高职高专十一·五系列精品教材

中国数学会推荐使用教材

总主编 郭运瑞 喻曦等

高等数学

数学建模（下）

主编 喻曦 余健伟 等

GAODENGSHUXUE

人民出版社

★高职高专十一·五系列精品教材★

★中国数学会推荐使用教材★

总主编　郭运瑞　喻　曦等

高等数学

数学建模(下)

主　编　喻　曦　余健伟等

副主编　钟　雄　史亚兰

编　委　郭运瑞　喻　曦　余健伟　陈付贵

李　乐　曾新祥　陈江兵　钟　雄

人民出版社

内容提要

本书分上、下册。上册是数学建模的基础知识，内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、导数的应用、一元函数积分学、多元函数微积分、常微分方程. 每章末均安排了自测题，方便读者自学和提高，书末附有常用数学公式、积分表、习题参考答案等，供读者查阅.

下册注重数学建模在实际中的运用，内容包含数学建模概论、MATLAB概述及其基本操作、微分方程与数学建模、MATLAB在数值分析中的应用、MATLAB在绘图与图形处理中的应用、数字建模实例。每章末均安排了练习题，方便读者自学和提高，巩固所学知识.

本书可作为高等学校文科学生高等数学课程的教学用书，也可作为成人高等学历教育数学教材和相关教师的教学参考书.

责任编辑：辛春来　戈笑阳

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/郭运瑞　喻曦　向淑文　罗李平 等主编．一北京：人民出版社．2008．8

(高等学校十一·五系列精品教材丛书)

ISBN 978－7－01－007238－8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①郭…②喻…　Ⅲ．数学一高等学校一教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 129679 号

高等数学(数学建模下)

GAODENGSHUXUE

郭运瑞　喻曦　余健伟 等主编

人民出版社 出版发行

(100706 北京朝阳门内大街 166 号)

长沙科地印务有限公司印刷　新华书店经销

2008 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷

开本：787 毫米×1092 毫米 1/16　印张：52．25　字数：1208 千字

ISBN 978－7－01－007238－8　定价：52．00 元(上、下册)

网址 http://www.peoplepress.net

E－mail　peoplepresstextbookgxy@yahoo.com.cn

邮购地址　100706　北京朝阳门内大街 166 号

东亚图书营销有限公司　电话 13077372389

人民东方图书销售中心　电话 (010)65250024　65289539

目　录

第 1 章　数学建模概论

引　言

我们先来看这样一个问题：三名商人各带一个随从乘船渡河，现有一只小船只能容纳两个人，由他们自己划行，若在河的任一岸的随从人数多于商人，他们就可能抢劫财物. 但如何乘船渡河由商人决定，试给出一个商人安全渡河的方案.

如果要解决上面这样的实际问题我们可以一种种方案给出来，但是如果我们利用数学建模，那我们可以更快、更准确、更全面的来分析解决问题. 下面我们来了解数学建模的一般知识，并在本章的第二部分给出上面过河问题的解答.

1.1 数学建模简介

专家给数学建模下的定义是"通过对实际问题的抽象和简化，确定变量和参数，并根据某些规律建立起变量及参数间的确定关系的数学问题（也可称为一个数学模型），求解该数学问题，解释验证所得到的解，从而确定能否用于解决问题的多次循环、不断深化的过程". 简而言之，就是建立数学模型来解决各种实际问题的过程. 如实地将实际问题转换成可加以分析的数学问题，就构成了数学模型. 根据数学模型推算出的结果，将能给待处理的实际问题提供十分有用的决策依据. 实际问题来自不同的方面，有着不同的形式，从研究交通信号灯的设置到选排参加运动竞赛选手的阵容、从货物的分配到室内的装饰设计等. 数学建模专家主要从事工业生产和商业流通领域模型的研究. 但无论在什么地方，在生产车间、在家庭住所，还是在娱乐场所，都有许多具有共同点和需要用数学模型来解决的实际问题，因此需要将问题通过数学转换来构筑数学模型.

建模的关键并不是求解数学表达式，而在于是否能十分有效地将实际问题转换成数学方程，使产生的模型可用于对实际问题的求解，这是建模的关键. 至于方程，可通过各种计算机来求解，所以建模的首要任务是全面地理解问题，然后将其转换成相应的数学形式.

不要以为用数学手段来描述问题的方法很容易，事实上，建模远比对由模型导出的公式进行求解难. 因为实际的问题通常不以一种显含的数学形式存在，更困难的是，问题可能混杂在一起，不易完全分清. 由于存在的问题不是纯数学问题，或者难以完整地了解它的特性，所以，应该注重对问题的透彻理解和可能做的各种变换，以及检验由模型导出的结论的正确程度.

学习建模最重要的一步就是要分清建模必须涉及的由若干步骤组成的建模过程. 该过程一般采用以下的建模流程图，如图 1－1 所示.

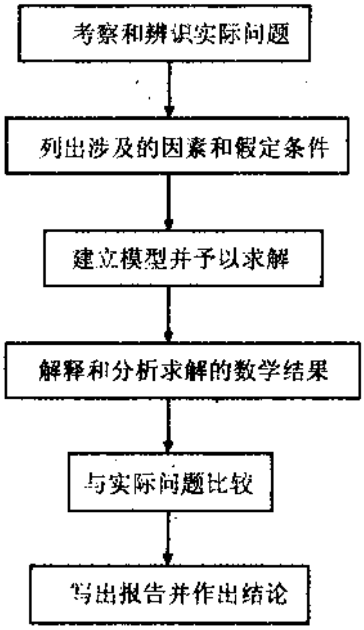

图 1－1　建模主要流程图

这种方法最早由英国的 Open 大学提出，它实际上是一个循环过程，需要多次反复执行这一过程直至结果令人满意．建模流程图是建模过程进行参考的框架，它提供了用模型求解问题的思路．也可以按通常建立数学模型应用的三个步骤来对实际问题和数学的关联做一个明确的归纳：

1．建立模型：将实际问题转化成数学问题；

2．数学解答：求解数学问题的数学解；

3．模型检验：将获得的数学解应用到实际问题中，来检验模型的合理性和准确性．

随着社会的发展，数学在社会中的应用越来越广泛，作用也越来越大，不仅在自然科学、人文科学、社会科学，而且在经济、军事、管理等领域都起着关键的作用．因此，社会需要越来越多的有扎实数学功底的技术人才．但是，社会对数学的需求并不只是需要数学家和专门从事数学研究的人才，更迫切的是需要在各部门中从事实际工作的、能善于运用数学知识及数学的思维方法来解决实际问题的人才，从而取得经济效益和社会效益．也就是说，要能对复杂的实际问题进行分析，发现其中的可以用数学语言来描述的关系或规律．模型的共性是能真实地反映所模仿对象的某一方面的属性，例如常见的火箭模型、汽车模型、建筑模型，它们只是在外观（形状和比例）上与真实对象相同．而数学模型，是要根据被模仿对象的特征，尤其是它的变化（运动）规律，用数学语言去描述和模仿对象的实际的数量关系、空间形态、运动趋势等．既然是模型当然只是近似的，但又要尽可能地逼真，而实际的对象往往十分复杂，制约的因素很多，但建立模型时关键要考虑其中最主要的因素，舍弃其中的次要因素．一旦数学模型建立了，实际问题转换成了数学问题，就可以用数学工具、数学方法去求解了，求解时除了运用数学推理之外，通常还要处理大量数据以及进行大量的计算，这些都由具有高速计算能力和快速处理数据及信息能力的计算机完成．从

而为用数学模型解决实际问题开辟了广阔的道路.计算机以及相应的一些功能强大的数学软件成了解决数学模型必不可少的重要工具.建立和求解模型之后,模型和结果还要接受检验,如果数学模型建立得不好,不能正确地描述实际对象,则模型的数学解是无意义的.因此,在得出数学解答后还要让所得的结论接受实际检验,看它是否合理可行.如果不符合实际,还应设法找出原因,修改原来的模型,重新求解和检验,只有经过多次修改和完善,才能获得一个较为理想的数学模型和求解方案.很多像牛顿一样伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师,他们将数学应用于各种不同的科学领域,在各自的学科中取得了巨大的成就.如电磁学中的麦克斯伟方程组、化学中的门捷列夫周期表、生物学中的孟德尔遗传定律等都是经典学科中应用数学模型的光辉范例.

正是由于认识到培养应用型数学人才的重要性,从1983年起,在美国就有一些有识之士开始探讨组织一项应用数学方面的竞赛的可能性.经过论证、争论、争取资助,终于在1985年有了美国的第一届大学生数学建模竞赛,简称MCM(1987年以前的全称是Mathematical Competition in Modeling,1987年改为Mathematical Contest in Modeling,其缩写均为MCM).竞赛由美国工业与应用数学学会和美国运筹学会联合主办.美国的MCM虽然只是美国的国内竞赛,但它欢迎其他国家的大学组队参加,而且有越来越多国家的大学参加这一竞赛.因此,在某种意义上它已经是国际性的竞赛.我国最早是在1989年,由北京的三所大学组队参加美国的MCM竞赛.到后来,我国参加MCM的学校越来越多,经过酝酿、筹备和在一些城市试办,从1992年开始由中国工业与应用数学学会举办我国自己的全国大学生数学模型竞赛(CMCM),国家教委对这项活动十分重视,决定从1994年起由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同举办,每年一次.我国自己的MCM虽然举办的时间还不长,但发展非常迅速,在1995年的竞赛中,全国就共有259所高校、1234个队、3702名学生参加.之后,数学建模竞赛更加受到各高校和大学生的重视,参加的高校数和学生人数逐年递增,2009年全国33个省/市/自治区(包括香港和澳门特区)1137所院校的15042队(其中本科组12272队、专科组2770队)共计45000多名来自各个专业的大学生参加了这项竞赛,是历年来参赛人数最多的.现在,全国各高校已经把参加全国数学建模竞赛作为推动学校教学改革的一个重要契机.

1.2 从现实对象到数学模型

§1.2.1 椅子能在不平的地面上放稳吗

问题 把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只需稍微挪动几次,就可以使四只脚同时着地,放稳了.这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言给以表述,并用数学工具来证实吗?

模型假设 对椅子和地面作一些必要的假设

1. 椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触处可视为一个点,四脚的连线呈正方形;

2. 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面;

3. 对于椅脚的间距和椅脚的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

模型构成 中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来.

首先，要用变量表示椅子的位置. 注意到椅脚连线成正方形，以中心为对称点，正方形的中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置. 在图 1－2 中椅脚连线为正方形 $ABCD$. 对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心点 O 旋转角度后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置.

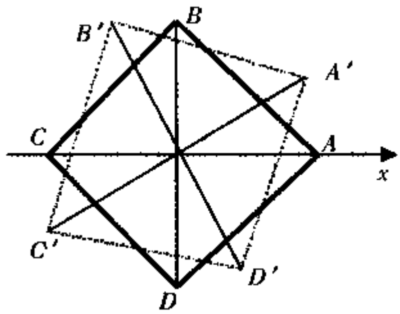

图 1－2

其次，要把椅脚着地用数学符号表示出来. 如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，那么当这个距离为零时就是椅脚着地了. 椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是椅子位置变量 θ 的函数.

虽然椅子有四只脚，即有四个距离，但是由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了. 记 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$（$f(\theta)$，$g(\theta)$0）. 有假设 2，f 和 g 是连续函数. 又假设 3，椅子在任何位置至少有三只脚着地，所以对于任意的，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零. 当 $\theta=0$ 时不妨设 $g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$. 这样，改变椅子的位置使四只脚同时着地，就归结为证明如下的数学命题：

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且 $g(0)=0$，$f(0)>0$. 证明 θ_0 存在，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

模型求解 上述命题有多种证明方法，这里介绍其中比较简单但是有些粗糙的一种.

将椅子旋转 90°，对角线 AC 与 BD 互换. 由 $g(0)=0$ 和 $f(0)>0$ 可知 $g(\pi/2)>0$ 和 $f(\pi/2)=0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$ 和 $h(\pi/2)<0$. 由 f 和 g 的连续性知 h 也是连续函数. 根据连续函数的基本性质，必存在 θ_0 $(0<\theta_0<\pi/2)$ 使 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$.

最后，因为 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

由于这个实际问题非常直观和简单，模型的解释和验证就略去了.

评注 这个模型的巧妙之处在于用一元变量表示椅子的位置，用的两个函数表示椅子四脚与地面的距离，进而把模型假设和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表达出来，构成了这个实际问题的数学模型.

§1.2.2 商人怎样安全过河

问题 商人过河问题

三名商人各带一个随从乘船渡河，现有一只小船只能容纳两个人，由他们自己划行，若在河的任一岸的随从人数多于商人，他们就可能抢劫财物. 但如何乘船渡河由商人决定，试给出一个商人安全渡河的方案.

首先，介绍图论中的一个定理.

G 是一个图，$V(G)$ 为 G 的顶点集，$E(G)$ 为 G 的边集. 设 G 中有 n 个顶点 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} \qquad i,j=1,2,\cdots,n \tag{1.1}$$

定理 1 设 $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵，则 G 中从顶点 v_i 到顶点 v_j，长度为 k 的道路的条数为 A^k 中的 i 行 j 列元素.

证 对 k 用数学归纳法

$k=1$ 时，显然结论成立；假设 k 时，定理成立，考虑 $k+1$ 的情形.

记 A^l 的 i 行 j 列元素为 $a_{ij}^{(l)} l\geqslant 2$，因为 $A^l \cdot A = A^{l+1}$，所以

$$a_{ij}^{(l+1)} = a_{i1}^l a_{1j} + a_{i2}^l a_{2j} + \cdots + a_{in}^l a_{nj} \tag{1.2}$$

而从 v_i 到 v_j 长 $k+1$ 的道路无非是从 v_i 经 k 步到某顶点 $v_l \quad 1\leqslant l\leqslant n$，再从 v_l 走一步到 v_j；由归纳假设从 v_i 到 v_l 长为 k 的道路共计 a_{il}^k 条，而从 v_l 到 v_j 长为 1 的道路为 a_{lj} 条，所以长为 $k+1$ 的从 v_i 经 k 步到 v_l 再一步到 v_j 的道路共有 $a_{il}^{(k)} a_{lj}$ 条，故从 v_i 经 $k+1$ 步到 v_j 的路径共有 $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)} a_{lj}$ 条.

模型建立与求解 假设渡河是从南岸到北岸，(m,n) 表示南岸有 m 个商人，n 个随从，全部的允许状态共有 10 个

$$\begin{array}{lllll} v_1=(3,3) & v_2=(3,2) & v_3=(3,1) & v_4=(3,0) & v_5=(2,2) \\ v_6=(1,1) & v_7=(0,3) & v_8=(0,2) & v_9=(0,1) & v_{10}=(0,0) \end{array}$$

以 $V=\{v_1, v_2, \cdots\cdots v_{10}\}$ 为顶点集，考虑到奇数次渡河及偶数次渡河的不同，我们建立两个邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad B = A^T$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

其中 A 表示从南岸到北岸渡河的图的邻接矩阵，$B=A^T$ 表示从北岸到南岸渡河的图的邻接矩阵.

由定理 1 我们应考虑最小的 k，$s \cdot t$ $(AB)^k A$ 中 1 行 10 列的元素不为 0，此时 $2k+1$ 即为最少的渡河次数，而矩阵 $(AB)^k A$ 中 1 行 10 列的元素为最佳的路径数目.

经过计算 $K=5$ 时，$(AB)^5 A$ 的第 1 行 10 列元素为 2，所以需 11 次渡河，有两条最佳路径.

最后我们用图解法求解：

前面我们已求出问题的 10 种允许状态，允许决策向量集合 $D=\{(u,v): u+v=1,2,$ 状态转移方程为 $S_{k+1}=S_k+(-1)^k d_k$，如图 1-3，标出 10 种允许状态，找出从 s_1 经由允

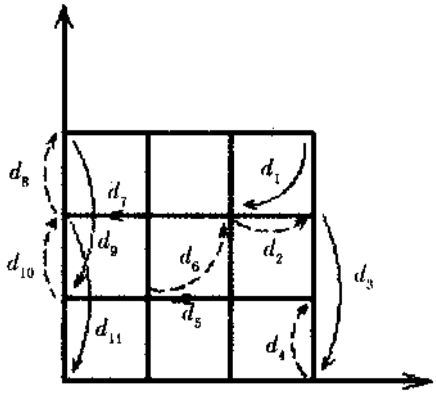

图 1－3　过河图解法

许状态到原点的路径，该路径还要满足奇数次向左、向下，偶数次向右、向上.

由图 1－3 可得这样的过河策略，共分 11 次决策.

$$(3,3)\xrightarrow{\text{去一商一随}}(2,2)\xrightarrow{\text{回一商}}(3,2)\xrightarrow{\text{去二随}}(3,0)\xrightarrow{\text{回一随}}(3,1)\xrightarrow{\text{去二商}}(1,1)$$

$$\xrightarrow{\text{回一商一随}}(2,2)\xrightarrow{\text{去二商}}(0,2)\xrightarrow{\text{回一随}}(0,3)\xrightarrow{\text{去二随}}(0,1)\xrightarrow{\text{回一随}}(0,2)\xrightarrow{\text{去二随}}(0,0)$$

1.3　建立数学模型的方法和步骤

§1.3.1 数学模型的概念

1. 原型和模型

原型(Prototype)和模型(Model)是一对对偶体. 原型指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象. 在科技领域通常使用系统(System)、过程(Process)等词汇，如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统，又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等. 本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型. 模型则是指为某个特定目的将原型的某一部分信息减缩、提炼而构成的原型替代物. 特别强调构造模型的目的性. 模型不是原形原封不动的复制品，原型有各个方面和各种层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次. 一个原型，为了不同的目的可以有很多不同的模型，模型的基本特征是由构造模型的目的决定的.

2. 模型的分类

用模型替代原型的方式来分类，模型可以分为物质模型(形象模型)和理想模型(抽象模型). 前者包括直观模型、物理模型，后者包括思维模型、符号模型、数学模型.

直观模型　指那些供展览用的实物模型，以及玩具、照片等，通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大，主要追求外观上的逼真. 这类模型的效果是一目了然的.

物理模型　主要指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型，它不仅可以显示原型的外形或某些特征，而且可以用来进行模拟实验，间接地研究原型的某些规律. 如

风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的空气动力学特性.这类模型应该注意验证原型与模型间的相似关系,以确定模拟实验结果的可靠性.物理模型的优点是常可得到实用上很有价值的结果,但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点.

思维模型 指通过人们对原形的反复认识,将获取的知识以经验的形式直接存于人脑中,从而可以根据思维或直觉作出相应的决策.通常说的某些领导者凭经验做决策就是如此.思维模型便于接受,也可以在一定条件下获得满意的结果,但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点,难以对它的假设条件进行检验,并且不便于人们的相互沟通.

符号模型 是在一些约束或假设下借助于专门的符号、线条等,按一定形式组合起来描绘原型.如地图、电路图、化学结构式等,具有简明、方便、目的性强及非量化等特点.

数学模型 是由数字、字母或其他数学符号组成的,描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法.

3. 数学模型

航行问题 甲乙两地相距750km,船从甲到乙顺水航行需30h,从乙到甲逆水航行需50h,问船速、水速各若干?

用x,y分别代表船速和水速,则可以得到如下两个方程

$$(x+y)\cdot 30=750\ ,(x-y)\cdot 50=750$$

实际上,这组方程就是上述航行问题的数学模型.列出方程,原问题已转化为纯粹的数学问题.方程的解$x=20\text{km/h}$,$y=5\text{km/h}$,最终给出了航行问题的答案.

§1.3.2 建立数学模型的方法和步骤

1.建立数学模型的基本内容

(1) 据建立数学模型的目的和问题的背景作出必要的简化假设(上例中,假设航行中船速和水速为常数);

(2) 用字母表示待求的未知量(上例中,x,y代表船速和水速);

(3) 利用相应的物理或其他规律(上例中,匀速运动的距离等于速度乘以时间),列出数学式子(上例中,二元一次方程);

(4) 求出数学上的解答(上例中,$x=20$,$y=5$);

(5) 利用解答解释原问题(上例中,船速和水速分别为$20km/h$和$5km/h$)

(6) 最后利用实际现象来验证上述结果.

数学建模面临的实际问题是多种多样的,建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同,所得的模型的类型也不同,我们不能指望归纳出若干条准则,使用与一切实际问题的数学建模方法.下面所谓的基本方法不是针对具体问题而是从方法论的意义上讲的.

2.数学建模的基本方法

一般说来建模方法大体上可分为机理分析和测试分析两种.机理分析是根据对客观事物特性的认识,找出反映内部机理的数量规律,建立的模型常有明确的物理现实意义.测试分析将研究对象看作一个“黑箱”系统(意思是它的内部机理看不清楚),通过对系统

输入、输出数据的测量和统计分析，按照一定的准则找出与数据拟合得最好的模型.

面对一个实际问题用哪一种方法建模，主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模的目的. 如果掌握了一些内部机理的知识，模型也要求具有反映内在特征的物理意义，建模就应以机理分析为主. 而如果对象的内部规律基本上不清楚，模型也不需要反映内部特性(例如仅用于对输出作预报)，那么就可以用测试分析.

对于许多实际问题还常常将两种方法结合起来建模，即用机理分析建立模型的结构，用测试分析确定模型的参数.

机理分析当然针对具体问题来做，不可能有同样的方法，因而主要是通过实例研究(Case studies)来学习. 测试分析有一套完整的数学方法. 我们所说的数学建模主要是指机理分析.

3. 数学建模的一般步骤

建模要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与问题的性质、建模目的等有关. 下面介绍的是机理分析方法建模的一般过程，如图 1-4 所示：

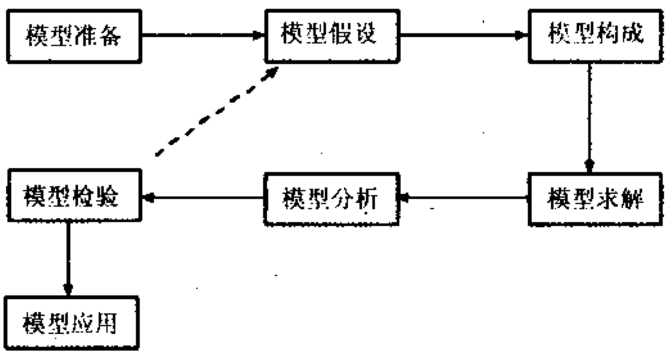

图 1-4 建模一般过程

模型准备 了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集必要的信息如现象、数据等，尽量弄清对象的主要特征形成一个比较清晰的"问题"，由此初步确定用哪一类模型. 情况明了才能找对方法. 在模型准备阶段要深入调查研究，虚心向实际工作者请教，尽量掌握第一手资料.

模型假设 根据对象的特征和建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，作出必要的、合理的简化假设. 对于建模的成败这是非常重要和困难的一步. 假设作的不合理或太简单，会导致错误或无用的模型；假设作得过分详细，试图把复杂对象的众多因素都考虑进去，会使你很难或无法继续下一部的工作. 常常需要在合理与简化之间作出恰当折衷的选择.

模型构成 根据所作的假设，用数学的语言、符号描述对象的内在规律，建立包含常量、变量等的数学模型，如优化模型、微分方程模型、差分方程模型、图的模型等. 建模时应遵循的一个原则是：尽量采用简单的数学工具，因为你的模型总希望更多的人了解和使用，而不是只供少数专家欣赏.

模型求解 可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数学方

法，特别是数学软件和计算机技术.

模型分析 对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的敏感性分析、对假设的强健性分析等.

模型检验 把求解和分析结果翻译回到实际问题，与实际的现象、数据比较，检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际不符，问题常常出在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模，如图中的虚线所示. 这一步对于模型是否真的有用非常关键，要以严肃认真的态度对待. 有些模型要经过几次反复，不断完善，直到检验结果获得某种程度上的满意.

模型应用 应用的方式与问题性质、建模目的及最终的结果有关，我们一般不讨论这个问题.

4. 数学建模的全过程

数学建模的过程分为表述、求解、解释、验证几个阶段，并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型，再从数学模型回到现实对象的循环，如图 1－5 所示：

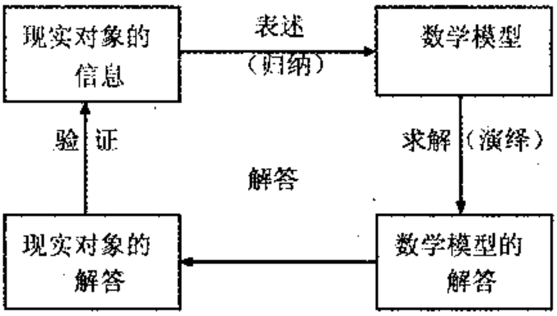

图 1－5 建模全过程

表述是将现实问题"翻译"成抽象的数学问题，属于归纳法. 数学模型的求解则属于演绎法. 归纳是依据个别现象推出一般规律；演绎是按照普遍原理考察特定对象，导出结论. 因为任何事物的本质都要通过现象来反映，必然要透过偶然来表露，所以正确的归纳不是主观、盲目的，而是有客观基础的，但也往往是不精细的、带感性的，不易直接检验其正确性. 演绎利用严格的逻辑推理，对解释现象、作出科学预见具有重大意义，但是它要以归纳的结论作为公理化形式的前提，只能在这个前提下保证其正确性. 因此，归纳和演绎是辨证统一的过程：归纳是演绎的基础，演绎是归纳的指导.

解释是把数学模型的解答"翻译"回到现实对象，给出分析、预报、决策或者控制的结果. 最后，作为这个过程的重要的一环，这些结果需要用实际的信息加以验证.

上图揭示了现实对象和数学模型的关系. 一方面，数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物，它源于现实，又高于现实. 另一方面，只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时，才可以用来知道实际，完成实践——理论——实践这一循环.

1.4 数学模型的特点和建模能力的培养

§1.4.1 数学模型的特点

1. 模型的逼真性与可行性

这二者是一对矛盾，数学上总希望模型尽可能地接近研究对象，但逼真的数学模型往往伴随复杂的数学描述，导致很难甚至无法求解，更不用说通过数学模型对实际问题进行仿真、预测，进而实施决策和控制. 另外，即使通过较高层次的人力和物力的投入能求解，由于不能获得合理的经济效益，也是不可取的. 所以，建模时要在逼真与可行，投入与产出之间进行折中和抉择.

2. 模型的渐近性

复杂问题的模型通常不可能一次成功，往往要经过建模过程的反复迭代，不断地完善才能逐渐地逼近满意的模型.

3. 模型的鲁棒性

模型结构和参数取决于从对象获取的信息(数据)，而观测数据存在一定的误差，当数据在允许的范围内出现微小变化时，鲁棒性强的模型的结构与参数将只发生很小的变化，不会出现模型的坍塌和崩溃.

4. 模型的可转移性

模型是现实对象的抽象化和理想化的产物，是现实对象共性的映射，因此它不为对象的所属领域独有，可以转移到相关的领域.

5. 模型的非确定性

由于实际问题千变万化，寻求的目标值也存在差异，人的思维角度和借助工具也不尽相同，所以使得建模本身很难有标准答案.

6. 模型的技艺性

建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术，它类似一种雕塑，具有很强的技巧. 经验、想象力、洞察力、判断力、直觉、灵感等在建模中会起到很大的作用.

7. 模型的局限性

第一，建模所得的结论虽然具有通用性和准确性，但是，因为模型是现实对象简化和理想化的产物，所以，当将模型的结论应用于实际时，那些先前被忽视和简化了的因素必须考虑，来定性或定量地分析由此带来的误差，因此结论的通用和准确是相对的或近似的.

第二，由于受人的认识能力和科学技术发展水平的限制，目前还有不少实际问题很难得到有实用价值的数学模型. 至今还有一些领域，尚未发展到能用建模方法寻找数值规律的阶段，例如传统的中医诊断技术、中药配伍技术等.

§1.4.2 数学建模对能力的培养

数学建模当然要用到数学知识，但却与以往所说的那种数学不同，它要用到计算机，甚至离不开计算机，但却不是纯粹的计算机技术，它涉及物理、化学、生物、医学、电子、军

事、农业、管理等各学科、各领域的知识，但也不是这些学科和领域里的纯知识的问题，它涉及各学科、各领域，但又不受任何一个具体的学科、领域的局限. 它要用到各方面的综合知识，而且，建模工作者不只是要有各方面的知识，还要有驾驭这些知识，应用这些知识来处理实际问题的能力. 总之，数学建模既涉及各方面的综合知识，又涉及各方面的综合能力. 它的特点就是综合，它的优点也就是综合.

通过多年的数学建模的教学和培训，大家都意识到，数学建模技术的学习和应用培养了学习和实践者以下的能力：

1. 洞察能力，建模工作者善于从实际工作提供的原形中抓住其数学本质；

2. 数学语言翻译能力，既能把实际问题用数学的语言表达，又能将数学推导和计算得到的结果用大众化的语言表述；

3. 综合应用能力，能将数学知识和其他学科的知识进行综合应用；

4. 抽象联想能力，对一些初看起来完全不同，但经过一定的简化抽象，可获得雷同的数学模型，培养了他们的抽象思维和触类旁通的联想能力；

5. 自学和创新能力　在建立数学模型的全过程中，既学习到各种新知识、新技术，又掌握了对新知识和新技术实际应用的能力.

1.5　全国大学生数学建模竞赛论文格式规范

本科组参赛队从 A、B 题中任选一题，专科组参赛队从 C、D 题中任选一题.

论文用白色 $A4$ 纸单面打印，上下左右各留出至少 2.5 厘米的页边距，并从左侧装订.

论文第一页为承诺书，具体内容和格式见本规范第二页.

论文第二页为编号专用页，用于赛区和全国评阅前后对论文进行编号.

论文题目和摘要写在论文第三页上，从第四页开始是论文正文.

论文从第三页开始编写页码，页码必须位于每页页脚中部，用阿拉伯数字从"1"开始连续编号.

论文不能有页眉，论文中不能有任何可能显示答题人身份的标志.

论文题目用三号黑体字、一级标题用四号黑体字，并居中. 论文中其他汉字一律采用小四号宋体字，行距用单倍行距，打印时应尽量避免彩色打印.

提醒大家注意：摘要应该是一份简明扼要的详细摘要(包括关键词)，在整篇论文评阅中占有重要权重，请认真书写(注意篇幅不能超过一页，且无需译成英文). 全国评阅时将首先根据摘要和论文整体结构及概貌对论文优劣进行初步筛选.

引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料) 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中均明确列出. 正文引用处用方括号标示参考文献的编号，如[1][2]等，引用书籍还必须指出页码. 参考文献按正文中的引用次序列出，其中书籍的表述方式为：

[编号] 作者，书名，出版地：出版社，出版年.

参考文献中期刊杂志论文的表述方式为：

[编号] 作者，论文名，杂志名，卷期号：起止页码，出版年.