矩阵理论及方法

谢冬秀 雷纪刚 陈桂芝 编著

科学出版社

矩阵理论及方法

谢冬秀　雷纪刚　陈桂芝　编著

科学出版社
北京

前　　言

作为数学的一个重要分支，矩阵理论有一整套理论、思想和方法，它所包含的内容极为丰富. 矩阵的理论和方法也已成为现代科技领域必不可少的工具. 诸如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、控制论、力学、电子学、网络等学科领域都与矩阵理论有着密切的联系，甚至在经济管理、金融、保险、社会科学等领域，矩阵理论和方法也有着十分重要的应用. 因此，学习和掌握矩阵的基本理论和方法，对于理、工、经、管类的研究生来说是十分必要的.

本书作者多年从事矩阵理论的研究工作，并且有多年执教这门课程的经历，具有丰富的教学经验. 在参阅了大量相关资料的基础上，结合自己科研和教学的体会，从各方面的实际情况出发，编写了本书. 本书内容取舍得当，结构安排合理完整，论述深入浅出、简明易懂、准确严谨，是一部很实用的矩阵论教材. 本书是北京市属高等学校人才强教深化计划项目的一项具体内容，原稿在北京信息科技大学使用多次.

全书共 7 章，比较全面系统地介绍了矩阵的基本理论、方法及其应用. 第 1 章重点介绍线性空间与线性变换，这部分内容既是线性代数知识的推广和深化，又是矩阵理论的基础，熟练掌握和深刻理解它们对后面内容的学习乃至将来正确处理实际问题有很大的作用. 第 2 章介绍矩阵的变换和分解，这些变换和分解在数值计算和使问题简化过程中扮演着十分重要的角色. 第 3 章主要讨论矩阵范数及其应用，范数理论是研究数值方法的收敛性、稳定性及误差分析问题时必不可少的工具. 第 4 章介绍矩阵分析，它是研究数值方法和其他数学分支以及许多工程问题的重要工具. 第 5 章介绍特征值的估计及对称矩阵的极性，其次也涉及一些特征值和奇异值的扰动问题. 它们在矩阵的理论研究与实际应用中有着相当重要的作用. 第 6 章介绍几类特殊矩阵，诸如非负矩阵、随机矩阵与双随机矩阵、M 矩阵、广义对角占优矩阵、Toeplitz 矩阵与 Hankel 矩阵等. 第 7 章介绍矩阵的广义逆与直积及其应用，它们广泛应用于解线性方程组和矩阵方程.

本书的编写力求做到内容丰富，论述详尽严谨，文字通俗易懂，便于自学，尽可能满足不同专业工科及理科研究生学习的需要. 全书内容充实，不同专业的研究生可根据需要对内容进行取舍. 理科研究生可跳过第 1 章学习，工科研究生可酌情取舍一些内容，所有删减均不影响教学内容的连贯性. 书中各章均配有适量的习题，书后附有

习题答案与提示.

限于编著者水平, 书中有些内容的处理方法不一定妥当, 疏漏也在所难免, 诚恳地希望读者批评指正.

作　者

2011 年 10 月

目　录

第 1 章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是学习矩阵理论时经常用到的两个极其重要的概念, 它们是研究物理、力学中满足叠加原理的系统的数学模型. 线性空间是对集合的元素在线性运算方面所表现的共性加以概括而形成的新概念. 线性变换则是用来研究线性空间的元素之间的联系. 本章论述这两个概念及其有关理论. 所有论述是在假定读者已经具备线性代数初步知识基础上进行的.

1.1　线 性 空 间

1.1.1　线性空间的概念及基本性质

1. 线性空间

线性空间是 n 维向量空间概念的抽象和推广, 为了便于理解这个抽象概念, 先回忆一下 n 维向量空间中的向量在加法及数与向量的乘法方面的运算性质.

在 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \,|a_i \in \mathbb{R}\}$ 中, 向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 定义的加法和数量乘法为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n),$$

它们对向量的加法及数与向量乘法是封闭的 (指运算结果都是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量).

考虑全体定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数集合, 由于连续函数的和是连续函数, 连续函数与实数的数量乘积还是连续函数. 它们的加法运算和数乘运算都满足下列定义中的 8 条性质.

定义 1.1.1　设 V 是一个非空集合, P 是一个数域, 在集合 V 的元素之间定义了一种运算, 称为加法: 即对于 V 中任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$, 在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与之对应, 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$. 在数域 P 与集合 V 中的元素之间还定义了一种运算, 称为数量乘法: 即对于数域 P 中任一数 k 与集合 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$, 在 V 中都有唯一的一个元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应, 称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积, 记为 $\boldsymbol{\delta} = k\boldsymbol{\alpha}$, 如果两种运算满足如下性质:

(1) 加法交换律, $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$;

(2) 加法结合律, $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$, 有 $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$;

(3) 存在 “零元”, 即存在 $\mathbf{0} \in V$, 使得 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$ 都有 $\mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$;

(4) 存在负元, 即 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$;

(5) “1 律”, $1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$;

(6) 数乘结合律, $\forall k, l \in P, \boldsymbol{\alpha} \in V$, 都有 $(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha}) = l(k\boldsymbol{\alpha})$;

(7) 分配律, $\forall k, l \in P, \boldsymbol{\alpha} \in V$, 都有 $(k+l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) 分配律, $\forall k \in P, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 都有 $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$,

则称 V 为数域 P 上的一个**线性空间**, 线性空间中的元素称为**向量**.

注　线性空间依赖于 “+” 和 “•” 的定义, 不光与集合 V 有关.

由定义, 几何空间中全部向量组成的集合是一个实数域上的线性空间. 分量属于数域 P 的全体 n 元数组构成数域 P 上的一个线性空间, 这个线性空间用 P^n 来表示.

例 1.1.1　数域 P 上一元多项式环 $P[x]$, 按通常的多项式加法和数与多项式的乘法, 构成一个数域 P 上的线性空间. 如果只考虑其中次数不超过 n 的多项式, 再添上零多项式也构成数域 P 上的一个线性空间, 用 $P[x]_n$ 表示.

例 1.1.2　元素属于数域 P 的 $m \times n$ 矩阵, 按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法, 构成数域 P 上的一个线性空间, 用 $P^{m\times n}$ 表示.

例 1.1.3　$\mathbb{R}$ 是实数域, V 是全体正实数组成的集合, 定义 V 中两个元素的加法和数乘为

$$a \oplus b = ab \quad (a, b \in V),$$

$$k \circ a = a^k \quad (k \in \mathbb{R}, a \in V).$$

下面验证 V 对于这两种运算满足定义中的 8 个条件.

(1) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$;

(2) $(a \oplus b) \oplus c = ab \oplus c = abc = a(bc) = a \oplus (b \oplus c)$;

(3) 1 是零元素 $1 \oplus a = 1 \cdot a = a$;

(4) a 的负元素是 $a^{-1}, a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1$;

(5) $1 \circ a = a^1 = a$;

(6) $k \circ (l \circ a) = k \circ a^l = (a^l)^k = (a^k)^l = l \circ (a^k) = l \circ (k \circ a)$;

(7) $(k+l) \circ a = a^{k+l} = a^k a^l = a^k \oplus a^l = k \circ a \oplus l \circ a$;

(8) $k \circ (a \oplus b) = k \circ ab = (ab)^k = a^k b^k = a^k \oplus b^k = k \circ a \oplus k \circ b$.

所以 V 对这两种运算构成线性空间.

2. 线性空间的性质

性质 1.1.1　线性空间的零元素是唯一的.

证　设 $\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{0}'$ 均是零元素, 则由零元素的概念, 有

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'.$$

性质 1.1.2 任意元素的负元素唯一.

证 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 设 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}'$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量, 则

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}' + \mathbf{0} = \boldsymbol{\beta}'.$$

由于负向量唯一, 用 $-\boldsymbol{\alpha}$ 代表 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.

定义减法如下: $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$.

性质 1.1.3 k 属于数域 $P, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 则

(1) $0 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$;

(2) $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$;

(3) $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

(4) 如果 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 那么 $k = 0$ 或者 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

只含一个零元素的线性空间称为零空间.

1.1.2 基、维数与坐标

定义 1.1.2 给定 V 内一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 设 $\boldsymbol{\beta}$ 是 V 内的一个向量, 如果存在 P 内 s 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$, 则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表示**.

例 1.1.4 在 $P^{2\times 2}$ 中, 任意矩阵都可以由下列矩阵组线性表示:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这是因为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 1.1.3 给定 V 内一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 如果存在数域 P 内不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**; 否则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**.

例 1.1.5 实二元数列的全体, 按下列运算:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1a_2),$$

$$k \circ (a_1, b_1) = \left(ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)$$

构成线性空间, 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)$ 是线性无关的.

证　如果 $k_1\circ\boldsymbol{\alpha}_1\oplus k_2\circ\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$, 即

$$k_1\circ(1,0)\oplus k_2\circ(0,1)=(0,0),$$

则由运算的定义可得

$$\left(k_1,\frac{k_1(k_1-1)}{2}+k_2\right)=(0,0),$$

因此

$$k_1=0,\quad \frac{k_1(k_1-1)}{2}+k_2=0,$$

所以 $k_1=k_2=0$, 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的.

定理 1.1.1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in V(s\geqslant 2)$, 则下述两条等价:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关;

(2) 某个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可被其余向量线性表示.

证明略.

定义 1.1.4　设 V 是数域 P 上的线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的 n 个向量, 如果满足:

(1) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关;

(2) V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 P 上可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n,$$

则称 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组基, $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 被 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 唯一确定称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标, 记为 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 或 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}$. 线性空间 V 的基所含向量的个数 n 称为线性空间 V 的维数, 记为 $\dim V=n$, 并称 V 为 n 维线性空间. 零空间的维数为零.

例 1.1.6　矩阵空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中, $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示第 i 行, 第 j 列处的元素为 1, 其他元素为 0 的矩阵, 求 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 的基和维数.

解　容易证明 (1) $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 线性无关; 又

(2) $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$,

故 $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 的一组基, 且 $\dim\mathbb{R}^{m\times n}=mn$.

例 1.1.7　在线性空间 $P[x]_n$ 中, $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是 $n+1$ 个线性无关的向量, 而且每一个次数不超过 n 的数域 P 上的多项式都可以被它们线性表示, 所以 $P[x]_n$ 是 $n+1$ 维的, 而 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 就是它的一组基. 在这组基下, 多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 的坐标就是它的系数 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$.

如果在 V 中取另外一组基, $\varepsilon_1'=1,\varepsilon_2'=x-a,\cdots,\varepsilon_{n+1}'=(x-a)^n$, 那么按泰勒展开式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

因此, $f(x)$ 在基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_{n+1}'$ 下的坐标是 $\left(f(a),f'(a),\cdots,\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)$.

由此看到 n 维线性空间的基是不唯一的, 任意 n 个线性无关的向量都可取作它的一组基.

1.1.3 基变换与坐标变换

下面讨论基改变时, 向量的坐标如何变化.

1. 基变换公式

定义 1.1.5 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是它的两组基, 且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \boldsymbol{\eta}_2=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \qquad\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\eta}_n=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\end{cases}\tag{1.1.1}$$

称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

为从 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 到 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$ 的**过渡矩阵**. 由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 线性无关, 所以过渡矩阵是可逆的.

可将式 (1.1.1) 形式上记为

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}.\tag{1.1.2}$$

反过来, 给定 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{A}$ 是 P 上一个 n 阶方阵. 令

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的一组基, 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 中两向量组, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 n 阶矩阵, 那么

$$((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_2)\boldsymbol{A}.$$

2. 向量的坐标变换公式

设 V 是数域 P 上的线性空间, V 的两组基为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$, 又设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \tag{1.1.3}$$

在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$, 即

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}. \tag{1.1.4}$$

现在设两组基之间的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 即

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\,\boldsymbol{A}.$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性知

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

或者

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

这就是**坐标变换公式**.

例 1.1.8 矩阵 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中取基

(I) $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

和基

(II) $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(1) 求由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵;

(2) 求由基 (II) 到基 (I) 的坐标变换公式.

解 (1) 由例 1.1.6 知矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中的一组基, 且

$$(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4) = (\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{A},$$

$$(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4) = (\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{B},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4) = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C},$$

其中

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

所求坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x_1' + x_2' + x_3' + x_4' \\ x_2' + x_3' + x_4' \\ 2x_1' + 2x_2' + x_3' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

1.2　线性子空间

1.2.1　子空间的概念

定义 1.2.1　设 V 是数域 P 上的一个线性空间, W 是 V 的一个非空子集. 如果 W 关于 V 内的加法与数乘运算封闭, 即

(1) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$ 都有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$;

(2) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W, \forall k \in P$ 都有 $k\boldsymbol{\alpha} \in W$,

则称 W 为 V 的**线性子空间**, 简称**子空间**.

注　(1) 子空间 W 也是线性空间, 且 $\dim W \leqslant \dim V$;

(2) 子空间 W 的零元素就是 V 的零元素.

例 1.2.1　在线性空间中, 由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间, 称为零子空间, 线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

零子空间和线性空间本身这两个子空间称为**平凡子空间**, 而其他的线性子空间称为**非平凡子空间**.

例 1.2.2　$P[x]_n$ 是线性空间 $P[x]$ 的子空间.

例 1.2.3　设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性空间 V 的一组向量, 不难看出, 这组向量所有可能的线性组合

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

所生成的集合是非空的, 而且对 V 的两种运算封闭, 因而是 V 的一个子空间, 这个子空间称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 生成的子空间, 记为 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 或 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)$.

1.2.2　子空间的维数与基

由于线性子空间也是线性空间, 因此, 前面引入的关于维数、基和坐标等概念, 也可应用到线性子空间中去.

定理 1.2.1　设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 W 的一组基, 那么这组向量可扩充为 V 的一组基, 即在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}, \boldsymbol{\alpha}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基.

证 对维数差 $n-m$ 作归纳法, 当 $n-m=0$ 时, 定理显然成立, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 已经是 V 的基. 现在假定 $n-m=k$ 时定理成立, 考虑 $n-m=k+1$ 的情形.

既然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 还不是 V 的一组基, 它又是线性无关的, 那么在 V 中必定有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 添加进去后, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 必定是线性无关的. 而子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1})$ 是 $m+1$ 维的, 因为 $n-(m+1)=(n-m)-1=k+1-1=k$, 由归纳法假设, $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1})$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 可以扩充为整个空间的基.

1.2.3 子空间的交与和

设 V_1,V_2 为数域 P 上线性空间 V 的子空间, 定义 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{v}\in V_1 \text{ 且 } \boldsymbol{v}\in V_2\}$, 称为子空间的**交**; $V_1+V_2=\{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{v}_1\in V_1,\boldsymbol{v}_2\in V_2\}$, 称为子空间的**和**.

定理 1.2.2 设 V_1,V_2 为数域 P 上线性空间 V 的子空间, 则 $V_1\cap V_2$ 和 V_1+V_2 都是 V 的子空间.

只要证明 $V_1\cap V_2$ 和 V_1+V_2 非空且关于加法与数乘是封闭的即可.

例 1.2.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是线性空间 V 中的两组向量, 则

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)+L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

证明由读者自己完成.

定理 1.2.3 (维数公式) 设 V 为有限维线性空间, V_1,V_2 为 V 的子空间, 则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2),$$

这个公式称为**维数公式**.

证 设 $\dim V_1=n_1$, $\dim V_2=n_2$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$, 取 $V_1\cap V_2$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$(若 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$, 则 $m=0$, 基为空集). 将此基分别扩充为 V_1 和 V_2 的基

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \text{ 和 } \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m},$$

只需要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 是 V_1+V_2 的一组基即可.

首先, 易见 V_1+V_2 中的维数就等于 n_1+n_2-m, 因而维数公式成立.

因为

$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}),$$

$$V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}),$$