**封面设计** 张申申

责任绘图 黄建英　**版式设计** 马敬茹　**责任校对** 王效珍

责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	肥城新华印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2011年2月第1版
印　　张	14.5	印　　次	2011年2月第1次印刷
字　　数	270 000	定　　价	21.60元

物料号　31693-00

高等学校经济管理学科数学基础系列教材编委会

序　　言

经济数学作为高等学校经济管理类专业学生的重要基础课程，担负着向学生传授必需的数学基础知识，提高数学素质的重要作用。开设这些课程的教学目的是让学生通过知识载体学习，从量的方面对事物进行观察、抽象总结和研究；培养学生的逻辑思维能力；提高应用数学知识，理解现实世界的科学意识，为学生根据工作需要进一步学习和应用现代数学知识打下基础。

马锐、张无畏、陈龙伟等教授编写的《微积分》、《线性代数》等教材是全国教育科学"十一五"规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"项目成果之一。该书从上述基本观点出发，结合编者多年经济数学教学的实践经验，按照经济类、管理类数学教学的基本要求编写，注重理论联系实际，尽量使学生学以致用。本书对理论的讲解由浅入深，书中附有大量的典型例题和习题，并在现有经济管理类线性代数教材的基础上，加入一些典型的考研题型，便于学生为考研作准备。

教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点和难点。国家鼓励不同层次、不同模式的改革试点，鼓励不同要求、不同风格的教材百花齐放。相信本书的出版，将以其特色为经济数学教材的百花园增加一支绽放的鲜花，并为经济类、管理类线性代数教学质量的提高和学生素质的培养作出积极的贡献。

李继彬

2010 年 8 月 20 日

前　　言

本书是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”项目成果之一。

本书的主要特点是：

一、注重理论与实践相结合。尽量把数学知识应用于实际问题中，使学生通过对数学知识的学习，能够真正做到“学以致用”。

二、便于教师组织教学、学生自学。编写本书的教师长期从事本门课程的教学，具有丰富的教学经验。教材的编写在紧扣教学大纲的基础上，尽可能符合经济类、管理类专业的本科学生的特点，尽量避开繁琐的证明及推导，由浅入深地讲解理论知识；书中附有大量的典型例题和习题。尤其是，本书紧密结合教育部最新颁布的全国硕士研究生入学统一考试数学三的考试大纲，符合经济类、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势，并选用了一些研究生考试题目，为准备报考硕士研究生的学生提供了研究生数学考试所必需的基础知识。

本书在编写过程中，得到了云南财经大学和楚雄师范学院的大力支持和帮助。特别是云南财经大学统计与数学学院院长石磊教授和副院长费宇教授及昆明理工大学理学院李继彬教授审阅了全书，提出了许多宝贵的意见和建议。高等教育出版社编辑在组稿、定稿的过程中做了大量的工作，编者在此一并表示衷心的感谢。

本书由楚雄师范学院张无畏教授担任主编，云南财经大学罗兆富副教授、云南大学李源老师、昆明学院杨朝丽教授担任副主编，第一章由宗琮老师编写，第二章由杨胜副教授编写，第三章由张无畏教授编写，第四章由马嘉芸副教授编写，第五、六章由罗兆富副教授编写。全书由张无畏、罗兆富、李源、杨朝丽负责统稿、定稿，由石磊教授主审。

编　者

2010 年 8 月

目　　录

引子

员工有多少?

2008 年,由于美国的次贷危机引发了全球的金融危机,不少企业不得不减薪裁员.某企业的员工分为经理和普通员工两类,其月薪分别为 5 千元和 3 千元,企业每月工资支出 60 万元,因金融危机影响经营状况,为将月工资支出减少至 39 万元,企业决定将经理的月薪降至 3 千元,并裁减三分之一普通员工,问裁了多少员工?同类型的企业,一般的算法如何呢?

第一章 行 列 式

线性代数的一个主要部分就是线性方程组,而研究线性方程组时最早得到完美结果的数学工具就是行列式.本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法,进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & ② \end{cases}$$

① $\times a_{22}$: $a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}$,

② $\times a_{12}$: $a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}$,

两式相减消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

类似地消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为便于记忆上述结果,我们引入二阶行列式.

定义 1.1 我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为**二阶行列式**,它由 2^2 个数组成,其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素,行列式实质是一个数,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式表示的代数和,可以用图 1-1 画线的方法(对角线法则)记忆,即:

实线(主对角线)连接的两个元素的乘积减去虚线(反对角线)连接的两个元素的乘积.

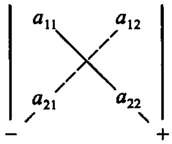

图 1-1

如 $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=5\times2-1\times(-2)=12.$

若记

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=D_1,b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=D_2,a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=D,$$

则二元线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注 分母都为原方程组的系数行列式.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq0$,

$$D_1=\begin{vmatrix}12 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=14,D_2=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-21,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

定义 1.2 我们用记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式表示的代数和,也可以用图 1-2 画线的方法记忆,其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项.

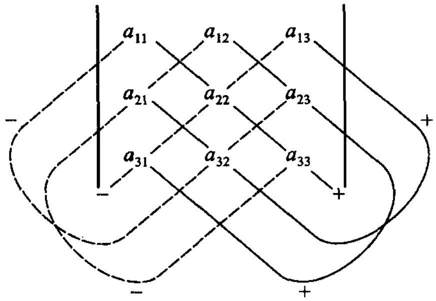

图 1-2

注 实线上三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号.

说明 1. 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

2. 三阶行列式包括 3! 项,每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积,其中三项为正,三项为负.

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$.

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned}D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-(-4)\times2\times(-3)\\ &\quad -2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4\\ &= -4-6+32-24-8-4=-14.\end{aligned}$$

例 3 a,b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix}a & b & 0\\ b & a & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0.$$

解 $\begin{vmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & b\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=a^2+b^2.$

若要 $a^2+b^2=0$,则 a 与 b 须同时等于零. 因此,当 $a=0,b=0$ 时,给定行列式等于零.

利用三阶行列式求解三元线性方程组.

如果三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq0,$$

若记

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解　由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1=-5\neq0,$$

同理可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 2,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

§1.2　n 阶行列式

一、n 级排列、逆序、逆序数

1. n 级排列

定义 1.3　由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 **n 级排列**.

例如,1234 及 2431 都是 4 级排列,25413 是一个 5 级排列.

2. 逆序

定义 1.4　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$),则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**.

例如,排列 23154 中,2 在 1 前面,3 在 1 前面,5 在 4 前面,共有 3 个逆序.

3. 逆序数

定义 1.5　一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的**逆序数**,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如,排列 23154 中,2 在 1 前面,3 在 1 前面,5 在 4 前面,共有 3 个逆序,即 $N(23154)=3$.

4. 排列的奇偶性

逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例 1　求排列 32514 的逆序数.

解　32,31,21,51,54 共有 5 个逆序,即 $N(32514)=5$.

例 2　求排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 的逆序数.

解　$N(n(n-1)(n-2)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列,当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列.

5. 对换

定义 1.6　在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调,得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换称为一个**对换**,记为 (i_s,i_t).

例如,对排列 21354 施以对换(1,4)后得到排列 24351.

定理 1.1　任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

证　(1)显然,对换相邻的两个数码奇偶性改变.

(2)一般情形,设排列为 $\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$,经过对换 (i,j) 变为新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots.$$

这个变换可以按如下方法完成:j 与前面 $s+1$ 个数码逐个对换,然后 i 与后面 s 个数码逐个对换.按上述方法,总共进行了 $2s+1$ 次相邻数码的对换,因为相邻数码的对换次数为奇数,所以最后得到的排列与原排列的奇偶性不同.

定理 1.2　$n(n>1)$ 个数码共有 $n!$ 个 n 级排列,其中奇偶排列各占一半.

证　n 级排列的总数为:$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$,设其中奇排列为 p 个,偶排列为 q 个.

若将每一个奇排列都施以同一对换,例如都对换(1,2),则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全都变为偶排列,于是有 $p\leqslant q$;同理,如将全部偶排列都施以同一对换,则 q 个偶排列全都变为奇排列,于是有 $q\leqslant p$,所以得出 $p=q$,即奇偶排列数相等,各为 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

如果 A 次产业所占的百分比大于 B 次产业所占的百分比大于 C 次产业所占的百分比,其中,$A,B,C=\{$一,二,三$\}$,那么,我们称此时呈现的三次产业结构为 ABC.

这样一来,经济发展中三次产业结构所呈现的形式就是一个三级排列.我们易得

命题 1.1　三次产业结构所呈现的形式共有 6 种,它们分别是“一二三”、“一三二”、“二一三”、“二三一”、“三一二”和“三二一”.

命题 1.2　根据排列组合及对换的数学原理,我们有如下三次产业结构变动图(图 1－3).

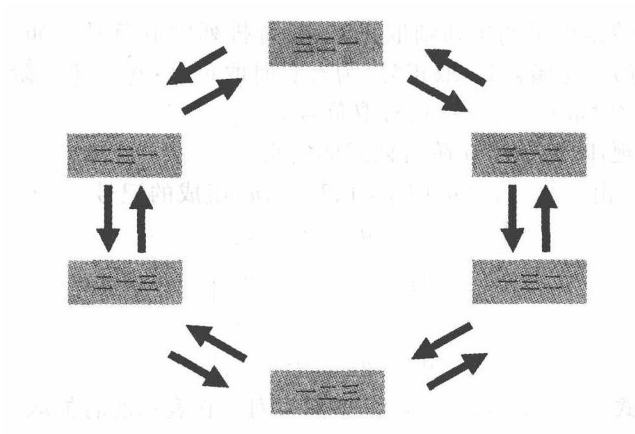

图 1-3 三次产业结构变动图

命题 1.3 假设某产业结构为 ABC,其中 $A,B,C=\{$一,二,三$\}$,A,B,C 次产业的增长率分别为 a,b,c, A,B,C 次产业的总量分别为 $A1,B1,C1$, 则当 $bB1-aA1>A1-B1$ 或 $cC1-bB1>B1-C1$ 时,产业结构发生变动;否则,产业结构不发生变动,只是量的变化.

二、n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(1) 二阶行列式表示所有不同行不同列的两个元素乘积的代数和.

两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2},$$

j_1j_2 为 2 级排列,当 j_1j_2 取遍了所有 2 级排列(12,21)时,即得到二阶行列式的所有项(不包含符号),共为 $2!=2$ 项.

三阶行列式表示所有不同行不同列的三个元素乘积的代数和.

三个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列,当 $j_1j_2j_3$ 取遍了所有 3 级排列时,即得三阶行列式的所有项(不包含符号),共为 $3!=6$ 项.

(2) 每一项的符号是,当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对

应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 如在上述二阶行列式中,当 $N(j_1j_2)$ 为偶数时,取正号,为奇数时取负号;在上述三阶行列式中,当 $N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时取正号,为奇数时取负号.

根据这个规律,可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.7 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**,其中横排称为行,纵排称为列. 它表示所有能取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 因此,n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时,则得到 n 阶行列式表示的代数和中所有的项,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

一阶行列式 $|a|$ 就是 a.

例 3 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项.

解 因为 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 下标的逆序数为 $N(431265)=6$,所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是六阶行列式中的项.

因为 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}=-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$ 下标的逆序数为 $N(452316)=8$,所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是六阶行列式中的项.

例 4 用行列式定义计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$.