单墫数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

十个有趣的数学问题

◎著

当读书不只是为了考试
你才会真正爱上数学
单墫老师娓娓道来
与你分享他所理解的数学之美

华东师范大学出版社
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

单墫数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

十个有趣的数学问题

单墫◎著

华东师范大学出版社　江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

十个有趣的数学问题/单墫著. —上海：华东师范大学出版社，2010.
（单墫老师教你学数学）
ISBN 978-7-5617-8050-3

Ⅰ.①十… Ⅱ.①单… Ⅲ.①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 171450 号

单墫老师教你学数学
十个有趣的数学问题

著　者　单　墫
策划组稿　倪　明　孔令志
审读编辑　徐慧平
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　址　www.ecnupress.com.cn
电　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　江苏句容排印厂
开　本　890×1240　32 开
印　张　4.75
字　数　109 千字
版　次　2011 年 3 月第一版
印　次　2011 年 8 月第二次
书　号　ISBN 978-7-5617-8050-3/G·4706
定　价　13.00 元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系）

总　序

科学昌明，既需要科学家筚路蓝缕、披荆斩棘，也需要普及工作者耕耘播种、热心培育.

普及工作很重要. 如果将科学研究比作金字塔的塔尖，那么普及工作就是金字塔的底. 底宽，塔才高.

科学研究不容易. 从事研究，需要才能、努力与机遇. 能够从事研究的人不多，好像阳春白雪，曲高和寡. 他们的成果需要普及工作者通俗化、趣味化，才能广为人知，才能使更多的人关心、了解、理解，才能引起公众的兴趣，吸引更多的新人一同参加研究. Fermat 大定理就是一个典型的例子. 虽然只有 Wiles 一个人给出了证明，看懂证明的不过十几个人或几十个人，但对大定理感兴趣的人成千上万. 他们都是普及读物的读者.

普及工作使千万人受益，我就是其中之一.

在学生时代，我读过不少数学普及读物. 如刘薰宇的《数学园地》，孙泽瀛的《数学方法趣引》，许莼舫的《几何定理和证题》，Casey 的《近世几何学初编》，日本数学家林鹤一的《初等几何作图不能问题》、上野清的《大代数讲义》，前苏联数学家写的数学丛书《摆线》、《双曲线函数》等，以及稍后中国数学家华罗庚等写的数学丛书《从杨辉三角谈起》等. 还在《科学画报》上看到谈祥柏先生写的妙趣横生的文章《奇妙的联系》等. 这些数学读物不仅使我学到许多数学知识、方法和思想，眼界大开，而且使我对数学产生了浓厚的兴趣，甚至立志要当一名数学家.

但当数学家的梦想却难以实现. 因为那时政治运动频仍. 读书，被认为"走白专道路"，会横遭批判. 史无前例的文化大革命

更是书与读书人的一场浩劫.

“四人帮”倒台后,我才有幸到中国科学技术大学作研究生.在1983年成为首批18名国产博士之一.但这一年我已年届不惑,从事数学研究的黄金时期业已过去.我觉得与其花费时间凑一些垃圾论文,不如做普及工作对社会更有贡献.

对普及工作,我有浓厚的兴趣,也有一定的基础:

1. 由于做过一些研究工作,能够了解较新的材料,能够较为准确地把握数学及有关史料.

2. 由于当过多年教师,文字也还通顺,能够注意趣味性与深入浅出.

1977年恢复高考后,一度出现读书的热潮.这时常庚哲先生带头写了《抽屉原则及其他》,受到普遍的好评.稍后,上海教育出版社的王文才、赵斌两位编辑邀我写稿,我就写了《几何不等式》、《趣味的图论问题》,在1980年出版.以后又陆陆续续写了《覆盖》、《组合数学中的问题和方法》、《趣味数论》、《棋盘上的数学》、《解析几何中的技巧》、《算两次》、《集合及其子集》、《组合几何》、《对应》、《国际数学竞赛解题方法》(与葛军合作)、《不定方程》(与余红兵合作)、《巧解应用题》、《因式分解》、《平面几何中的小花》、《数学竞赛史话》、《解题思路训练》、《十个有趣的问题》、《概率与期望》、《小学数学趣题巧解》、《快乐的数学》、《数列与数学归纳法》、《解题研究》、《数学竞赛教程》等等.

由于文革后,大家渴望读书.而此前的书大多毁于“文革”劫火.因此新出的书颇受欢迎,其中也包括了我写的小册子.

冯克勤先生说:“不要小看了这些小册子,它们将数学的美带给大众.”(冯克勤《评审意见》)

杨世明、杨学枝先生说:“直到1980年,大家才盼来单墫的《几何不等式》一书……不仅普及了基础知识、基本思想方法,而

且激发了研究兴趣.今天初等不等式研究中的许多骨干,都曾从该书获益.单墫的《几何不等式》一书,无疑是这一阶段的标志性的著作."(杨世明,杨学枝《初等不等式在中国》,载《中学数学研究》2007 年第 1 期).

还有一些数学教师见到我客气地说:"我们都是读您的书长大的."

这些评论当然是过奖的溢美之词,但也说明普及工作是一件有意义的、值得去做的事情.

近年来,急功近利的风气在学校蔓延.要根治这种歪风,还得提倡读书.要使广大青少年"热爱知识,渴求学问"(卡耐基《林肯传》,人民文学出版社,2005 版第 16 页).

首先,得多出一些好书,供大家阅读.

读书是天下第一件好事,读好书是人生第一件乐事,好读书,读好书,进步就迅速.有些学生学数学,只做题,从不看书.这种做法是难以进步的.

感谢华东师范大学出版社出版我的科普著作集.这 7 种小册子修订后,重新出版,希望能有较多的读者,特别是青少年读者.希望它们能给爱好数学的朋友们带来乐趣.

前　言

1996年夏天，田廷彦先生约我为他们的《科学》杂志撰稿，因此写了“挂谷问题”、“十三个球的问题”等几篇文章．后来叶中豪先生又鼓励我将这些材料搜集成书，于是补充了几篇，凑成十全之数．

除去“正整数集上的库拉托夫斯基问题”一篇有一点我自己独创的工作外，其他9篇，就数学而言，都是前人已有的结果．我所做的属于普及工作，即介绍这些问题，使它们能为更多的人知道．

数学，是一门博大精深的学问，能从事一线研究的只是少数天才或准天才．但数学又是一种文化，应当使尽可能多的人了解它，对它产生兴趣，在各种不同的层次上学习数学，研究数学．就像体育运动一样，绝大多数参加体育运动的人并不想争奥运会冠军，而只是喜爱某项运动．

因此，数学的普及工作是十分有意义的．由于数学问题往往有相当的深度，所以数学的普及应当有不同的层次．层次越高，则数学内容越多；层次越低，则故事性、趣味性越强，读者面也更广泛．这里所说的层次高低，并不意味水平的高低．越通俗的报告，往往越贴近问题的实质，越需要高超的表达技巧，正如华罗庚先生所说：“深入浅出是真功夫．”

笔者从事数学普及工作多年，深感普及工作是一件吃力而不易讨好之事．这本小册子介绍的问题，大多本身饶有趣味，而且有人已经写过．笔者虽有站在前人肩上的便宜，但是否能写得更好却没有丝毫把握．

如与自己以前写的数学小册子相比，史的比重增加了，搜集了一些资料，做了一番梳理、核查工作. 这也算一种新的尝试吧！

十个数学问题是什么，请读者自己看书，这里不再赘述.

单墫

1998年于广州

目　录

1

立方倍积

1.1 源起

传说在公元前四百多年，希腊的雅典发生了时疫. 人们为了消除灾难，便向 Delos 的太阳神庙去求助. 遵照神谕，必须把立方的祭坛增大一倍，疫病才不会流行. 一位自作聪明的设计师将祭坛的每边增大一倍，做了一个新的祭坛放在太阳神庙里，结果太阳神大怒，疫势更加猖獗. 人们发现新祭坛体积是原来的八倍，而不是两倍. 那么应当怎样做才符合要求呢?

这就是著名的立方倍积问题，也称为 Delos 问题.

更早一些，有一位不出名的希腊诗人叙述过类似的问题，说的是希腊神话中的国王米诺（Minos）要儿子格劳卡斯(Glaucus)将给他建造的坟墓增大一倍，并说:“只要将每边增大一倍，就可以实现我的要求.”

这种传说大多是无稽之谈，但对于问题的传播起了推波助澜的作用.

确切的是这个问题很早就产生了，而且很多古希腊的学者，例如柏拉图(Plato，约前 427—约前 347)及其学派，都曾研究过这个问题.

1.2 等价形式

立方倍积的第一个真正进展是希波克拉特(此人在“化圆为方”一章中还要说到)给出问题的一个等价形式,这种形式便于用相似三角形等方法进行讨论.

设 a 为已知立方体的边长,x 为所求立方体的边长,则

$$x^3 = 2a^3. \tag{1}$$

希腊人早就知道 x 在 a 与 $2a$ 之间,希波克拉特在 x 与 $2a$ 之间再插入一项 y,使 a, x, y, $2a$ 成等比数列,即有

$$a : x = x : y = y : 2a. \tag{2}$$

反之,若(2)成立,则

$$\frac{2a}{x} = \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

从而(1)成立.所以立方倍积问题等价于在 a 与 $2a$ 之间插入两项 x, y,使 a, x, y, $2a$ 成等比数列.

1.3 实际与理论

作为一个实际问题,改建祭坛的工作一点也不困难.

不妨设原祭坛边长 a 为 1 米(或 1 个长度单位),则新祭坛边长 x 为$\sqrt[3]{2}$米.

问题即如何作$\sqrt[3]{2}$米的长度.在实际施工时,必然采取近似作法.实际上,即使作 2 米的长度,也就是将原长度 1 米延长至 2 倍,虽然可以用圆规直尺来作,从理论上说是准确的,但在操

作时仍不免产生误差. 谁见过恰好长 1 米或长 2 米的线段(一点误差也没有)?

不难算出 $\sqrt[3]{2}=1.2599210\cdots$. 用 1.260 米为边作一个立方体,它的体积大约就是 2 米^3,和 2 米^3 的误差不超过 0.001 米^3. 即使在理论上能作出长为$\sqrt[3]{2}$的线段,实际施工时也不免产生误差. 0.1 厘米的误差应当在许可范围之内,所以采用上面的近似值进行制作,是无可非议的.

作为一个理论问题,希腊人要求仅用圆规与直尺准确地(在理论上)作出长为$\sqrt[3]{2}$的线段,而不是长度近似于$\sqrt[3]{2}$的线段.

这里的圆规、直尺有以下功能:

(1) 过两点作一条直线;

(2) 以一点为圆心,过任一点画圆;

(3) 在任一射线 OA 上截取线段 OB 与已知线段相等.

有限多次地使用圆规、直尺进行上述 3 项作图,称为尺规作图.

希腊人为什么限定用圆规、直尺作图,并将规、尺的功能加以限定呢?

一方面,规、尺是基本的作图工具,初等几何中的图形也都是由直线与圆组成的,似乎都可以通过尺规作图作出来. 另一方面,希腊的学者,例如柏拉图,非常重视数学在训练智力方面的作用,认为限制作图工具有助于培养逻辑思维能力;欧几里得更强调从最少的基本假定(定义、公理)出发,推出尽可能多的命题. 所以作图工具也相应地剩下少到不能再少的规、尺两种.

但是,尺规作图有其局限性. 很多作图问题,不能用尺规作图完成,最著名的就是立方倍积、三等分任意角和化圆为方. 它们称为几何作图的三大问题. 两千多年来,无数的聪明才智倾注

在这几个问题之中.这几个问题,在19世纪业已解决.1837年,旺策尔(Pierre Laurent Wantzel, 1814—1848)证明了立方倍积与三等分任意角都是不可能尺规作图的.1882年林德曼(Ferdinand Lindemann, 1852—1939)证明了π是超越数,从而化圆为方也是不可能尺规作图的.

1.4 “不可能”的证明

怎样证明一个作图问题不可能用尺规作图解决呢?

古希腊人无法解决这样的问题,因为他们没有跳出初等几何的圈子.“不识庐山真面目,只缘身在此山中.”

解决这类问题的关键之一是建立几何与代数之间的联系.

1637年,笛卡儿(René Descartes,1596—1650)发明了解析几何,其主要思想是:

(1) 建立直角坐标系,使平面上的点P与有序实数对(x, y)一一对应,(x, y)称为点P的坐标.

(2) 建立起平面曲线与方程$F(x, y)=0$的对应.特别地,直线是一次方程$ax+by+c=0$,圆是二次方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

在立方倍积这一问题中,已知长为1(即坐标轴上的单位),采用尺规作图,可以作出一条线段的正整数倍,又可将这线段任意等分,从而可以作出平面上所有的有理点,它们的坐标x、y的集合是全体有理数$\mathbf{Q}$.

$\mathbf{Q}$是一个域,也就是在$\mathbf{Q}$中可以进行加、减、乘、除(除数非0),结果仍是有理数.

如果在$\mathbf{Q}$中添加$\sqrt{2}$,得出所有形如$a+b\sqrt{2}$的数,其中a、

b 为有理数,这添加后的集记为 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$也是域,即形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数,经加、减、乘、除后仍在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$中,例如

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}$$
$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

类似地,任一个数域 K 添加一个二次无理数 α 后,得到的集 $K(\alpha)=\{a+b\alpha: a, b\in K\}$ 仍然是域.

在尺规作图中,如果所有已知点的坐标都属于某个数域 K,那么任取的点由于没有其他信息,只能假定它们都是坐标在域 K 中的点.因此,过上述点的直线或以上述点为圆心、过上述点的圆,它们的方程中的系数都是域 K 中的数.直线与直线的交点,可通过解一次方程组得出,其坐标仍为域 K 中的数.直线与圆的交点或圆与圆的交点,可通过解二次方程组得出,方程组中一个方程是一次的(直线方程)或可化为有一个是一次的(由两圆方程相减产生),因此可用代入法解出,所以这些点的坐标应当在 K 或在 $K(\sqrt{a})$中,这里 a 是 K 中的一个数.

于是,从有理数域 $\mathbf{Q}$ 出发,使用尺规作图,所得的点的坐标应当在 $\mathbf{Q}$ 的一个扩域中,这个扩域 K_n 是由 $\mathbf{Q}$ 经有限多次添加形如 $\sqrt{a_j}$ 的数得出的, $a_j\in K_j$, $\sqrt{a_j}\notin K_j$, $K_{j+1}=K_j(\sqrt{a_j})(j=0, 1, \cdots, n-1; K_0=\mathbf{Q})$.如果所要作的长度或所要求的点的坐标不在这种扩域中,那么尺规作图就不可能解决(笛卡儿已经知道这一点,并曾给出尺规作图不可能问题的一个不够严密的证明).例如立方倍积中,$\sqrt[3]{2}$就不是这样的数,所以立方倍积是尺规作图不可能问题.

从直觉上看，由 $\mathbf{Q}$ 出发，经过有限多次开平方运算，不可能得出立方根$\sqrt[3]{2}$. 但要证明这一点却并不容易. 最自然的方法是用域扩张理论，即扩张次数 $(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbf{Q})=3$，而对上面所说的 K_n，扩张次数 $(K_n:\mathbf{Q})=2^n$. 显然 $2^n\neq 3$. 下面我们给出一个简单的初等证明.

设$\sqrt[3]{2}\in K_n$，而$\sqrt[3]{2}\notin K_{n-1}$，则有 $a, b, d\in K_{n-1}$，$\sqrt{d}\notin K_{n-1}$，使

$$a+b\sqrt{d}=\sqrt[3]{2}. \tag{3}$$

立方得

$$(a+b\sqrt{d})^3=2, \tag{4}$$

即

$$a^3+3ab^2d+\sqrt{d}(3a^2b+b^3d)=2. \tag{5}$$

因为 $\sqrt{d}\notin K_{n-1}$，所以必有

$$\begin{cases} a^3+3ab^2d=2, \\ 3a^2b+b^3d=0. \end{cases} \tag{6}$$

由(6)得

$$(a-b\sqrt{d})^3=2. \tag{7}$$

开立方(取实根)得

$$a-b\sqrt{d}=\sqrt[3]{2}. \tag{8}$$

由(3)、(8)得$\sqrt[3]{2}=a$，即$\sqrt[3]{2}\in K_{n-1}$，这与已知矛盾. 所以$\sqrt[3]{2}$不属于一切 K_n.

1.5 不限于尺规的作法

虽然立方倍积是尺规作图不可能问题，但不限于尺规作图，人们早已发现种种作法. 下面介绍几种.

方法一 如图 1，首先作两条互相垂直的直线，相交于点 C. 分别在这两条直线上取 $CA = a$，$CB = 2a$.

然后用两个直角的曲尺（木工常用的工具）或三角板，使一个曲尺的一边通过 B，直角顶点在直线 AC 上；另一个曲尺的一边通过 A，直角顶点在直线 BC 上. 移动两个曲尺（保持上述特点），直至两个曲尺有一条直角边吻合（成一条直线）. 这时 $CX = x$，$CY = y$ 即为所求.

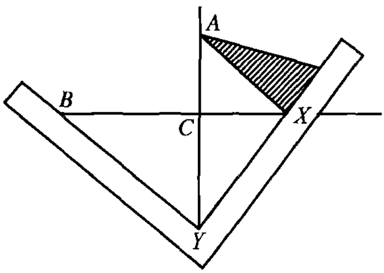

图 1

事实上，在 Rt△BXY 中，斜边上的高 $CY = y$ 满足

$$y : 2a = x : y. \tag{9}$$

而在 Rt△AXY 中，$CX = x$ 满足

$$a : x = x : y. \tag{10}$$

(9)、(10)表明 a，x，y，$2a$ 成等比数列.

欧托修斯（Eutocius）将上述作法归之于柏拉图. 但柏拉图

反对采用尺、规以外的工具,所以这一说法值得怀疑.

方法二 如图 2,考虑两条抛物线 $x^2=ay$ 与 $y^2=2ax$. 设它们的(不同于原点 O 的)交点为 P,则 P 的坐标 x、y 显然满足要求.

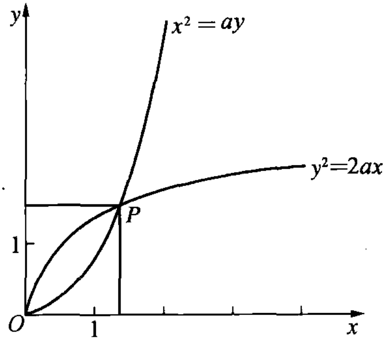

图 2

抛物线当然无法用尺规作出,但可用机械的方法作图(它是到一定点与到一定直线距离相等的点的轨迹). 这一作法属于公元前 3 世纪的梅内赫莫斯(Menaechmus,前 375—前 325). 正是由这一作法,他发现了圆锥曲线(抛物线、椭圆、双曲线).

方法三 考虑抛物线 $x^2=ay$ 与双曲线 $xy=2a^2$ 的交点坐标. 这一作法也属于梅内赫莫斯.

方法四 更一般地,设 $a<b$. 我们作 x, y,使 a, x, y, b 成等比数列.

为此,如图 3,作一边在 x 轴上、一边在 y 轴上的矩形 $OABC$, $OA=b$, $OC=a$. 再以矩形中心 E 为圆心作矩形的外接圆. 易知这圆的方程为

$$x^2+y^2=ay+bx. \tag{11}$$