GAOKAO FUXI JIHUA

2009

王后雄高考复习计划

丛书主编　王后雄

本册主编　田祥高　黄浩胜

第一轮

数学

学生用书

龍門書局

www.Longmenbooks.com

根据2008年

2009年高考适用

王后雄高考复习计划

第一轮

数学

（学生用书）

丛书主编：王后雄

本册主编：田祥高　黄浩胜

编　　者：郭倩芳　孙惠君　张丰收
张三应　王长法　余方圆
周金涛　田　军　张　雄
缪　庆　吴小明　夏海军
占　华　占　水　姜　可
胡清华　陈晓雷　梅　晶
宋明华　王盛枝　杨　刚

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

王后雄高考复习计划．数学／王后雄丛书主编；田祥高，黄浩胜本册主编．－修订版．－北京：龙门书局，2004

ISBN 978-7-80191-330-2

Ⅰ．王…　Ⅱ．①王…②田…③黄…　Ⅲ．数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第092974号

责任编辑：刘　涛　孟进军　倪炜玲／封面设计：朱　平　高海英

龍門書局 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.longmenbooks.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2003年11月第　一　版　　开本：A4(890×1240)

2008年4月第五次修订版　　印张：22 1/2　彩插：2

2008年4月第八次印刷　　字数：792 000

定价：49.50 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

目　录

2009 高考复习策略

一、2009 年高考数学命题趋势

综观近几年的数学高考试题，试题恪守《考试大纲》的规定，"在考查基础知识的同时，注重对数学思想方法的考查，注重对数学能力的考查"，充分"发挥数学作为基础学科的作用，既重视考查中学数学基础知识掌握的程度，又注重考查进入高校继续学习的潜能"；既有继承，又有更多的创新. 预测 2009 年数学高考具有如下命题趋势：

1. 相对稳定　适度创新

可以肯定：2009 年高考数学与 2008 年相比不会有太大的变化！从近几年、尤其是 2004 年以来，高考数学试题的命制遵循一种"相对稳定，适度创新"的原则，即难度稳定、难易梯度稳定、题型稳定，但是在题型、题目立意上适度创新，始终是从数学基础知识、基本思想方法、基本能力出发，多层次、多角度、多视点地考查学生的数学素养和学习潜能.

[例 1]　(2006 · 北京) 图 1 为某三岔路口交通环岛的简化模型，在某高峰时段，单位时间进出路口 A、B、C 的机动车辆数如图 1 所示，图中 x_1、x_2、x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数(假设：单位时间内，在上述路段中，同一路段驶入与驶出的车辆数相等)，则(　　)

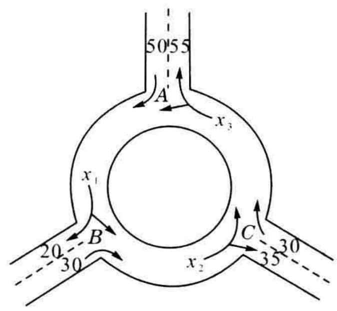

图 1

A. $x_1>x_2>x_3$　　B. $x_1>x_3>x_2$

C. $x_2>x_3>x_1$　　D. $x_3>x_2>x_1$

[解析]　由于"同一路段驶入与驶出的车辆数相等"，观察图形可知 $x_2=(x_1-20)+30$，$x_3=(x_2-35)+30$，$x_1=(x_3-55)+50$，即 $x_1=x_3-5$，$x_2=x_1+10$，$x_3=x_2-5$，$\therefore x_1<x_3$，$x_2>x_1$，$x_3<x_2$，$\therefore x_2>x_3>x_1$. 故选 C.

[点评]　本题情景新颖，背景公平，问题的关键在于仔细审题. 只要透彻地理解"同一路段驶入与驶出的车辆数相等"，再观察图形，便不难建立数学模型，从而顺利地解决问题.

2. 强化基础　突出主干

综观 2008 年全国所有的高考试题，全面考查基础知识，选择、填空、解答题的入口都十分基础，每套试卷的基础题所占的比例较大. 注重对高中阶段所学知识的全面考查，各章都有试题涉及对《教学大纲》规定课时数相对较少的内容，如排列、组合、二项式定理、复数、线性规划等，也都分别设计了选择题、填空题进行考查；而对支撑整个数学学科体系的主干知识，函数和导数、数列、不等式、三角函数、立体几何、解析几何、概率与统计等七大块重点主干知识则以解答题形式进行了全面深入的考查.

[例 2]　(2007 · 湖南) 已知 $A_n(a_n,b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 是曲线 $y=e^x$ 上的点，$a_1=a$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且满足 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$，$a_n\neq0$，$n=2,3,4,\cdots$.

(Ⅰ) 证明：数列 $\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}(n\geqslant2)$ 是常数数列；

(Ⅱ) 确定 a 的取值集合 M，使 $a\in M$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列；

(Ⅲ) 证明：当 $a\in M$ 时，弦 $A_nA_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的斜率随 n 单调递增.

[解析]　(Ⅰ) 当 $n\geqslant2$ 时，由已知得 $S_n^2-S_{n-1}^2=3n^2a_n$. 因为 $a_n=S_n-S_{n-1}\neq0$，所以 $S_n+S_{n-1}=3n^2$. …①

于是 $S_{n+1}+S_n=3(n+1)^2$. …②

由②－①得 $a_{n+1}+a_n=6n+3$. …③

于是 $a_{n+2}+a_{n+1}=6n+9$. …④

由④－③得 $a_{n+2}-a_n=6$. …⑤

所以 $\dfrac{b_{n+2}}{b_n}=\dfrac{e^{a_{n+2}}}{e^{a_n}}=e^{a_{n+2}-a_n}=e^6$，即数列 $\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}(n\geqslant2)$ 是常数数列.

(Ⅱ) 由①有 $S_2+S_1=12$，所以 $a_2=12-2a$. 由③有 $a_3+a_2=15$，$a_4+a_3=21$，所以 $a_3=3+2a$，$a_4=18-2a$. 而⑤表明，数列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k+1}\}$ 分别是以 a_2、a_3 为首项，6 为公差的等差数列，所以 $a_{2k}=a_2+6(k-1)$，$a_{2k+1}=a_3+6(k-1)$，$a_{2k+2}=a_4+6(k-1)(k\in\mathbf{N}^*)$，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列 $\Leftrightarrow a_1<a_2$ 且 $a_{2k}<a_{2k+1}<a_{2k+2}$ 对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$ 成立 $\Leftrightarrow a_1<a_2$ 且 $a_2+6(k-1)<a_3+6(k-1)<a_4+6(k-1)\Leftrightarrow a_1<a_2<a_3<a_4\Leftrightarrow a<12-2a<3+2a<18-2a\Leftrightarrow\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{15}{4}$. 即所求 a 的取值集合是 $M=\left\{a\,\middle|\,\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{15}{4}\right\}$.

(Ⅲ) 解法一：弦 A_nA_{n+1} 的斜率为 $k_n=\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{e^{a_{n+1}}-e^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$. 任取 x_0，设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}$，则 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-x_0)-(e^x-e^{x_0})}{(x-x_0)^2}$，记 $g(x)=e^x(x-x_0)-(e^x-e^{x_0})$，则 $g'(x)=e^x(x-x_0)+e^x-e^x=e^x(x-x_0)$. 当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上为增函数；当 $x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上为减函数，所以 $x\neq x_0$ 时，$g(x)>g(x_0)=0$，从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上都是增函数. 由(Ⅱ)知，当 $a\in M$ 时，数列 $\{a_n\}$ 单调递增，取 $x_0=a_n$，因为 $a_n<a_{n+1}<a_{n+2}$，所以 $k_n=\dfrac{e^{a_{n+1}}-e^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}<\dfrac{e^{a_{n+2}}-e^{a_n}}{a_{n+2}-a_n}$. 取 $x_0=a_{n+2}$，因为 $a_n<a_{n+1}<a_{n+2}$，所以 $k_{n+1}=\dfrac{e^{a_{n+2}}-e^{a_{n+1}}}{a_{n+2}-a_{n+1}}>\dfrac{e^{a_{n+2}}-e^{a_n}}{a_{n+2}-a_n}$. 所以 $k_n<k_{n+1}$，即弦 $A_nA_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的斜率随 n 单调递增.

解法二：设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{a_{n+1}}}{x-a_{n+1}}$，同解法一得，$f(x)$ 在 $(-\infty,a_{n+1})$ 和 $(a_{n+1},+\infty)$ 上都是增函数，所以 $k_n=\dfrac{e^{a_n}-e^{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}<\lim\limits_{n\to a_{n+1}^-}\dfrac{e^x-e^{a_{n+1}}}{x-a_{n+1}}=e^{a_{n+1}}$，$k_{n+1}=\dfrac{e^{a_{n+2}}-e^{a_{n+1}}}{a_{n+2}-a_{n+1}}>\lim\limits_{n\to a_{n+1}^+}\dfrac{e^x-e^{a_{n+1}}}{x-a_{n+1}}=e^{a_{n+1}}$. 故 $k_n<k_{n+1}$，即弦 $A_nA_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的斜率随 n 单调递增.

[点评] 本题重点考查了函数、导数、数列、不等式等主干知识，综合性较强. 预测在 2008 年的高考中仍然如此.

3. 源于教材　高于教材

“植根于课本，着眼于提高”历来是命制高考试卷的基本原则，高考试题中课本例题、习题的影子比比皆是、多不胜数，因此，课本题及其改编题是高考题最主要的来源.

[例 3] (2007·湖北)在生产过程中，测得纤维产品的纤度(表示纤维粗细的一种量)共有 100 个数据，将数据分组如下表：

分组	频数
[1.30,1.34)	4
[1.34,1.38)	25
[1.38,1.42)	30
[1.42,1.46)	29
[1.46,1.50)	10
[1.50,1.54)	2
合计	100

(Ⅰ)在答题卡上完成频率分布表，并在给定的坐标系中画出频率分布直方图；

(Ⅱ)估计纤度落在[1.38,1.50)中的概率及纤度小于 1.40 的概率是多少；

(Ⅲ)统计方法中，同一组数据常用该组区间的中点值(例如区间[1.30,1.34)的中点值是 1.32)作为代表. 据此，估计纤度的期望.

[解析] (Ⅰ)

分组	频数	频率
[1.30,1.34)	4	0.04
[1.34,1.38)	25	0.25
[1.38,1.42)	30	0.30
[1.42,1.46)	29	0.29
[1.46,1.50)	10	0.10
[1.50,1.54)	2	0.02
合计	100	1.00

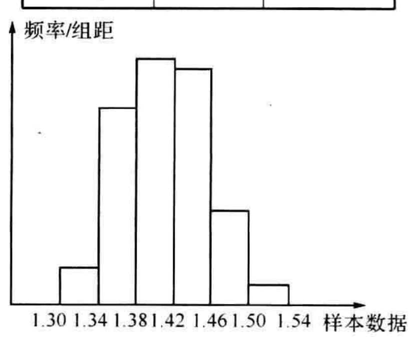

图 2

(Ⅱ)纤度落在[1.38,1.50)中的概率约为 $0.30+0.29+0.10=0.69$，纤度小于 1.40 的概率约为 $0.04+0.25+\frac{1}{2}\times 0.30=0.44$.

(Ⅲ)总体数据的期望约为 $1.32\times 0.04+1.36\times 0.25+1.40\times 0.30+1.44\times 0.29+1.48\times 0.10+1.52\times 0.02=1.4088$.

[点评] 本题是由全日制普通高级中学教科书数学第三册(选修Ⅱ)P_{29} 习题 1.4 的第 3 题改编加工而成，其实际背景由“维尼纶的纤度”改为“纤维产品的纤度”. 这充分体现了高考数学试题“来源于课本”的原则，有很好的导向作用.

4. 能力立意　突出理性

以能力为立意，突出对理性思维的考查、减少运算量是近几年数学高考命题的亮点，因此 2009 年高考数学命题仍会使这一亮点增添光彩.

[例 4] (2007·北京)已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$，由 A 中的元素构成两个相应的集合：$S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$，$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$. 其中$(a,b)$是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P.

(Ⅰ)检验集合$\{0,1,2,3\}$与$\{-1,2,3\}$是否具有性质 P，并对其中具有性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T；

(Ⅱ)对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$；

(Ⅲ)判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.

[解析] (Ⅰ)集合$\{0,1,2,3\}$不具有性质 P.

集合$\{-1,2,3\}$具有性质 P，其相应的集合 S 和 T 是 $S=\{(-1,3),(3,-1)\}$，$T=\{(2,-1),(2,3)\}$.

(Ⅱ)首先，由 A 中元素构成的有序数对(a_i,a_j)共有 k^2 个.

因为 $0\notin A$，所以$(a_i,a_i)\notin T(i=1,2,\cdots,k)$；

又因为当 $a\in A$ 时，$-a\notin A$，所以当$(a_i,a_j)\in T$ 时，$(a_j,a_i)\notin T(i,j=1,2,\cdots,k)$.

从而，集合 T 中元素的个数最多为 $\frac{1}{2}(k^2-k)=\frac{k(k-1)}{2}$，即 $n\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$.

(Ⅲ)$m=n$，证明如下：

(1)对于$(a,b)\in S$，根据定义，$a\in A,b\in A$，且 $a+b\in A$，从而$(a+b,b)\in T$.

如果(a,b)与(c,d)是 S 的不同元素，那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立，从而 $a+b=c+d$ 与 $b=d$ 中也至少有一个不成立. 故$(a+b,b)$与$(c+d,d)$也是 T 的不同元素.

可见，S 中元素的个数不多于 T 中元素的个数，即 $m\leqslant n$.

(2)对于$(a,b)\in T$，根据定义，$a\in A,b\in A$，且 $a-b\in A$，从而$(a-b,b)\in S$. 如果(a,b)与(c,d)是 T 的不同元素，那么 $a=c$ 与 $b=d$ 中至少有一个不成立，从而 $a-b=c-d$ 与 $b=d$ 中也至少有一个不成立，故$(a-b,b)$与$(c-d,d)$也是 S 的不同元素.

可见，T 中元素的个数不多于 S 中元素的个数，即 $n\leqslant m$.

由(1)(2)可知，$m=n$.

[点评] 本题背景新颖、探索性较强，解答本题需要较强的阅读理解和分析解决问题的能力，以及逻辑推理能力. 因而能有效地考查考生的创新能力.

5. 注重通法　淡化特技

2008 年的全国高考试题科学地处理了考查数学思想、方法、能力与难度之间的关系，将对创新意识的考查融于数学的基本问题之中，体现出突出主干知识、重在通性通法、能力考查贯穿全卷的特点，这肯定还是 2009 年高考的方向.

数学知识是数学学科的躯体，数学思想方法则是其灵魂，是适用于中学数学全部内容的通法. 数学思想方法可分为三

类：一类是具体操作方法，如配方法、消元法、换元法、迭代法、裂项相消法、错位相减法、特值法、待定系数法、同一法等；二是逻辑推理法，如综合法、分析法、反证法、类比法、探索法、解析法、归纳法等；三是具有宏观指导意义的数学思想方法，如：函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想、或然与必然的思想等七大类.

[例 5] (2006·北京)在下列四个函数中，满足性质："对于区间(1,2)上的任意 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$恒成立"的只有(　　)

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=|x|$

C. $f(x)=2^x$　　D. $f(x)=x^2$

[解析] 由 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$ 得 $\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|<1$. 其几何意义为函数$f(x)$在区间(1,2)上的图象上两点$P(x_1,f(x_1))$与$Q(x_2,f(x_2))$的连线斜率的绝对值小于1，勾画图象可知，仅 A 项中的函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 满足这一性质，故选 A.

[点评] 本题利用数形结合的思想方法使问题得到快捷的解答.

6. 纵横结合　交汇处命题

高考数学命题是从三个层面进行的：考查数学基础知识、数学思想方法和综合运用数学知识解决问题的能力，这三个层面是递进的关系，以数学基础知识为依托、以数学思想方法为核心、以综合运用数学知识解决问题的能力为最终考查目的，重视知识的综合和内在联系，尤其重视在知识网络的交汇处设计试题，力图实现全面考查数学基础知识和数学素质的目标.

[例 6] (2007·湖北)已知 m,n 为正整数.

(Ⅰ)用数学归纳法证明：当 $x>-1$ 时，$(1+x)^m\geqslant 1+mx$；

(Ⅱ)对于$n\geqslant 6$，已知$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}$，求证$\left(1-\frac{m}{n+3}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^m$，$m=1,2,\cdots,n$；

(Ⅲ)求出满足等式 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$ 的所有正整数 n.

[解析] (Ⅰ)用数学归纳法证明：

(ⅰ)当 $m=1$ 时，原不等式成立；当 $m=2$ 时，左边$=1+2x+x^2$，右边$=1+2x$，因为 $x^2\geqslant 0$，所以左边$\geqslant$右边，原不等式成立；

(ⅱ)假设当 $m=k$ 时，不等式成立，即$(1+x)^k\geqslant 1+kx$，则当 $m=k+1$ 时，

$\because x>-1$，$\therefore 1+x>0$，于是在不等式$(1+x)^k\geqslant 1+kx$ 两边同乘以 $1+x$ 得

$(1+x)^k\cdot(1+x)\geqslant(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x$，

所以$(1+x)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)x$. 即当 $m=k+1$ 时，不等式也成立.

综合(ⅰ)(ⅱ)知，对一切正整数 m，不等式都成立.

(Ⅱ)当 $n\geqslant 6$，$m\leqslant n$ 时，由(Ⅰ)得 $\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^m\geqslant 1-\frac{m}{n+3}>0$，

于是 $\left(1-\frac{m}{n+3}\right)^n\leqslant\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{mn}=\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n\right]^m<\left(\frac{1}{2}\right)^m$，$m=1,2,\cdots,n$.

(Ⅲ)由(Ⅱ)知，当 $n\geqslant 6$ 时，

$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2^n}<1$，

$\therefore\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{3}{n+3}\right)^n<1$.

即 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n<(n+3)^n$. 即当 $n\geqslant 6$ 时，不存在满足该等式的正整数 n.

故只需要讨论 $n=1,2,3,4,5$ 的情形：

当 $n=1$ 时，$3\neq 4$，等式不成立；

当 $n=2$ 时，$3^2+4^2=5^2$，等式成立；

当 $n=3$ 时，$3^3+4^3+5^3=6^3$，等式成立；

当 $n=4$ 时，$3^4+4^4+5^4+6^4$ 为偶数，而 7^4 为奇数，故 $3^4+4^4+5^4+6^4\neq 7^4$，等式不成立；

当 $n=5$ 时，同 $n=4$ 的情形可分析出，等式不成立.

综上，所求的 n 只有 $n=2,3$.

[点评] 本题在数学归纳法、数列、不等式的交汇处命题，分三个层次逐步递进，让考生拾级而上. 知识、方法、思想和能力有机地交融成一体，着重考查了综合应用数学知识和方法解决实际问题的能力，需要考生具备良好的思维品质. 从考后反馈的结果可知，只有具备较强的综合能力，优良的思维品质的考生才能作好本题第(2)、(3)问，从而区分和选拔真正有能力的学生.

7. 重视新增内容　突出课程理念

新教材新增的内容(简易逻辑、向量、概率与统计、导数、幂函数、函数与方程、三视图、算法初步、几何模型、合情推理与演绎推理、几何选讲、坐标系与参数方程等)给高中数学增添了活力，是近、现代数学在高中数学中的渗透. 蕴含着丰富的数学思想方法和数学语言，可以肯定新一届高考命题人员不仅会在分值上用不低于课时比例的重分(预测 2009 年在 70 分以上)考查新增内容，而且将尽可能地覆盖到所有新增内容上，更为突出地考查这些新增内容在解决相关问题的工具作用上.

《高中数学新课程》的颁布和实施，标志着我国的中学数学新一轮课程改革已经步入正轨，高考为适应新形势的需要，为推动新一轮课程改革前进步伐，在近几年高考命题时，就已经贯彻了新课程标准的理念，像倡导积极主动、勇于探索的学习方式，注重提高学生的数学思维能力，发展学生的应用意识，与时俱进地认识"双基"，强调本质，注意适度形式化，体现数学的人文价值等新课标的理念都已经在高考命题中得到了很好的体现.

[例 7] (2007·广东)图 3 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图，从左到右的各条形表示的学生人数依次

记为 A_1、A_2、…、A_{10}(如 A_2 表示身高(单位:cm)[150,155)内的学生人数). 图 4 是统计图 3 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160cm～180cm(含 160cm,不含 180cm)的学生人数,那么在流程图中的判断框内应填写的条件是(　　)

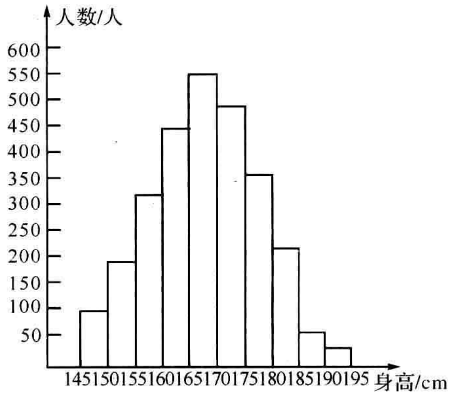

图 3

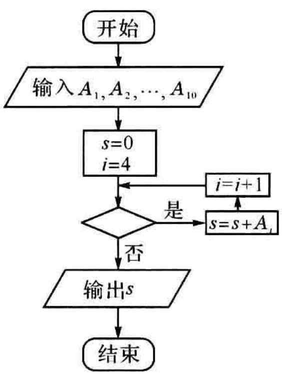

图 4

A. $i<9$　　　B. $i<8$　　　C. $i<7$　　　D. $i<6$

[解析] 流程图所描述的算法是求和:$A_4+A_5+A_6+\cdots+A_n$. 而由图 3 可知 160cm～180cm 的学生人数为 $A_4+A_5+A_6+A_7$. ∴判断框应填的条件是"$i<8$". 故选 B.

[点评] 本题在统计与算法初步的交汇处设计试题,突出考查了数学的工具性作用.

[例 8] (2007·山东文科)某公司计划 2008 年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 分钟的广告,广告总费用不超过 9 万元,甲、乙电视台的广告收费标准分别为 500 元/分钟和 200 元/分钟. 假定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告,能给公司带来的收益分别是 0.3 万元和 0.2 万元. 问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间,才能使公司的收益最大,最大收益是多少万元?

[解析] 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 x 分钟和 y 分钟,总收益为 z 元. 由题意得 $\begin{cases}x+y\leqslant 300,\\ 500x+200y\leqslant 90000,\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0.\end{cases}$ 目标函数为 $z=3000x+2000y$. 二元一次不等式组等价于 $\begin{cases}x+y\leqslant 300,\\ 5x+2y\leqslant 900,\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0.\end{cases}$ 作出二元一次不等式组所表示的平面区域,即可行域,如图 5.

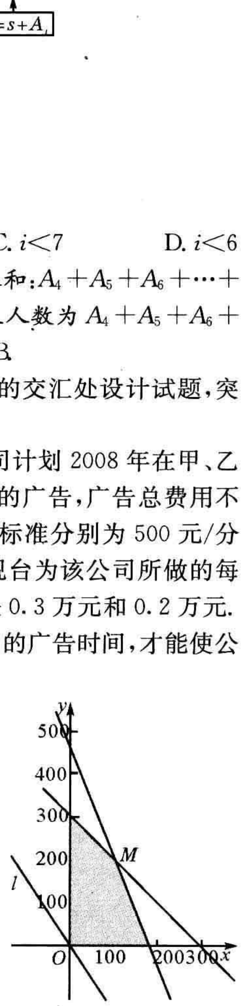

图 5

作直线 l:$3000x+2000y=0$,即 $3x+2y=0$. 平移直线 l,从图 5 中可知,当直线 l 过 M 点时,目标函数取得最大值. 联立 $\begin{cases}x+y=300,\\ 5x+2y=900.\end{cases}$ 解得 $x=100$, $y=200$. ∴点 M 的坐标为 $(100,200)$, ∴ $z_{\max}=3000x+2000y=700000$(元).

答:该公司在甲电视台做 100 分钟广告,在乙电视台做 200 分钟广告,公司的收益最大,最大收益是 70 万元.

[点评] 线性规划问题在高中数学中所占的课时比重不大,但在高考中却用高于课时比例来命题,体现了对新增内容的工具性作用的考查.

同时本题还体现了对新课标理念"发展学生的应用意识"的考查.

二、2009 届高考数学备考策略

抓纲务本　备考事半功倍

《考试大纲》是高考命题的依据,因而也是备考的准绳,而在高三备考中,时间紧、任务重,因此我们更应该透彻地研究考纲,只有这样,才能避免走弯路,把有限的时间用在刀刃上,突出重点,淡化弱点,优化备考.

通过对高考数学《考试大纲》的研究,提醒大家注意以下几点:

1.《考试大纲》对函数、数列、不等式、平面向量、圆锥曲线、概率、立体几何、导数都提出了较高要求,因而这些内容是高考命题的重点和热点,也是我们复习的重点,重点突破肯定有意想不到的收获.

2.《考试大纲》对有些内容进行了淡化处理. 如三角函数删去了和差化积与积化和差公式;解析几何中减少了复杂繁琐的运算;不等式中淡化了指数不等式与对数不等式的解法.

3. 现在的高考命题的一个秘诀是"简单题+简单题=难题". 由《考试大纲》所提供的命题原则——"在知识交汇点设计试题",以及本书中"高考真题"可知,现在的高考压轴题往往是几个重点和热点的考点知识有机组合. 其实它们都是来自简单题,只不过是题目给出的条件不那么直接,围绕问题设计了许多陷阱,需要解题者把简单题之间的组合关系找出来,从另外一个角度由题目给出的条件去推导结论. 知道了这一秘诀,在备考过程中,再不需要"深挖洞"——在各个考点上向深度和难度进军,而只需"广积粮"——系统掌握知识,再综合运用之;在解题时,心中底气十足,再也不会为难题而胆怯.

教材是《教学大纲》的具体体现,是知识的发生、发展过程的具体展现,因而也是高考命题的蓝本,特别是在现在中学教学改革提倡注重过程教学的今天更是如此,因此我们在高三备考中,更应该注重对教材的复习. 在复习教材时,应把复习的重点放在知识的发生、发展的过程上,突出"过程"的考查是现在高考命题的趋势(如 2004 年上海高考的解析几何的基本思想问题等). 在备考时,应把本书和教材有机地结合在一起,也就是在复习本书的每一个考点之前,先温习相关知识的教材内容,把握相关考点知识的发生、发展过程脉络.

夯实基础　构建知识网络

"万丈高楼平地起",要想在高考中取得优异成绩,我们必须夯实基础知识.《考试大纲》的命题原则明确规定"数学学科的系统性与严密性决定了数学知识之间深刻的内在联系,包括各部分知识在各自的发展过程中的纵向联系和各部分知识之间的横向联系. 要善于从本质上抓住这些联系,进而通过分类、梳理、综合,构建数学试题的结构框架". 因此,我们在备考过程

中,必须将高中所学习的知识归类、整理,理清整个高中数学的知识网络,形成一个完整的知识体系. 只有这样,在高考时,才有可能从整个数学学科的整体高度去分析问题、解决问题.

在夯实基础,构建知识网络时,应注意如下几点:

1. 理清考点. 对照《考试大纲》和本书的"知识整合·思维拓展",逐一梳理知识点,透彻地理解,准确地把握,熟练地掌握. 在理清考点时,要做到:一"全",高考第一轮复习重在"到边到角,不留死角",因此在复习时必须对《考试大纲》中所罗列的考点一一地复习到位. 首先应结合教材复习,把书中所罗列的全部知识点一一地复习,即使是那些属于现在高考所淡化或弱化处理的内容,也不要放过,因为这些内容也属于考试范围,只不过是命题时简单一些而已;二"重",由于高考命题"对于支撑学科知识体系的重点知识,考查时要保持较高的比例,构成数学试题的主体",因此我们复习时,必须突出重点才能获得高分,对这些知识,既要重点理解,更要强化记忆.

2. 理清联系. 良好的知识结构是高效应用知识的保证. 以本书为主线,结合教材,重新全面梳理知识、方法,注意知识结构的重组与概括,揭示其内在的联系与规律,从中提炼出思想方法. 在知识的深化过程中,切忌孤立对待知识、方法,而应将其前后联系,纵横比较、综合,自觉地将新知识及时纳入已有的知识系统中去,融代数、三角、立几、解几于一体,进而形成一个条理化、有序化、网络化、高效的有机认知结构. 如面对代数中的"四个二次":二次三项式、一元二次方程、一元二次不等式、二次函数时,以二次方程为基础、二次函数为主线,通过联系解析几何、三角函数、带参数的不等式等典型重要问题,建构知识,发展能力.

3. 理清题型. 为"稳定"大局的需要,高考命题具有较强的连续性,略有创新题型,因此,我们必须熟练地掌握高考的基本题型,以便在高考答题时,有如见到亲人面孔般地亲切,从而应答自如. 本书通过对《考试大纲》和近十几年高考试题深入研究,选录了近五年的高考真题,并对每道高考真题编拟了相应的变式题或拓展提高题,有利于我们把握高考命题脉络和走向,掌握高考命题规律.

4. 理清方法.《考试大纲》明确指出:"数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括,蕴含在数学知识发生、发展和应用的过程中,能够迁移并广泛应用于相关学科和社会生活中.""考查时要从学科整体意义和思想价值立意,要有明确的目的,加强针对性,注意通性通法,淡化特殊技巧,有效地检测考生对中学数学知识中所蕴含的数学思想和方法的掌握程度."常用的数学思想方法有:化归思想、函数与方程的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想以及配方法、换元法、待定系数法、反证法等等. 这些基本思想方法分散地渗透在中学数学的各个内容之中,如果在平时的学习中,把主要精力集中于数学新课的学习之中,缺乏对基本的数学思想和方法的归纳和总结,那么在高考的复习过程中,就应该有意识地进行归纳和总结,掌握科学的方法. 只有这样,才能在高考中灵活运用和综合运用所学的知识. 首先要通过各类题型熟练掌握具体的数学方法,如配方法、换元法、待定系数法、比较法、归纳法、分离参数法及分析法、综合法、反证法;其次要花大力气领悟几种重要的数学思想,如数形结合、分类讨论、化归与转化、函数与方程等. 因为高考已由知识测量型转化为能力检测型,并把重点放在数学思想方法的应用上,如分类讨论用于协调、缓和"矛盾",达到运用知识合理解题的思想. 要回顾和领悟的有:为什么要讨论? 何时讨论? 如何讨论? 常见的讨论类型有哪些? 通过典型试题的整理和反思,相信会有所收获.

注重思辨　优化备考过程

要想在2009年高考中取得较好的成绩,必须科学备考,优化备考过程才行. 这就要求我们要做到如下几点:

1. 注重思考. 现有的高考命题已经由"知识立意"转轨于"能力立意",注重了能力的考查. 因此,死抱书本、死背知识、死背题型肯定是无法在现在的高考中打胜仗,相反的在备考过程中注重思考,就有事半功倍之效. 例如,在使用本书时,看到书中的考点标题之时,却不忙于往下阅读,而闭目想一想,这个考点有哪些知识点,哪些解题方法规律,哪些题型,阅读完这个考点后,再对照检查一下,还有哪些知识点、方法、题型自己比较生疏,对此就应该强化巩固;在做完每一道高考题和拓展题后,请再想一想:本题是如何分析找到解题的切入点的? 这样解决有怎样的好处? 解题方法是什么? 体现了哪些思想方法? 还有没有好的解法? 需要注意哪些问题? 改变条件和结论将有怎样的变化? 能否横向类比、纵向拓展? 一般规律如何? ……

2. 强化理性思维. 数学是一门思维的学科,是培养理性思维的重要载体,通过空间想象、直观猜想、归纳想象、符号表达、推理演算、演绎证明和模式构建等诸多方面,对客观事物中的数量关系和数学模式做出判断,形成和发展理性思维,构成数学能力的主体. 复习中注重培养提出问题、分析问题和解决问题的能力,是数学教学目标之一,这是各种数学能力培养的最终归宿. 因此,在高考复习中,应注重数学思维方法的提炼与渗透,注重一题多思,一题多变,一题多解,横向联系,纵向发散,在理性思维中培养和发展数学思维能力.

3. 增强应用意识. 考查应用意识和创新意识,是近几年来数学高考命题进行新探索与改革的重要思路和举措. 加强应用意识的考查是时代发展的需要,是教育改革的需要,也是数学学科应用的广泛性的特点所决定的,这是考查分析问题能力和数学综合运用能力的体现. 本书在每一个考点之中都收录和编制了一些贴近课本、贴近生活的应用问题. 在分析解决这些问题之时,首先要有应用数学知识解决问题的意识;其次要克服对应用题的畏惧心理,事实上这几年高考应用题的建模难度不大,只要透彻地准确地理解题意,就能找到建模的"题眼";最后在解答应用题时,应注意掌握有效的解题方法技巧. 如在阅读题意时,由于应用题需要描述问题背景,还要引导我们关注社会和生活,进行相关的思想教育,这就导致了应用题的文字过长,因此在阅读时就应该像解答英语和语文中的阅读理解题那样有"泛读"和"精读"之分,也就是对涉及数量关系、位置关系等数学内容的语句进行"精读",一遍不行,再来一遍,而对于那些用来描述问题情景和德育教育的语句"泛读"即可. 再如在分析数量关系之时,不妨把题目中的已知条件、解题目标、数量关系和位置关系摘录下来,用图表把它们理顺、沟通,从建立相互联系找到解题的途径.

4. 倡导研究性学习. 研究性学习已进入高中数学教材,成为我国具有时代特色的数学教育改革的亮点和热点,因而也必然进入了数学高考. 2002年上海高考的优惠率问题,2003年全国文科高考的剪拼问题,2004年北京的分组问题,……都是非常优秀的研究性学习试题,因此,我们必须熟练地掌握解答这类研究性学习试题的方法技巧. 首先,我们在研究性学习时,必须注重自主探索和合作交流,学会语言的有机转换,学会建模,培养如何获取信息、加工信息,学习新知识的能力;其次,在解答这类研究性试题时,应注意动脑、动手实验,大胆尝试,勇于探索,并注意灵活地运用特例法、一般法、以旧带新法、直接法、递推法、数形结合法等方法进行探索研究;同时,

还要熟悉命题专家是如何命制这类“研究性学习试题”.本书中收集和编制了大量的研究性学习试题、探索题、开放题、创新题，只要把这些题目认真地做一遍，我们的研究创新能力将会大大地提高，从而在高考中应试这类试题时游刃有余.

5. 注意解题思维的优化.

2006年全国卷上有这样一道选择题：

用长度分别为2，3，4，5，6(单位：cm)的5根细木棒围成一个三角形(允许连接，但不允许折断)，能够得到的三角形的最大面积为(　　)

A. $8\sqrt{5}\text{cm}^2$　　B. $6\sqrt{10}\text{cm}^2$

C. $3\sqrt{55}\text{cm}^2$　　D. 20cm^2

这是一道鲜活的试题，在我们以往做过的试题里是无法找到类似问题的.它活在：用5根细木棒围成一个三角形，需要先将其变为也就是连接为3根细木棒.

在长度分别为2，3，4，5，6的5根木棒中，做相应的连接，使其变成3根细木棒，它们可以构成三角形的三边长，分别为：9，9，2；9，8，3；9，7，4；9，6，5；8，7，5；8，6，6；7，7，6.显然，这些三角形的周长是定值20.我们知道：当三角形的周长一定时，其面积以正三角形的面积为最大.再从上面列举的三角形的三边得知，7，7，6这一组是最接近的，故应当选B.

需要提及的是，如果我们想到了定理(课本上有类似的习题，找找看!)：当三角形的周长一定时，其面积以正三角形的面积为最大，就没有必要一一列出所有的三角形了，只要寻找接近等边三角形的那一个就行了.

一个问题是：如果你身处考场上，没有想到这个定理，你能解答该题吗?

解题思维的优化，解答思维链条的简缩，需要我们不断的反思、不断的争鸣、不断地总结.问题生于疑，疑难解于思，只有用思想去学习，去领悟数学里的奥妙，才能获得比较好的学习效果.

数学题目本身是“解答问题”的信息源，题目中的信息往往通过语言文字、公式符号、数学图形，以及它们之间的关系间接地告诉我们的.所以，读题、审题一定要逐字逐句看清楚、搞明白，力求从语法结构、逻辑关系、数学含义等方面真正看懂题目，弄清条件是什么(告诉解题者从何入手)?结论是什么(告诉解题者向何方向前进)?它们分别和哪些知识有联系?从自己掌握的知识模块中提取与之相适应的解答问题的方法，通过已建立的思维链，把知识方法输入大脑，并在大脑里进行整合，找到解题途径，并注意容易出现错误的点，想出解答方案.只有细致地审题，才能从题目本身获得尽可能多的有用的信息，这是解题思维训练的必经之路，也是提高解答数学问题效率的好办法.

强化训练　提高解题能力

老师讲得再好，书讲得再详细，也无法变成自己的能力，只有经过自己的强化练习，才能把所讲的转化为自己的能力.在练习时应注意如下几点：

1. 必须准确把握《考试大纲》.只有准确把握《考试大纲》，才能使自己在训练时有的放矢.准确把握考纲，就能鉴别有些资料有些问题或有的模拟试题是否超纲，对于这些超纲的而且是难度过大(或运算量过大)的题目坚决不做，这样就避免把宝贵的时间用在做负功上；准确把握考纲，找到自己的缺陷和漏洞，有针对地选择一些练习来进行强化，从而达到查漏补缺的目的；准确地把握考纲，就能把握高考命题的重点和热点，找到解题的难点，这样我们就可以有选择地进行强化训练，从而做到重点突出.

2. 见缝插针地强化训练.在高三复习时，老师将会提供大量的强化练习题和测试、模拟题，再加上本书中也提供了适量的高考真题和拓展题，对于这些题目，如果我们被动地应试，就会形成恶性循环：大量试题做不动再加上有一定难度而做不出来→产生了厌恶的心理→降低解题速度和增加解题受挫的概率→更厌恶→更受挫→……相反如果我们以积极的态度、以欣赏的心理去做这些题目，同时加大基础题的训练，就会步入良性循环：强化训练→提高解题速度→成就感→强化解题兴趣→提高解题速度→……在强化训练时，我们不仅要做好老师布置的和本书中所提供的题目，更要注意抓住每一个强化训练的机会，有效地提高分析、解决问题的能力.如在听讲时，当老师板书题目时，不忙于抄题、被动地听老师讲解，而是自己先做一做，当做不出来之时，再听老师的讲解，课后再去整理笔记，这样的听讲效率会更高，效果会更好.

3. 加强综合题的强化训练.首先，要明白综合训练题的重要性.数学综合性试题常常是高考试卷中把关题和压轴题，在高考中举足轻重，高考的区分层次和选拔使命主要靠这类题型来完成预设目标.目前的高考综合题已经由单纯的知识叠加型转换为知识、方法和能力综合型，尤其是创新能力型试题.综合题是高考数学题的精华部分，具有知识容量大、解题方法多、能力要求高、突显数学思想方法的运用以及要求考生具有一定的创新意识和创新能力等特点.因此，解答好综合题对于那些想考一流大学，并对数学成绩期望值较高的同学来说，是一道生命线，往往“成也萧何，败也萧何”；对于那些定位在二流大学的学生而言，这里可是放手一搏的好地方.其次，要掌握解答综合题的诀窍：审题时要把握好“三性”，即目的性(盯住目标)、准确性(准确把握基础知识)、隐含性(挖掘隐含条件)；分析问题时要注意“三化”，即具体化、简单化(把复杂问题分解为简单问题)、和谐化(如数与形的和谐统一，抓住知识间相互联系)；探讨问题时运用“三转”，即语言转换、概念转换、数形转换等等.最后，强化训练要得法：可以先做章节内的小综合问题，再做跨章节的大问题；在练习时，如果该题难度确实过大、一时想不出来，就不要死盯住不放(因为此阶段时间有限)，不妨对照答案，找到症结所在，把它再做一遍.

4. 强化新教材中新增内容的训练.新增内容是新课程的活力和精髓，是近、现代数学在高中的渗透，无论是微积分、向量，还是概率、统计，都蕴含着丰富的数学思想方法和数学语言.可以肯定新一届高考的命题专家不仅会在分值上用不低于课时比例的重分(即50分左右的分值)来考查新增内容，而且将可能尽量做到在覆盖所有新增内容的同时重点考查某些主干知识和方法.命题专家还将尽可能注意凸现这些新的数学内容在解题中的独特功能，优化解题过程，加大区分度.例如对函数的极值或函数的单调性问题，沿用定义法势必有较长的计算和表述，而导数法则简捷易算.因此，我们必须对新教材中新增内容进行强化训练，其中新教材中新增的内容有：简易逻辑、平面向量、线性规划、空间向量、概率、随机变量与统计、函数的极限性与连续性、导数.本书中，加大了这些新增内容试题的比重，只要我们熟练地掌握这些题型的基本解法，在高考中就不会在这方面丢分.

最后祝大家在2009年高考中取得优异的成绩!

第一章　集合与简易逻辑

第1讲　集　　合

考纲解读

1. 理解集合的概念，了解包含的意义，会表示一些简单的集合
2. 理解子集的概念，了解包含、相等关系的意义
3. 理解交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的定义

高考回顾

2006·山东 T_1　2005·湖北 T_1　2006·江西 T_1
2006·湖南 T_8　2006·上海 T_1　2005·北京 T_1
2007·福建 T_3　2007·辽宁 T_1　2006·安徽 T_2
2007·陕西 T_{12}　2007·山东 T_2　2007·海南、宁夏 T_7

知识整合·思维拓展

一、集合的概念

由一些确定对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象叫做这个集合的元素.

集合常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，元素常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 元素与集合之间的关系为“属于”与“不属于”，即$a\in A$或$a\notin A$.

集合常用表示方法有：列举法、描述法、Venn 图法.

注意　(1)集合的元素必须满足三性：确定性、互异性、无序性. 解决与集合有关问题时，一方面，在解答完毕之时，不要忘记检验集合的元素是否满足这三性；另一方面，善于抓住集合元素的三性，就能顺利地找到解题的切入点.

(2)要注意准确理解符号描述法$\{x|p(x)\}$，其“|”前为元素所具有的形式，“|”后为元素所具有的属性 $p(x)$. 要注意下列几个集合：

①$\{x|f(x)>0\}$表示使不等式 $f(x)>0$ 成立的数集；

②$\{x|y=f(x)\}$表示函数 $y=f(x)$的定义域构成的集合；

③$\{y|y=f(x)\}$表示函数 $y=f(x)$的值域构成的集合；

④$\{x|f(x)=0\}$是方程 $f(x)=0$ 的解集；

⑤$\{(x,y)|F(x,y)=0\}$是曲线 $F(x,y)=0$ 上的点构成的集合.

二、集合间的关系

(1)对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

(2)若 $A\subseteq B$，且 B 中至少有一个元素不在集合 A 中，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

(3)集合$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.

注意　集合与集合之间的关系有子集(包含、包含于)、真子集(真包含、真包含于)、相等. 在判断集合与集合之间的关系时，如果能确定真包含(或真包含于)则不能用包含($\subseteq$)表示. 要注意区分“$\in$”、“$\subseteq$”、“$\subsetneqq$”的含义，并能正确地运用它解题.

三、集合的运算

(1)交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$，且$x\in B\}$. 性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$.

(2)并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$，或$x\in B\}$. 性质：$A\cup B=B\cup A$，$A\cup\varnothing=A$.

(3)补集：已知全集 U，集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集，记作$\complement_U A$，即$\complement_U A=\{x|x\in U$，且$x\notin A\}$. 性质：$A\cup(\complement_U A)=U$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$\complement_U(\complement_U A)=A$.

注意　集合的交、并、补运算是集合的核心，其关键在于对“且”与“或”的正确理解：“且”的意思与通常理解的“既是……同时是……”是一样的；“或”则与通常理解的“非此即彼”有区别，它可以是两者兼有.

(4)几个重要结论：

①摩根法则：$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

②集合的交集、并集与子集的关系：$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

③容斥原理：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$(其中 $\mathrm{card}(A)$表示有限集合 A 的元素个数).

四、解决集合问题应注意的事项

①明确集合的元素的意义，它是哪种类型的对象(如数、点、方程、图形等)；②弄清集合由哪些元素所组成，这就需要我们把抽象的问题具体化、形象化，也就是善于对集合的三种语言(文字、符号、图形)之间进行相互转化，同时还要善于对用多个参数表示的符号描述法$\{x|P(x)\}$的集合化到最简形式；③要善于运用数形结合、分类讨论、化归与转化等数学思想方法来解决集合的问题；④集合问题多与函数、方程、不等式等知识综合在一起，要注意各类知识的融会贯通.

考点归类·样题剖析

考点1 集合概念的理解

［例1］(2006·山东)定义集合运算：$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$.设集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合$A\odot B$的所有元素之和为(D) 6+12

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

［解析］ $\because A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$,$\therefore$当 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$时,$A\odot B=\{0,6,12\}$,于是 $A\odot B$ 的所有元素之和为 $0+6+12=18$.故选 D.

［点评］ 本例的解题关键在于对集合概念的理解,特别是集合元素具有互异性的灵活运用.

［变式1］ (2007·武汉)已知集合 $A=\{0,2,3\}$,定义集合运算 $A※A=\{x|x=a\cdot b,a\in A,b\in A\}$,则 $A※A=$( )

A. $\{0,2\}$　　B. $\{0,6\}$

C. $\{0,4,6,9\}$　　D. $\{0,2,3\}$

［解析］ 注意这里的元素 a,b 可以相同,所以 $A※A$ 不仅仅是集合 A 中的互异元素之积.故选 C.

考点2 集合表示法的灵活运用

［例2］ (2006·上海春季)若集合 $A=\{y|y=x^{\frac{1}{3}},-1\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\left\{y\,\middle|\,y=2-\frac{1}{x},0<x\leqslant 1\right\}$,则 $A\cap B$ 等于(D)

A. $(-\infty,1]$　　B. $[-1,1]$

C. $\varnothing$　　D. $\{1\}$

［解析］ $\because$函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在$[-1,1]$上递增,$\therefore A=[-1,1]$.又 $y'=\left(2-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}>0$,$\therefore y=2-\frac{1}{x}$ 在$(0,1]$上递增,$\therefore B=(-\infty,1]$.$\therefore A\cap B=[-1,1]$.故选 B.

［点评］ 解答本例的关键在于对集合描述法的正确理解,事实上这里的集合 A 和 B 分别表示函数 $y=x^{\frac{1}{3}}(-1\leqslant x\leqslant 1)$和$y=2-\frac{1}{x}(0<x\leqslant 1)$的值域.

［变式2］ (2007·黄冈)集合 $P=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$R=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$a\in P$,$b\in Q$,则有(B)

A. $a+b\in P$

B. $a+b\in Q$

C. $a+b\in R$

D. $a+b$ 不属于 P,Q,R 中任意一个

［解析］ 集合用描述法写出,要求判断 $a+b$ 与三个集合的关系,要想分析 $a+b$ 属于哪个集合,关键是看其结构符合哪个集合的元素特征.设 $a=2m(m\in\mathbf{Z})$,$b=2n+1(n\in\mathbf{Z})$,

$\therefore a+b=2m+2n+1=2(m+n)+1$,

又 $m+n\in\mathbf{Z}$,故与集合 Q 中元素特征 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$相符合,说明 $a+b\in Q$,故选 B.

［例3］ (2005·全国)设 I 为全集,S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下面论断正确的是(C)

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　　B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　　D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

［解析］ 解法一:$\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\complement_I(S_1\cup S_2)\cap\complement_I S_3=\complement_I(S_1\cup S_2\cup S_3)=\complement_I I=\varnothing$.故选 C.

解法二:由图 1-1 可知,A、B、D 均不正确,而 C 正确,故选 C.

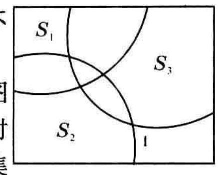

图 1-1

［点评］ 本例的解法二利用 Venn 图的形象直观快速地得到答案.一般地,对于抽象(没有给出集合的具体元素)的集合问题宜用 Venn 图来分析解决.

［变式3］ (2007·宜昌)已知全集 U,M、N 是 U 的非空子集,且$\complement_U M\supseteq N$,则必有(A)

A. $M\subseteq\complement_U N$　　B. $M\subsetneqq\complement_U N$

C. $\complement_U M=\complement_U N$　　D. $M=N$

［解析］ 这里 M 与 N 是两个抽象的集合,因此经过补集运算后,它们之间的关系就更加抽象了,而这时用图示法,则使问题变得形象、直观起来.由图 1-2 可知 $M\subseteq\complement_U N$.要注意:由已知有可能出现$\complement_U M=N$.因此有可能$\complement_U N=M$.故选 A.

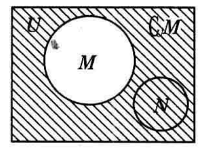

图 1-2

考点3 集合间关系的判定

［例4］ (2005·北京)设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x>1\}$,$P=\{x|x^2>1\}$,则下列关系中正确的是(C)

A. $M=P$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M\subsetneqq P$　　D. $\complement_U M\cap P=\varnothing$

［解析］ $\because$ $P=\{x|x^2>1\}=\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$,$\therefore$ $M\subsetneqq P$.故选 C.

［点评］ 判定集合间的关系的关键是弄清集合的元素的构成.即弄清楚集合由哪些元素所组成.

［变式4］ (2007·九江)已知 $A=\left\{x\,\middle|\,x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$C=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{P}{2}+\frac{1}{6},P\in\mathbf{Z}\right\}$,则 A、B、C 的关系是(B)

A. $A=B\subsetneqq C$　　B. $A\subsetneqq B=C$

C. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$　　D. $B\subsetneqq C\subsetneqq A$

［解析］ 由列举法可知 $A\subsetneqq B=C$,故选 B.

考点4 集合的运算

［例5］ (2006·重庆)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{3,4,5\}$,则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$(D)

A. $\{1,6\}$　　B. $\{4,5\}$

C. $\{2,3,4,5,7\}$　　D. $\{1,2,3,6,7\}$

［解析］ $\because A\cap B=\{4,5\}$,$\therefore(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,6,7\}$.故选 D.

［点评］ 本例利用摩根法则简化了解题过程.

［变式5］ (2007·广州)函数 $y=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$的定义域为集合 M,关于 x 的不等式 $\lg(2ax)<\lg(a+x)(a\in\mathbf{R}^+)$的解集为 N,求使 $M\cap N=M$ 的实数 a 的取值范围.

［解析］ $M=\{x|1<x\leqslant 2\}$,由 $\lg(2ax)<\lg(a+x)$得:$2ax<a+x$ 且 $2ax>0$,所以$(2a-1)x<a$,且 $x>0$;

①当 $2a-1>0$ 时,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,$0<x<\frac{a}{2a-1}$,即 $N=$

$\left\{x \mid 0<x<\frac{a}{2a-1}\right\}$. 又 $M\cap N=M$, 只需要 $\frac{a}{2a-1}$ 比 2 大, 所以 $a\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$; ② 当 $2a-1\leqslant 0$ 即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $x>0$, 即 $N=\{x|x>0\}$, 此时满足 $M\cap N=M$. 由①②可以知道 a 的范围是 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

考点 5　集合的开放问题

[例 6]　(2006·辽宁)设 $\oplus$ 是 R 上的一个运算, A 是 R 的非空子集, 若对任意 $a,b\in A$, 有 $a\oplus b\in A$, 则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭, 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)四则运算都封闭的是(　　)

A. 自然数集　　B. 整数集

C. 有理数集　　D. 无理数集

[解析]　自然数集及整数集对除法不封闭, 例如, $5\in\mathbf{Z}$, $6\in\mathbf{Z}$, $5\div 6\notin\mathbf{Z}$. 无理数集对乘法、除法不封闭, 例如, $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 为无理数, 则 $\frac{a}{b}$, ab 不是无理数. 故选 C.

[点评]　解答本题的关键在于对新定义的正确理解.

[变式 6]　(2007·南京)设※是集合 A 中元素的一种运算, 如果对于任意的 $x\neq\pm y$, x、$y\in A$, 都有 $x※y\in A$, 则称运算※对集合 A 是封闭的, 若 $M=\{x|x=a+\sqrt{2}b, a,b\in\mathbf{Z}\}$, 则对集合 M 不封闭的运算是(　　)

A. 加法　　B. 减法　　C. 乘法　　D. 除法

[解析]　集合 M 中任意两数之商不一定可以表示为 $a+\sqrt{2}b(a,b\in\mathbf{Z})$ 的形式, 比如 $\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{7}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{2}$, 其中 $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{7}$ 不是整数. 故选 D.

高考真题集训

1. (2005·湖北)设 P、Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P, b\in Q\}$, 若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　)

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. (2006·湖南)设函数 $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, 集合 $M=\{x|f(x)<0\}$, $P=\{x|f'(x)>0\}$. 若 $M\subsetneqq P$, 则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

3. (2006·江苏)若 A、B、C 为三个集合, $A\cup B=B\cap C$, 则一定有(　　)

A. $A\subseteq C$　　B. $C\subseteq A$　　C. $A\neq C$　　D. $A=\varnothing$

4. (2006·辽宁)设集合 $A=\{1,2\}$, 则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 8

5. (2005·浙江)设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$, $P=\{1,2,3,4,5\}$, $Q=\{3,4,5,6,7\}$. 记 $\widehat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in P\}$, $\widehat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in Q\}$, 则 $(\widehat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\widehat{Q})\cup(\widehat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\widehat{P})=$(　　)

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,6,7\}$

6. (2007·辽宁)设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$(　　)

A. $\{1\}$　　B. $\{5\}$　　C. $\{2,4\}$　　D. $\{1,2,4,5\}$

7. (2007·陕西)设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, 在 S 上定义运算 $\oplus$ 为: $A_i\oplus A_j=A_k$, 其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数, $i,j=0,1,2,3$. 则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. (2007·山东)已知集合 $M=\{-1,1\}$, $N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<2^{x+1}<4, x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap N=$(　　)

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\{-1,0\}$

9. (2007·海南、宁夏)设集合 $A=\{x|x>-1\}$, $B=\{x|-2<x<2\}$, 则 $A\cup B=$(　　)

A. $\{x|x>-2\}$　　B. $\{x|x>-1\}$

C. $\{x|-2<x<-1\}$　　D. $\{x|-1<x<2\}$

10. (2007·广东)设 S 是至少含有两个元素的集合. 在 S 上定义了一个二元运算"$*$"(即对任意的 $a,b\in\mathbf{S}$, 对于有序元素对 (a,b), 在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应). 若对任意 $a,b\in\mathbf{S}$, 有 $a*(b*a)=b$, 则对任意的 $a,b\in\mathbf{S}$, 下列等式不恒成立的是(　　)

A. $(a*b)*a=a$　　B. $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

C. $b*(b*b)=b$　　D. $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

11. (2007·福建)已知集合 $A=\{x|x<a\}$, $B=\{x|1<x<2\}$, 且 $A\cup(\complement_R B)=R$, 则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $a\leqslant 1$　　B. $a<1$　　C. $a\geqslant 2$　　D. $a>2$

12. (2007·浙江)设集合 $U=\{1,3,5,6,8\}$, $A=\{1,6\}$, $B=\{5,6,8\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=$(　　)

A. $\{6\}$　　B. $\{5,8\}$　　C. $\{6,8\}$　　D. $\{3,5,6,8\}$

13. (2007·湖北)设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P-Q=\{x|x\in\mathbf{P}$ 且 $x\notin Q\}$, 如果 $P=\{x|\log_2 x<1\}$, $Q=\{x||x-2|<1\}$, 那么 $P-Q$ 等于(　　)

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|2\leqslant x<3\}$

14. (2006·上海)已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$, 集合 $B=\{3,m^2\}$. 若 $B\subseteq A$, 则实数 $m=$________.

高考试题猜想

15. (2008·黄冈)已知集合 $A=\{(x,y)|y=\sin x, x\in(0,2\pi)\}$, $B=\{(x,y)|y=a, a\in\mathbf{R}\}$, 则集合 $A\cap B$ 的子集个数最多有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 4 个　　D. 8 个

16. (2008·济南)设集合 $M=\{x|x-m\leqslant 0\}$, $N=\{y|y=(x-1)^2-1, x\in\mathbf{R}\}$, 若 $M\cap N=\varnothing$, 则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $m\geqslant -1$　　B. $m>-1$

C. $m\leqslant -1$　　D. $m<-1$

17. (2008·南昌)若 $a>b>0$, 集合 $M=\left\{x\,\middle|\,b<x<\frac{a+b}{2}\right\}$, $N=\{x|\sqrt{ab}<x<a\}$, 则 $M\cap N$ 表示的集合为(　　)

A. $\{x|b<x<\sqrt{ab}\}$　　B. $\{x|b<x<a\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,\sqrt{ab}<x<\frac{a+b}{2}\right\}$　　D. $\left\{x\,\middle|\,\frac{a+b}{2}<x<a\right\}$

18. (2008·黄石)两个集合 A 与 B 之差记作"A/B", 定义为: $A/B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$, 如果集合 $A=\{x|\log_2 x<1, x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $B=\{x||x-2|<1, x\in\mathbf{R}\}$, 那么 A/B 等于(　　)

A. $\{x|x\leqslant1\}$　　B. $\{x|x\geqslant3\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|0<x\leqslant1\}$

19.(2008·深圳)已知集合 $M=\{(x,y)\}3x+4y-12<0,x,y\in\mathbf{N}^*\}$，则集合 M 的真子集个数是(　　)

A. 8个　B. 7个　C. 6个　D. 4个

20.(2008·重庆)对某地农村家庭拥有电器情况抽样调查如下：有电视机的占60%；有洗衣机的占55%；有电冰箱的占45%；至少有上述三种电器中的两种及两种以上的占55%；三种都有的占20%. 那么没有任何一种电器的家庭占的比例是(　　)

A. 5%　B. 10%　C. 12%　D. 15%

21.(2008·北京朝阳)设 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x|f(x)=x,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x,x\in\mathbf{R}\}$，则 A 与 B 的关系是(　　)

A. $A\cap B=A$　　B. $A\cap B=\varnothing$

C. $A\cup B=R$　　D. $A\cup B=\{-1,0,1\}$

22.(2008·福州)设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 A、B 都是 U 的子集，若 $A\cap B=\{1,3,5\}$，则称 A、B 为“理想配集”，记作 (A,B). 这样的“理想配集” (A,B) 共有(　　)

A. 7个　B. 8个　C. 27个　D. 28个

23.(2008·北京东城)集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个“孤立元素”，那么 S 中无“孤立元素”的4元子集的个数是(　　)

A. 4个　B. 5个　C. 6个　D. 7个

24.(2008·黄石)设满足 $y\geqslant|x-1|$ 的点 (x,y) 的集合为 A，满足 $y\leqslant-|x|+2$ 的点 (x,y) 的集合为 B，则 $A\cap B$ 所表示图形的面积是________.

25.(2008·苏州)方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根为 α、β，方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根为 γ、δ，其中 α、β、γ、δ 互不相等，设集合 $M=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，且作集合 $S=\{x|x=u+v,u\in M,u\in M,u\neq v\}$，$P=\{x|x=uv,u\in M,v\in M,u\neq v\}$，若 $S=\{5,7,8,9,10,12\}$，$P=\{6,10,14,15,21,35\}$，求 a,b,c.

26.(2008·黄冈)某班参加数学课外活动小组有22人，参加物理课外活动小组有18人，参加化学课外活动小组有16人，至少参加一科课外活动小组的有36人，则三科课外活动小组都参加的同学至多有多少人?

27.(2008·北京海淀)对某些正整数，存在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 n 个不同子集，满足下列条件：对任意不大于 n 的正整数 i,j，①$i\notin A_i$，且每个 A_i 至少含有三个元素；②$i\in A_j$ 的充要条件是 $j\notin A_i$(其中 $i\neq j$). 为了表示这些子集，作 n 行 n 列的数表，规定第 i 行第 j 列的数为

$$a_{ij}=\begin{cases}0,当\ i\notin A_j,\\1,当\ i\in A_j.\end{cases}$$

(1)求该数表中每列至少有多少个1；

(2)用 n 表示该数表中1的个数，并证明 $n\geqslant7$；

(3)请构造出集合 $\{1,2,\cdots,7\}$ 的7个不同子集 $A_1,A_2,\cdots,A_7$，使得 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 满足题设(写出一种即可).

命题趋势

集合语言是现代数学的基本语言，因而几乎每年高考必考. 主要以选择、填空题形式出现，若直接考查，则重点考查集合间关系的判定和集合运算；一般是考查具体集合的问题，有时也考查抽象集合的问题；若间接考查，则突出体现集合语言的工具性，如求函数的定义域、值域、变量的取值范围，解方程、不等式，求曲线交点，平面区域的表示等问题.

第2讲　含绝对值的不等式和一元二次不等式

考纲解读

1. 掌握含有绝对值的不等式的解法
2. 掌握一元二次不等式的解法
3. 掌握可化为一元二次不等式的不等式解法
4. 能运用一元二次不等式的有关知识解决实际问题

高考回顾

2006·全国Ⅰ T_1　2006·福建 T_4　2006·安徽 T_4

2006·陕西 T_1　2006·四川 T_1　2007·湖南 T_1

2006·全国Ⅱ T_1　2006·江西 T_1

2002·北京春 T_{21}　2004·北京 T_{19}

知识整合·思维拓展

一、含有绝对值的不等式的解法

解绝对值不等式的关键在于去掉绝对值的符号，为此可利用：(1)定义法；

(2)零点分段法；

(3)不等式两端均为非负实数时，不等式两端平方；

(4)图象法或“形数结合”思想；

(5)不等式的同解变形原理. 即

①$|x|<a,(a>0)\Leftrightarrow-a<x<a$；

②$|x|>a,(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$；

③$|ax+b|<c,(c>0)\Leftrightarrow-c<ax+b<c$；

④$|ax+b|>c,(c>0)\Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$；

⑤$a\leqslant|x|\leqslant b,(b>a>0)\Leftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$ 或 $-b\leqslant x\leqslant -a$.

二、一元二次不等式的解法

1. 一元二次不等式的解法

先将不等式化为标准形式：$ax^2+bx+c>0$（或<0）且 $a>0$，再利用下面的不等式解的结构写出其解集.

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两根为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2,\Delta=b^2-4ac$，不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集为：

(1)$\Delta>0$ 时，解集为$\{x|x>x_2$ 或 $x<x_1\}$；

(2)$\Delta=0$ 时，解集为$\left\{x|x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$；

(3)当 $\Delta<0$ 时，解集为 $\mathbf{R}$.

不等式 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集为：

①$\Delta>0$ 时，$\{x|x_1<x<x_2\}$；

②$\Delta=0$ 时，$\varnothing$；

③$\Delta<0$ 时，$\varnothing$.

2. 二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的联系.

从函数的观点来看，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 的解集，就是二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 在 x 轴上方部分的点的横坐标 x 的集合. 因此，利用二次函数的图象就可以解一元二次不等式.

3. 解一元二次不等式时，首先检查二次项系数. 若 $a>0$，则利用上述解的结构；若 $a<0$，需将二次项系数化为正值，即不等式两边同乘-1，此时，不等号方向改变. 并注意含字母根的大小的判定与讨论.

三、分式不等式和一元高次不等式解法

1. 任何一个一元有理分式不等式，经过移项、通分和化简，都可以化成标准形式：$\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ 或 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0$（其中 $P(x)$，$Q(x)$ 都表示 x 的某一整式），然后按照商的符号法则转化成不等式组求解；也可以转化为整式不等式来求解，即 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0\Leftrightarrow P(x)Q(x)>0,\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0\Leftrightarrow P(x)Q(x)<0$.

注意 解带有等号的分式不等式时，转化为整式不等式后，应考虑分子可为零，而分母不能为零.

2. 解一元高次不等式时，用根轴法较简单. 即：先把不等式化为一端为零，再对另一端分解因式，并求出它的零点，把这些零点标在数轴上，再用一条光滑的曲线，从 x 轴的右端上方起，依次穿过这些零点，则大于零的不等式的解对应曲线在 x 轴上方部分的实数 x 的取值范围；小于零的不等式的解对应着曲线在 x 轴下方部分的实数 x 的取值范围.

注意 (1)在画数轴时一般应标上原点 O，但它不一定是零点. 因此画曲线时，一定要考虑曲线是否能穿过它；(2)如果分解后出现相同因式（如$(x-4)^2(x+1)^3(x-2)<0$），则可以去掉其偶次幂，但应注意去掉它后不能扩大其取值范围）即不等式化为$(x+1)(x-2)<0$ 且 $x-4\neq0$）；(3)如果分解后出现在实数范围内不能分解的因式，把它丢掉即可，如$(x-1)(x+2)x(x^2-x+1)<0$ 等价于$(x-1)(x+2)x<0$.

考点归类·样题剖析

考点 1 含绝对值不等式的解法

[例 1] （2007·北京东城）不等式$\left|\dfrac{mx-1}{x}\right|>m(m>0)$的解集为（ D ）

A. $\{x|x>m\}$　　B. $\left\{x|x<\dfrac{1}{2m}\right\}$

C. $\left\{x|\dfrac{1}{2m}<x<\dfrac{1}{m}\right\}$　　D. $\left\{x|x<0\text{ 或 }0<x<\dfrac{1}{2m}\right\}$

[解析] 原不等式变形为$|mx-1|>m|x|$，

两边平方得 $m^2x^2-2mx+1>m^2x^2$，

即 $2mx<1$ 且$m>0$，∴ $x<\dfrac{1}{2m}$且 $x\neq0$.

∴ 不等式的解集为$\left\{x|x<0\text{ 或 }0<x<\dfrac{1}{2m}\right\}$. 故选 D.

[点评] 本题将原不等式变形为$|ax+b|>|cx+d|$两边平方去掉绝对值，从而避免了分类讨论.

[变式 1] （2007·黄冈）设 $a,b\in\mathbf{R}$，试求$|ax+2|\geqslant|2x+b|$的解集为实数集 $\mathbf{R}$ 时 a,b 应满足的条件.

[解析] 由$|ax+2|\geqslant|2x+b|$，两边平方后得：$(ax+2)^2\geqslant(2x+b)^2$，∴ $(4-a^2)x^2+4(b-a)x+b^2-4\leqslant0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

若 $4-a^2=0$ 即 $a=\pm2$，当 $a=2$ 时，不等式即 $4(b-a)x+b^2-4\leqslant0$，若 $b=2$，其解集为 $\mathbf{R}$.

同理，当 $a=-2$ 时，则 $b=-2$，其解集为 $\mathbf{R}$.

当 $4-a^2\neq0$ 时，则由 $4-a^2<0$ 且 $\Delta\leqslant0$，可以得到 $a^2>4$ 且 $ab=4$.

综上所述 a,b 应满足的条件是$|a|\geqslant2$ 且 $ab=4$.

[例 2] （2006·石家庄）(1)求不等式$|ax-1|<x(a>0)$的解集 M；

(2)欲使函数 $f(x)=\cos\pi x-\sin\pi x$ 在(1)所得集合 M 上单调递减，求 a 的最小值.

[解析] (1)由$|ax-1|<x\Leftrightarrow\begin{cases}ax-1<x\\ax-1>-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+1)x>1,\\(a-1)x<1.\end{cases}$

①当 $0<a\leqslant1$ 时，$x>\dfrac{1}{a+1}$；

②当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a+1}<x<\dfrac{1}{a-1}$.

∴ 当 $0<a\leqslant1$ 时，$M=\left\{x|x>\dfrac{1}{a+1}\right\}$；

当 $a>1$ 时，$M=\left\{x|\dfrac{1}{a+1}<x<\dfrac{1}{a-1}\right\}$.

(2)$f(x)=\cos\pi x-\sin\pi x=\sqrt{2}\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

由 $2k\pi\leqslant\pi x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $2k-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant2k+\dfrac{3}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

∴ 当 $0<a\leqslant1$ 时，$f(x)$在 M 上不单调递减.

当 $a>1$ 时，须$\begin{cases}\dfrac{1}{a+1}\geqslant2k-\dfrac{1}{4},\\\dfrac{1}{a-1}\leqslant2k+\dfrac{3}{4}.\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$.

此时，只能 $k=0$ 才有解，$a\geqslant\dfrac{7}{3}$.

故 a 的最小值为$\dfrac{7}{3}$.

[点评] 本题利用$|f(x)|<g(x)$等价于$\begin{cases}f(x)<g(x)\\f(x)>-g(x)\end{cases}$可以避免分类讨论.

[变式 2] （2007·太原）解不等式$|x-1|+|2x-4|>x+3$.

【解析】 设 $f(x)=|x-1|+|2x-4|$，$g(x)=x+3$，

则 $f(x)=\begin{cases}5-3x & (x\leqslant 1),\\ 3-x & (1<x\leqslant 2),\\ 3x-5 & (x>2).\end{cases}$

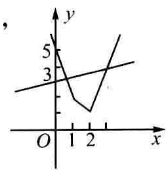

图 2-1

作函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象如图 2-1 所示，解 $\begin{cases}y=5-3x,\\ y=x+3,\end{cases}$ 及 $\begin{cases}y=3x-5,\\ y=x+3\end{cases}$ 得两交点 $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$，$(4,7)$. 由图象可知原不等式的解为 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>4$.

考点 2　一元二次不等式的解法 $0<x<1$.

【例 3】 (1)(2006·全国)设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$，$N=\{x||x|<2\}$，则(B)

$-2<x<2$

A. $M\cap N=\varnothing$　B. $M\cap N=M$

C. $M\cup N=M$　D. $M\cup N=R$

(2)(2006·陕西)已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$，集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-6\leqslant 0\}$，则 $P\cap Q$ 等于(B)

$-3\leqslant x\leqslant 2$

A. $\{2\}$　B. $\{1,2\}$　C. $\{2,3\}$　D. $\{1,2,3\}$

【解析】 (1)∵ $M=(0,1)$，$N=(-2,2)$，

∴ $M\subsetneqq N$，∴ $M\cap N=M$. 故选 B.

(2)∵ $P=\{1,2,\cdots,10\}$，$Q=[-3,-2]$，

∴ $P\cap Q=\{1,2\}$. 故选 B.

【点评】 解一元二次不等式的程序是：①将不等式化为标准形式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$；②求判别式 $\Delta=b^2-4ac$；③当 $\Delta>0$ 时，求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，x_1，$x_2(x_1<x_2)$；④根据一元二次不等式解的结构写出不等式的解集.

【变式 3】 (2005·北京春季)若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是 (-4,0) $-4<a<0$；若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant -3$ 的解集不是空集，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$　$\Delta\geqslant 0$

【解析】 由关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 R 知 $\Delta=a^2+4a<0$，即 $-4<a<0$. 由关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant -3$ 即 $x^2-ax-a+3\leqslant 0$ 的解集不是空集知 $\Delta=a^2+4(a-3)\geqslant 0$，即 $a^2+4a-12\geqslant 0$，解得 $a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -6$. 故分别 $(-4,0)$ 和 $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.

【答案】 $(-4,0)$；$(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$

【例 4】 (2007·广州)已知不等式 $ax^2-5x+b>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<-2\}$，求不等式 $bx^2-5x+a>0$ 的解集.

【解析】 由一元二次不等式与一元二次方程的对应关系可知 -3 与 -2 为方程 $ax^2-5x+b=0$ 的两根，由此根据韦达定理求出 a 与 b 的值，再去解不等式 $bx^2-5x+a>0$.

∵ $ax^2-5x+b>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<-2\}$，

∴ $a<0$，方程 $ax^2-5x+b=0$ 的两根是 -3，-2.

由韦达定理得：$\begin{cases}(-3)+(-2)=\frac{5}{a},\\ (-3)\times(-2)=\frac{b}{a}.\end{cases}$ 解得：$a=-1$，$b=-6$.

∴ 不等式 $bx^2-5x+a>0$ 即 $-6x^2-5x-1>0$，

其解集是 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right\}$.

【点评】 反过来，若知道一元二次不等式的解集，应运用一元二次不等式解的结构得出二次项系数的符号和相应的一元二次方程的两根，进而由韦达定理可得到系数间的关系.

【变式 4】 (2007·黄冈)$0<\alpha<\beta$，已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 (α,β)，求不等式 $(a+c-b)x^2+(b-2a)x+a>0$ 的解集.

【解析】 由已知 $a<0$，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}>0$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}>0$.

∴ $a<0$，$c<0$，$b>0$，从而 $a+c-b<0$.

设 $(a+c-b)x^2+(b-2a)x+a=0$ 的两根为 α'，β'. 则有

$$\alpha'+\beta'=\frac{2a-b}{a+c-b}=\frac{2a+a(\alpha+\beta)}{a+a\alpha\beta+a(\alpha+\beta)}=\frac{(\alpha+1)+(\beta+1)}{(\alpha+1)+(\beta+1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}$$

$$\alpha'\beta'=\frac{a}{a+c-b}=\frac{a}{a+a\alpha\beta+a(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{\beta+1}.$$

又由已知 $\frac{1}{\alpha+1}>\frac{1}{\beta+1}>0$.

∴ 不等式 $(a+c-b)x^2+(b-2a)x+a>0$ 解集为 $\left(\frac{1}{\beta+1},\frac{1}{\alpha+1}\right)$.

考点 3　含有参数的一元二次不等式

【例 5】 (2007·北京西城)解关于 x 的不等式：

$$ax^2-2\geqslant 2x-ax(a\in\mathbf{R}).$$

【解析】 由于不等式中最高次幂系数为 a，$(a\in\mathbf{R})$，因而它可能为零，也可能大于零或小于零. 因此，对 a 进行分类讨论.

原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$，

(1) $a=0$ 时，$x\leqslant -1$，

(2) $a\neq 0$ 时，不等式即为 $(ax-2)(x+1)\geqslant 0$.

当 $a>0$ 时，$x\geqslant\frac{2}{a}$ 或 $x\leqslant -1$.

由于 $\frac{2}{a}-(-1)=\frac{a+2}{a}$，于是

当 $-2<a<0$ 时，$\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$；

当 $a=-2$ 时，$x=-1$；当 $a<-2$ 时，$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$.

综上所述，

① $a=0$ 时，$x\leqslant -1$；

② $a>0$ 时，$x\geqslant\frac{2}{a}$ 或 $x\leqslant -1$；

③ $-2<a<0$ 时，$\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant -1$；

④ $a=-2$ 时，$x=-1$；

⑤ $a<-2$ 时，$-1\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$.

【点评】 解含有参数的不等式的关键在于分类讨论，讨论时，应根据不等式的同解变形(即变形后的不等式的解集与变形前一致)的需要(如两边除以一个含有字母的代数式时，则应对此代数式的符号进行分类讨论)以及解的结构的确定的需要(如解含有参数的一元二次不等式时，求出的两根含有参数，则应以两根的大小为分类标准进行分类讨论)进行分类讨论.

【变式 5】 (2007·杭州)是否存在实数 a，使得不等式组 $\begin{cases}2x^2+(5+2a)x+5a<0,\\ x^2-x-2>0\end{cases}$ 的整数解的集合是单元素集 $\{-2\}$?

【解析】 不等式 $x^2-x-2>0$ 的解集为 $\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$，而不等式 $2x^2+(5+2a)x+5a<0$ 可变为 $(2x+5)(x+a)<0$.