21世纪大学数学精品教材

线性代数

匡国光 杨 茂 主编

科学出版社

内 容 简 介

本书内容主要包括矩阵、向量、矩阵相似与合同以及线性代数应用问题，并在其中有机融入了传统上相对独立的行列式、线性方程组、特征值理论等知识内容，使知识结构体系更加合理. 本书注重教学效率，力求使结构严谨、简明、完整. 对于很多教学难点与经典难题，本书通过知识归类与知识结构体系设计给出了有效化解. 本书还精选了大量的例题、习题与数学建模问题，涵盖了基本练习与加深提高的各种题型，能多种途径地达到巩固与强化知识的教学目的.

本书可作为大学非数学专业线性代数课程的教材，也可作为学生自学、考研复习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/匡国光，杨茂主编. 一北京：科学出版社，2011. 4

21 世纪大学数学精品教材

ISBN 978－7－03－030646－3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①匡… ②杨… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 051320 号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第 一 版	开本：B5(720×1000)
2011 年 5 月第一次印刷	印张：14 3/4
印数：1—5 000	字数：287 000

定价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言 FOREWORD

线性代数是高等教育的一门重要数学基础课程，面对该课程众多的可选教材，读者需要根据其意愿做出判断和选择.

本书作者充分研习教育部关于线性代数课程的基本要求以及许多高校的线性代数教学大纲与考研大纲，潜心反思20余年在线性代数课程中的教学实践经验与教材编写经验，经过精密构思、反复修订，才使拙著成册.

为了让使用者全面了解本书，以下逐条概述本书特色：

1　本书打破了传统的结构顺序，将行列式内容从属于矩阵进行深入讨论，使课程知识结构的“矩阵主线”更加突出.

2　本书优化了教学的知识体系，将矩阵分块方法与应用散布在各个知识环节，使教材逻辑严谨，表述简练.

3　本书弱化了学习难点，用简短的表述给出了行列式的各种计算技巧，用浅显的方法给出了有关伴随矩阵和矩阵的秩各个经典难题的证明.

4　本书强化了知识拓展的应用方向，将课程优化节约出来的很大篇幅用于线性代数相关应用学科的介绍，不仅可以拓宽学习者的眼界，还能进一步体现本课程的教学目标.

5　本书规范了知识结构层次，将课程知识点按章、节、目、点 4 级分层，使知识内容结构与关联一目了然.

6　本书兼容了知识传导的严谨性与通俗性，课程中的重要概念都有导入背景、严谨表述和通俗解读，而对定义、定理、公式采用命名方式识别与引用，有利于读者自学与记忆.

7　本书配备了丰富的习题，并对每一道习题都给出了答案与提示，有利于引导学生自我检测与独立思考.

本书由匡国光、杨茂担任主编，第 1 章由匡国光执笔，第 2 章由杨茂、匡国光执笔，第 3 章由程涛、王玉雷执笔，第 4 章由匡国光、程涛、王玉雷执笔，全书由匡国光审稿总纂.

教材编写既要有新意，又要有延续. 只有不断继承发扬、探索创新，才能使我们的教材日趋完善. 由于编者水平所限，书中不妥之处在所难免，望读者对本书多提改进意见！

编　者

2010 年 12 月 30 日

目录 CONTENTS

第1章 矩阵

矩阵是线性代数课程中最基本、最重要的概念之一，也是该课程的重点研究对象. 在线性理论与数据处理中，矩阵有着广泛而深刻的应用.

1.1 矩阵概念

本节介绍矩阵概念的背景、表达形式及其本质含义，并对矩阵的特殊形、转置、分块展开讨论.

1.1.1 矩阵的背景

1. 二维表格

在很多实际应用中，我们常常遇到如同表 1.1.1 的数据结构.

表 1.1.1 销量数据表

季度 \ 商品	A_1	A_2	A_3
I	1322	2453	225
II	1058	2743	200
III	2584	3167	306
IV	2442	1800	319

这种表格反映了某商场 4 个季度 3 种商品的销售量，通常根据表头名称将之称为“季度商品销量表”，此表可以简化为 4 行 3 列矩形数表，如图 1.1.1 所示.

1322	2453	225
1058	2743	200
2584	3167	306
2442	1800	319

图 1.1.1 销量数据矩形数表

我们可以通过其中数据的位置与值判断原始信息，如第 3 行第 2 列的数值 3167 表示“季度 III 商品 A_2 的销量”.

2. 线性方程组

由 m 个方程 n 个未知数形成的线性方程组表达形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

其中，x_j 为未知数；a_{ij} 为未知数的系数；b_i 为常数项 ($i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$).

容易看出，上述方程组可以简化为 m 行 $n+1$ 列的矩形数表，如图 1.1.2 所示.

上述数表省略了方程组中具有固定位置的格式化内容(如未知数、加号、等号等)，我们很容易从给出的数表出发，还原出线性方程组来.

$$\begin{array}{|ccccc|} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

图 1.1.2 方程组矩形数表

$$\begin{array}{|cccc|} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

图 1.1.3 线性变换矩形数表

3. 线性变换

线性变换反映的是一组变量与另一组变量的线性关系，其表述形式为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

其中，x_j 为自变量；y_i 为因变量(函数)；a_{ij} 为线性变换系数 ($i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$).

显然，线性变换完全由线性变换系数及其位置确定，即线性变换对应着 m 行 n 列的矩形数表，如图 1.1.3 所示.

4. 图的邻接关系

如图 1.1.4 为 5 个节点的图，节点间的连线为邻接边. 图中节点之间是否有邻接边可以用数值 1 或 0 表示，则整个图的邻接关系可表示为一个 5 行 5 列的 0 - 1 值数表，如图 1.1.5 所示.

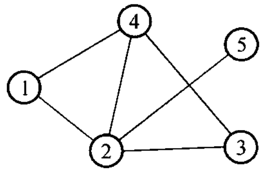

图 1.1.4　邻接关系图

1	1	0	1	0
1	1	1	1	1
0	1	1	1	0
1	1	1	1	0
0	1	0	0	1

图 1.1.5　邻接关系矩形数表

1.1.2　矩阵的定义

1. 矩阵的构成

如前所述，矩形数表运用得十分广泛，是我们描述问题、研究问题的有力工具，为此我们引进矩阵概念.

矩阵定义　形如

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}}$$

的矩形数表称为矩阵，其中 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 称为矩阵的元素，由 m，n 组成的“乘式”(而不是乘积) $m \times n$ 称为矩阵的阶.

书写矩阵时一般将数表的外框替换为方括号围栏(或圆括号围栏)，写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

也可以简写为 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 形式.

我们知道，数列的实质是一元整标函数，那么矩阵的实质则以可理解为二元整标函数，每个元素的双下标为两个自变量.

在矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 中，要注意矩阵的一些重要的元素组，如下：

行　$\boldsymbol{A}$ 的元素组 $a_{ij}(j=1, 2, \cdots, n)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行.

列　$\boldsymbol{A}$ 的元素组 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列.

对角线　$\boldsymbol{A}$ 的元素组 $a_{ii}(i=1, 2, \cdots, \min\{m, n\})$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对角线.

2. 矩阵相等

矩阵是由具有一定位置结构的数据形成，因此，矩阵相等应包含位置结构一致

性与对应位置数据相等这两个方面.

矩阵相等 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$是同阶矩阵),若其所有对应位置元素满足条件

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相等,记为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

利用矩阵相等可将线性方程组的m个等式写成一个矩阵等式

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

我们从中可以体验到矩阵批量处理数据的功能及优势.

例 1.1.1 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3x-4y & 2w \\ z+6 & x \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} x-4 & 2y+3 \\ 8 & y+z \end{bmatrix}$,若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,求$x$, y, z, w.

解 由矩阵相等的规定,可得到4个等式:

$$3x-4y=x-4,\qquad 2w=2y+3,$$
$$z+6=8,\qquad x=y+z.$$

解之得

$$z=2,\quad x=6,\quad y=4,\quad w=\frac{11}{2}.$$

3. 特殊形矩阵

从矩阵阶数特点可得到几种“阶数”特殊形矩阵.

行矩阵 阶数为$1\times n$的矩阵称为行矩阵,行矩阵形如

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

列矩阵 阶数为$m\times 1$的矩阵称为列矩阵,列矩阵形如

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

方阵 阶数为$n\times n$的矩阵称为方阵,方阵形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

另外,我们规定在书写矩阵时矩阵中的零元素可用空白代替,这样当矩阵部分零元素用空白代替后,剩余元素会呈现出一定的图案. 根据图案的特点,可以得到几种常用的"图案"特殊形矩阵.

零矩阵 所有元素均为零的矩阵,称为零矩阵. 通常用字母 $\boldsymbol{O}$ 表示不同阶的零矩阵.

对角形矩阵 若方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件 $a_{ij}=0,\ i\neq j$ (即对角线以外的元素均为零),则称 $\boldsymbol{A}$ 为对角形矩阵. 对角形矩阵形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

可将之记为

$$\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}).$$

单位矩阵 单位矩阵是一种特殊的对角矩阵,其对角线元素均为 1,通常用字母 $\boldsymbol{E}$ 表示不同阶的单位矩阵,单位矩阵形如

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

三角形矩阵 若方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 满足条件 $a_{ij}=0,\ i>j$(或 $i<j$),即对角线下方(或上方)元素均为零,则称 $\boldsymbol{A}$ 为三角形矩阵. 三角形矩阵形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

前者称为上三角形矩阵,后者称为下三角形矩阵.

阶梯形矩阵 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的零行集中在后 $n-r$ 行，$a_{is_i}(i=1,2,\cdots,r)$ 为各非零行的首非零元素，即 $a_{is_i}\neq 0$，而当 $j<s_i$ 时 $a_{ij}=0$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行首非零元素的列下标严格单增，即 $s_1<s_2<\cdots<s_r$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形矩阵，并称 $a_{is_i}(i=1,2,\cdots,r)$ 为"阶梯口"元素.

通俗地讲，各行首非零元素依次后移的矩阵称为阶梯形矩阵. 例如，下面矩阵是阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix}3&-2&0&6&0&0\\0&-1&2&9&0&7\\0&0&0&2&-5&-2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&0&6&0&0\\&-1&2&9&0&7\\&&&2&-5&-2\\&&&&&1\\&&&&&\end{bmatrix}.$$

例 1.1.2 证明：阶梯形方阵一定是上三角形矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为阶梯形方阵，r 为 $\boldsymbol{A}$ 的非零行行数，首非零元素为 $a_{is_i}(i=1,2,\cdots,r)$，则 $s_1<s_2<\cdots<s_r$，从而可得 $i\leqslant s_i$. 因为 a_{is_i} 为第 i 行首非零元素，即当 $j<s_i$ 时 $a_{ij}=0$，所以当 $j<i\leqslant s_i$ 时，则 $a_{ij}=0$. 即表明 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为上三角形矩阵.

注意：上述结论反过来是不对的，即三角形矩阵不一定是阶梯形方阵，如方阵

$$\begin{bmatrix}1&-2&0&5\\0&0&3&4\\0&0&-1&6\\0&0&0&2\end{bmatrix},$$

它是三角形矩阵而不是阶梯形矩阵.

1.1.3 矩阵的分块

有时我们会关心矩阵中部分元素形成的"数块"以及矩阵的分块结构，即矩阵的"局部"与"整体构成"，为此，我们引进矩阵的分块概念.

1. 子阵

在表 1.1.1 对应的季度商品销量矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1322&2453&225\\1058&2743&200\\2584&3167&306\\2442&1800&319\end{bmatrix},$$

其第 2，4 行，第 1，2 列交叉元素可形成矩阵

$$S_1=\begin{bmatrix}1058 & 2743\\ 2442 & 1800\end{bmatrix},$$

则 S_1 反映了 II，IV 季度 A_1，A_2 商品的销量数据，由此引出子阵概念.

子阵　从矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 中选取 m_0 行 n_0 列，用既在这 m_0 行又在这 n_0 列中的元素按原来的位置次序摆成的 $m_0\times n_0$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的子阵.

一个矩阵往往包含了大量的子阵. 例如，在前述季度商品销量矩阵中仅二阶方子阵就有 18 个.

2. 矩阵的分块表示

分块矩阵　在矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的行与行、列与列之间插入贯穿矩阵的 $s-1$ 条横线与 $t-1$ 条纵线，可将矩阵分割为 $s\times t$ 个子阵块 $\boldsymbol{A}_{ij}$. 若把这些子阵块视为元素，则得到一个以“块”为元素的矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{ij}]_{s\times t}$，称为分块矩阵.

用分块矩阵形式表示矩阵，有时可以突现矩阵的分块结构特征，而有利于分析与运算.

对一个矩阵的分块方式有很多，一般应根据讨论的需要选择适当的分块.

例 1.1.3　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$，试对 $\boldsymbol{A}$ 进行分块表示.

解　若矩阵分割线选为 $\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ \hdashline -1 & 2 & 0 & 2\end{array}\right]$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=[-1,\ 2],\qquad \boldsymbol{A}_{22}=[0,\ 2].$$

若矩阵分割线选为 $\left[\begin{array}{cccc}1 & 0 & 0 & 1\\ \hdashline 0 & 1 & 2 & 0\\ \hdashline -1 & 2 & 0 & 2\end{array}\right]$，则

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix},$$

其中

$$A_1=[1,0,0,1],$$
$$A_2=[0,1,2,0],$$
$$A_3=[-1,2,0,2].$$

若矩阵分割线选为$\left[\begin{array}{c:c:c:c}1&0&0&1\\0&1&2&0\\-1&2&0&2\end{array}\right]$,则

$$A=[B_1,B_2,B_3,B_4],$$

其中

$$B_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix},\quad B_4=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

3. 特殊形分块矩阵

将方阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$用$s-1$条横线及对应位置的$t-1$纵线分割为分块矩阵$A=[A_{ij}]_{s\times s}$,能使其对角线上的子阵块$A_{ii}(i=1,2,\cdots,s)$为方阵,我们把这种分块矩阵称为正规分块方阵. 下面介绍的特殊形分块矩阵都与正规分块方阵密切相关.

对角形分块矩阵 设$A=[A_{ij}]_{s\times s}$为正规分块方阵,若其子阵块满足条件$A_{ij}=O\,(i\neq j)$,即对角线以外的子阵块均为零矩阵,则称$A=[A_{ij}]_{s\times s}$为对角形分块矩阵. 对角形分块矩阵形如

$$\begin{bmatrix}A_{11}&&&\\&A_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&A_{ss}\end{bmatrix}.$$

三角形分块矩阵 设$A=[A_{ij}]_{s\times s}$为正规分块方阵,若其子阵块满足条件$A_{ij}=O(i>j$或$i<j)$,即对角线下方或上方的子阵块均为零矩阵,则称$A=[A_{ij}]_{s\times s}$为三角形分块矩阵. 上(下)三角形分块矩阵形如

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{A}_{ss} \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & & \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss} \end{bmatrix}.$$

1.1.4　矩阵的转置

1. 矩阵转置概念

在表 1.1.1 中，每一季度的销量数据排成一行，每种商品的销量数据排成一列. 如果将每种商品的销量数据排成行，每一季度的销量数据排成列，则能得到一个“商品季度销量表”. 这两个表对应的矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 1322 & 2453 & 225 \\ 1058 & 2743 & 200 \\ 2584 & 3167 & 306 \\ 2442 & 1800 & 319 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1322 & 1058 & 2584 & 2442 \\ 2453 & 2743 & 3167 & 1800 \\ 225 & 200 & 306 & 319 \end{bmatrix},$$

它们反映了相同的销量信息. 以上两个矩阵的关系就是下面要介绍的转置关系.

矩阵的转置　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，取 $b_{st}=a_{ts}$，则称 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times m}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

从上述定义容易推出，矩阵的转置就是将这个矩阵的行写成相应的列，列写成相应的行. 也可理解为将矩阵的每一个元素写到关于“对角线”对称的位置上.

例 1.1.4　如表 1.1.2 是在足球联赛中 5 支参赛球队的主场得分情况.

表 1.1.2　主场得分表

球　队	1	2	3	4	5
1	0	1	1	3	0
2	1	0	0	0	1
3	3	0	0	3	3
4	1	0	3	0	0
5	3	3	1	0	0

表中数据形成的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 为“主队、客队得分矩阵”，亦称“主场