

21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

# 黎曼几何基础

L I M A N      J I H E      J I C H U

北京师范大学数学科学学院 主 编

■ 唐梓洲 / 编 著



北京师范大学出版集团  
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP  
北京师范大学出版社

21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

# 黎曼几何基础

L I M A N      J I H E      J I C H U

北京师范大学数学科学学院 主 编

唐梓洲 / 编 著



北京师范大学出版集团  
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP  
北京师范大学出版社

---

**图书在版编目(CIP)数据**

黎曼几何基础 / 唐梓洲著. —北京: 北京师范大学出版社, 2011.2

(21世纪高等学校研究生教材)

ISBN 978-7-303-11815-1

I. ①黎… II. ①唐… III. ①黎曼几何—研究生—教材 IV. O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 229245 号

---

营销中心电话 010-58802181 58808006  
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>  
电子信箱 beishida168@126.com

---

出版发行: 北京师范大学出版社 [www.bnup.com.cn](http://www.bnup.com.cn)

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印刷: 北京中印联印务有限公司

经销: 全国新华书店

开本: 170 mm × 230 mm

印张: 9.25

字数: 160 千字

版次: 2011 年 2 月第 1 版

印次: 2011 年 2 月第 1 次印刷

定价: 15.00 元

---

策划编辑: 岳昌庆 责任编辑: 岳昌庆 程丽娟

美术编辑: 毛佳 装帧设计: 毛佳

责任校对: 李茵 责任印制: 李啸

**版权所有 侵权必究**

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

# 前 言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节,是研究生教学改革措施之一,也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据。纵观我院的研究生教育,可分为几个阶段:1954~1960年是我院研究生教育初创时期,招生为代数、分析、几何等方向的10个研究生班;1962~1965年改为招收少量的硕士研究生;1966~1976年“文化大革命”时期,研究生停止招生。1978年,我院恢复招收硕士研究生,研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外,主要学习几门专业课。每年导师根据招生情况,分别制订每个研究生的培养计划。从1982年开始,首次开展制订攻读硕士学位研究生培养方案的工作。为拓宽研究生的知识面,对每届研究生开设5门专业基础理论课:泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形,每人至少选3门;从1983年起,增加代数拓扑,共6门基础理论课,安排有经验的教师讲课且相对固定,考试要求严格,使研究生受到正规的训练。由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距,经过这个阶段的学习后,基本上达到了一个相同的水平,为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障。在1992年修订教学计划时,增加了概率论基础和计算机基础。这样,基础理论课共开设8门。从1997学年开始,规定研究生每人至少选4门。从2000年开始,改为开设12门基础课,增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程。从2007学年开始,改为开设15门基础课,增加高等统计学、最优化理论与算法、非线性泛函分析、动力系统基础,规定研究生每人至少选5门;去掉计算机基础。

经过近30多年系统的研究生培养工作,研究生教育正在逐步走向正规。在此期间,学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验,将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的。

随着研究生的扩招,招收研究生的数量越来越大。再加上培养方案的改革,出版研究生系列教材已经提到议事日程上来。在20世纪90年代,北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材:《泛函分析》《实分析》《随机过程通论》等,但未系统策划出版系列教材。2005年5月,由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,由北京师范大学数学科学学院组编(李仲来教授负责),准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版,进一步计划用几年时间,出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材和部分专业课教材。

我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者,提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善。

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论(数学)等硕士研究生使用和参考。

北京师范大学数学科学学院  
2010年9月18日

## 作者的话

——谨以此书纪念一代数学大师陈省身先生诞辰100周年

毋庸置疑，黎曼几何在当今，无论是在数学理论本身，还是在理论物理等其他学科，都日益显示出其重要性。

本书共分八章，力求语言和叙述简洁精炼。第一章简述了微分流形的基本内容，是学习后面章节的基础。第二章到第六章是黎曼几何的必备。依本人的兴趣，第七章讲子流形理论，第八章讲复几何。希望所著之书的内容，既在基础理论上自成体系，又能给读者奠定坚实的基础。

自2004年以来，本人在清华大学和北京师范大学为研究生多次讲授黎曼几何课程。本书是在原英文讲稿的基础上，由谢余铨博士翻译和整理而成。为了知识的系统性，他在书中适当添加了部分内容。后来，谢余铨博士、彦文娇、钱超、岳跃朝和徐玲等同学又对本书反复校对和修改。在此向他们表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免会有不妥之处，望读者不吝指教。

唐梓洲

2010年7月6日于北京蓝旗营

# 目录

第一章 微分流形	1
§1.1 光滑结构	1
§1.2 浸入与嵌入	9
§1.3 几种特殊的流形与流形的定向	12
§1.4 光滑向量场	18
§1.5 李群	22
第二章 度量	29
§2.1 黎曼度量	29
§2.2 度量形式与体积	33
第三章 联络	40
§3.1 仿射联络	40
§3.2 Levi-Civita 联络	44
第四章 测地线	50
§4.1 测地流	50
§4.2 测地线的极小性质	58
§4.3 测地凸邻域	64
§4.4 黎曼流形上的微分算子	67
第五章 曲率	73
§5.1 曲率张量	73
§5.2 截面曲率	76
§5.3 Ricci 曲率和数量曲率	79
§5.4 张量	80
§5.5 活动标架	84
§5.6 Gauss-Bonnet 定理	94
第六章 Jacobi 场	99
§6.1 Jacobi 方程	99
§6.2 共轭点	104

---

第七章 子流形几何 .....	108
§7.1 第二基本型 .....	108
§7.2 基本方程 .....	113
§7.3 活动标架 .....	118
第八章 Hermitian 几何 .....	123
§8.1 近复结构 .....	123
§8.2 Hermitian 流形 .....	125
§8.3 活动标架 .....	128
参考文献 .....	134
中文索引 .....	136
英文索引 .....	139

# 第一章 微分流形

## §1.1 光滑结构

**定义1.1.1** 设拓扑空间  $M$  是一个具有可数基的 Hausdorff 空间, 并且存在一集族  $\{(X_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$  满足:

- (1)  $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha(U_\alpha)$ , 其中  $U_\alpha$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集, 映射  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha)$  是同胚的;
- (2) 相容性: 对任意的  $\alpha, \beta \in \Lambda$ , 若  $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ , 则坐标变换  $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$  是  $C^\infty$  的(图 1.1);
- (3) 对于条件 (1) 和 (2) 来说, 族  $\{X_\alpha(U_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$  是极大的.

则称  $M$  为  $n$  维  $C^\infty$  微分流形(differentiable manifold).

对于任意的点  $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ ,  $(X_\alpha, U_\alpha)$  称为  $M$  在点  $p$  的一个参数化(parametrization)(或局部坐标系).  $X_\alpha(U_\alpha)$  称为点  $p$  的一个坐标邻域. 满足条件 (1) 和 (2) 的集族  $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$  称为流形  $M$  上的一个光滑结构(smooth structure). 而条件 (3) 纯粹是技术上的处理.

若无条件 (2), 则称  $M$  是拓扑流形; 若坐标变换只假定是  $C^r$  的 ( $r \geq 1$ ), 则称  $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$  为流形  $M$  上的一个  $C^r$  微分结构, 称  $M$  为  $C^r$  微分流形. 如无特别说明, 本书上的微分流形都是指  $C^\infty$  微分流形.

下面介绍几个微分流形的例子.

**例 1.1.1** 欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  是一个  $n$  维微分流形.

**练习 1.1** 试证: 若  $M$  和  $N$  都是微分流形, 则乘积空间  $M \times N$  也是微分流形.

**例 1.1.2** 在  $\mathbb{R}$  上可以构造不同的光滑结构.

设  $\text{Id}$  是恒等映射, 显然  $\{(\text{Id}, \mathbb{R})\}$  是  $\mathbb{R}$  上的光滑结构.

另定义映射  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为

$$X(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

容易验证,  $\{(X, \mathbb{R})\}$  也是  $\mathbb{R}$  上的一个光滑结构.



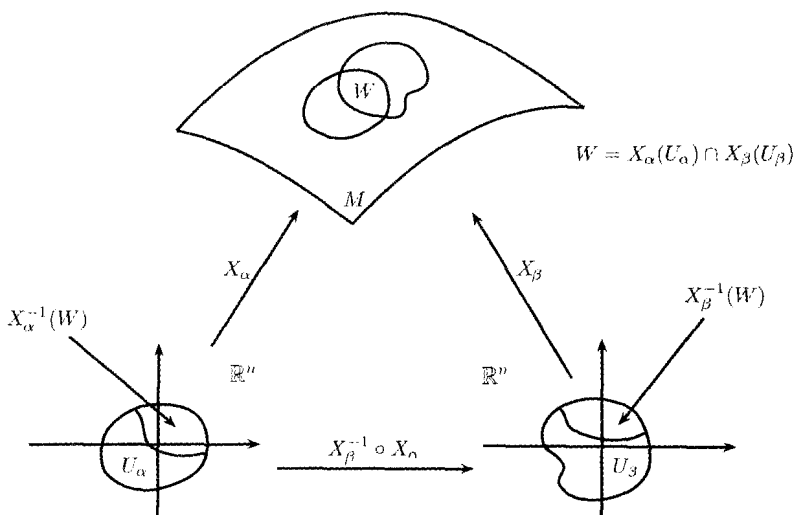


图 1.1

由于坐标变换  $X^{-1} \circ \text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$t \mapsto \sqrt[3]{t},$$

在  $t = 0$  处不是  $C^\infty$  的, 因此  $\{(\text{Id}, \mathbb{R})\}$  和  $\{(X, \mathbb{R})\}$  是  $\mathbb{R}$  上两个不同的光滑结构.

例 1.1.3 欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中的开集显然是一个微分流形. 作为一个特例, 一般(实)线性群  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A_{n \times n} \mid \det A \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$  是一个微分流形.

例 1.1.4  $n$  维标准球面  $S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

由于  $\mathbb{R}^{n+1}$  是 Hausdorff 空间, 球面  $S^n$  作为  $\mathbb{R}^{n+1}$  的拓扑子空间也是 Hausdorff 空间.

设  $N = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ , 令

$$V_1 = S^n - \{N\}, \quad V_2 = S^n - \{S\}.$$

利用球极投影, 有映射  $X_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow V_1$ ,  $X_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow V_2$ ,

$$X_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + |y|^2} (|y|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n),$$

$$X_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + |y|^2} (1 - |y|^2, 2y_1, \dots, 2y_n).$$

其中,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $|y|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$ .

由于  $X_1(\mathbb{R}^n) \cap X_2(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ , 坐标变换  $X_2^{-1} \circ X_1 : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ ,

$$X_2^{-1} \circ X_1(y) = \frac{y}{|y|^2}$$

是  $C^\infty$  的. 所以,  $\{(X_1, \mathbb{R}^n), (X_2, \mathbb{R}^n)\}$  给出了球面  $S^n$  的一个光滑结构.

例 1.1.5 实投影空间  $\mathbb{R}P^n$ .

实投影空间  $\mathbb{R}P^n$  是指  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的一维线性子空间的全体, 或可看成  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  的等价类的全体, 这里等价关系定义为:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, y = \lambda \cdot x.$$

由于  $\mathbb{R}^{n+1}$  中每一个一维线性子空间与单位球面  $S^n$  恰有两个交点. 因此,  $\mathbb{R}P^n$  又可视为  $S^n$  中对径点等同下的商空间, 即  $\mathbb{R}P^n = S^n / \mathbb{Z}_2$ , 其中  $\mathbb{Z}_2$  是群作用. 下面我们将给出  $\mathbb{R}P^n$  上的一个光滑结构.

定义映射  $X_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , 使得

$$X_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n], \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

其中,  $[y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]$  是  $\mathbb{R}P^n$  的齐次坐标.

可验证,  $X_i : \mathbb{R}^n \rightarrow X_i(\mathbb{R}^n)$  是同胚. 现求坐标变换, 不失一般性, 假设  $j < i$ , 则

$$X_j^{-1} \circ X_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{y_j}(y_1, y_2, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n).$$

所以,  $X_j^{-1} \circ X_i$  是  $C^\infty$  的. 这样,  $\{(X_i, \mathbb{R}^n) | i = 1, 2, \dots, n+1\}$  便给出了  $\mathbb{R}P^n$  上的一个光滑结构.

注 1 同样, 我们可以定义复投影空间  $\mathbb{C}P^n$  和四元数投影空间  $\mathbb{H}P^n$ , 甚至 Cayley 投影平面  $\text{Ca}P^2$ . 当然, Cayley 投影平面的定义有点特别, 见参考文献 [Tan01].

注 2 存在这样的拓扑流形, 使得它上面不存在任何光滑结构. 见参考文献 [Ker60].

注 3 对任意维数小于等于 3 的拓扑流形都存在唯一的光滑结构. 见参考文献 [Mun60].

定义 1.1.2 设  $M_1, M_2$  分别是  $n$  维和  $m$  维微分流形. 给定点  $p \in M_1$  和映射  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ , 设  $X(U)$  和  $Y(V)$  分别是点  $p$  和点  $\varphi(p)$  的一个参数化且满足  $\varphi(X(U)) \subset Y(V)$ . 若映射

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

在点  $X^{-1}(p)$  处是  $C^\infty$  的, 则称  $\varphi$  在点  $p$  处是光滑的(如图 1.2). 如果  $\varphi$  在  $M_1$  上处处是  $C^\infty$  的, 则称映射  $\varphi$  是光滑映射(smooth map).

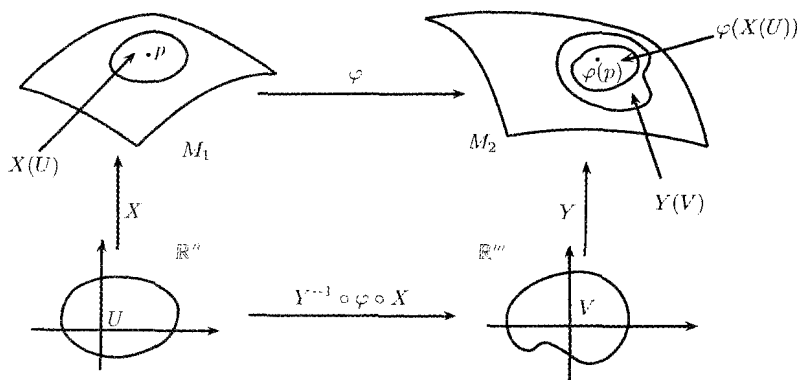


图 1.2

特别地, 若  $M$  是一个微分流形, 我们称光滑映射  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  为  $M$  上的一条光滑曲线(smooth curve); 称光滑映射  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  为  $M$  上的一个光滑函数. 记  $M$  上所有光滑函数的全体为  $\mathcal{D}(M)$ .

定义1.1.3 设  $\alpha$  是  $M$  上经过点  $p$  的一条曲线,  $\alpha(0) = p$ ,  $U$  是点  $p$  的一个邻域. 记  $\mathcal{D}(U)$  是定义在  $U$  内且在点  $p$  处光滑的全体函数的集合. 曲线  $\alpha$  在  $t = 0$  时的切向量(tangent vector)是一个映射  $\alpha'(0) : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha), \quad f \in \mathcal{D}(U).$$

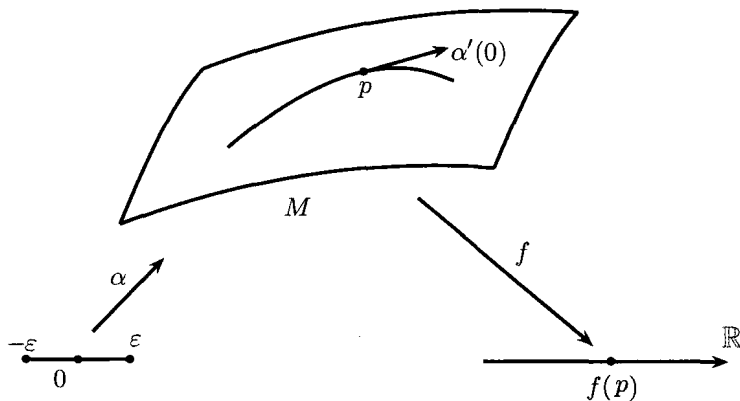


图 1.3

设  $M$  是一个  $n$  维微分流形,  $p \in M$ . 我们将点  $p$  处的切向量定义为  $M$

上某一条曲线  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ,  $\alpha(0) = p$ , 在  $t = 0$  时的切向量. 不难验证, 它与曲线的选取无关, 这样的定义是合理的. 记点  $p$  处的切向量的全体为  $T_p M$ . 这样, 对任意的  $v \in T_p M$ , 都存在某一条曲线  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , 使得  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . 容易验证,  $T_p M$  上有自然的向量空间结构.

**断言** 向量空间  $T_p M$  的维数为  $n$ .

**证明** 选取点  $p$  处的一个参数化  $(X, U)$ , 使得  $0 \in U$ ,  $X(0) = p$ , 设相应的局部坐标为  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . 对任意的  $i = 1, 2, \dots, n$ , 考虑过点  $p$  坐标曲线  $\gamma^i: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , 使得

$$\gamma^i(t) = X(0, \dots, t, \dots, 0), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

我们将  $\gamma^i$  在点  $p$  处的切向量记为:  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0$ , 则对任意的  $f \in \mathcal{D}(M)$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 (f) &= \left. \frac{d(f \circ \gamma^i(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ X(0, \dots, t, \dots, 0))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0. \end{aligned}$$

不难看出, 这  $n$  个切向量是线性无关的. 事实上, 假设存在  $a_i \in \mathbb{R}$ , 使得

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0.$$

将它作用在第  $j$  个坐标函数上, 可得

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 (x_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j.$$

另一方面, 对任意的  $v \in T_p M$ , 存在曲线  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , 使得  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ . 在参数化  $(X, U)$  下, 曲线  $\alpha$  可以写成:

$$X^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

令  $f \circ X(q) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ . 根据链式求导法则, 可得:

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_0 \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 \right) (f). \end{aligned}$$

因此,

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0. \quad (1.1)$$

由 (1.1) 式可以看出, 对任意的切向量  $v$  我们都能够用坐标切向量

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_0, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_0, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_0 \right\}$$

线性表示, 并且它的系数  $x'_i(0)$  恰是切向量  $v$  作用在第  $i$  个坐标函数  $x_i$  上的值. 所以,  $T_p M$  是一个  $n$  维的向量空间. ■

从上面的证明可以看出, 参数化  $(X, U)$  给出了  $T_p M$  上的一组基  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_0, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_0, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_0 \right\}$ , 我们将这组基称为切空间  $T_p M$  在参数化  $(X, U)$  下的自然基底(图 1.4), 在这组基下切向量  $\alpha'(0)$  可写成

$$\alpha'(0) = (x'_1(0), x'_2(0), \dots, x'_n(0)).$$

显然,  $T_p M$  的线性结构与参数化  $(X, U)$  的选取无关. 向量空间  $T_p M$  称为  $M$  在  $p$  点的切空间(tangent space).

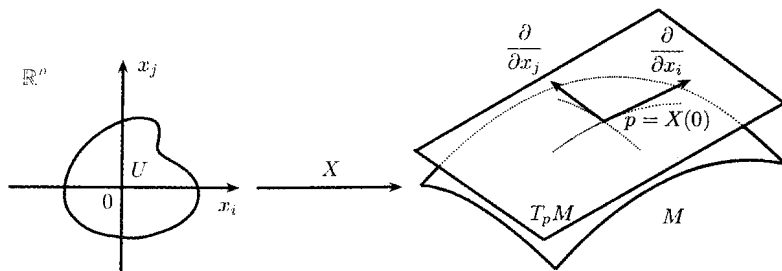


图 1.4

注 4 不难验证, 微分流形  $M$  在点  $p$  处的切向量  $v$  满足以下性质:

- (1) 对任意的  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ ,  $v(f + g) = v(f) + v(g)$ ;
- (2) 对任意的  $f \in \mathcal{D}(M)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $v(a \cdot f) = a \cdot v(f)$ ;
- (3) Leibniz 法则: 对任意的  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ ,  $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g)$ .

上述三条性质是切向量的基本特征. 在部分参考书上将它们直接作为切向量的公理化定义.

**练习 1.2** 设  $M$  是  $n$  维微分流形,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$  是光滑映射. 若对任意的点  $p \in M$ , 都存在一个参数化  $(X, U)$ , 使得  $n + \frac{n}{2}(n+1)$  个向量  $\{\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, (j \geq k)\}$  在  $X(U)$  上处处线性无关, 则称  $f$  是自由的. 证明: 定义是合理的, 即不依赖于参数化的选取.

**命题 1.1.4** 设  $M_1, M_2$  分别是  $n$  维和  $m$  维微分流形,  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  是光滑映射. 对于  $M_1$  上的点  $p$  和切向量  $v \in T_p M_1$ , 可选取曲线  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ , 使得  $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$ . 令  $\beta = \varphi \circ \alpha$ , 则映射  $d\varphi_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ ,  $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$  是线性映射且与曲线  $\alpha$  的选取无关(如图 1.5). 称  $d\varphi_p$  为  $\varphi$  在  $p$  点处的切映射(tangent map).

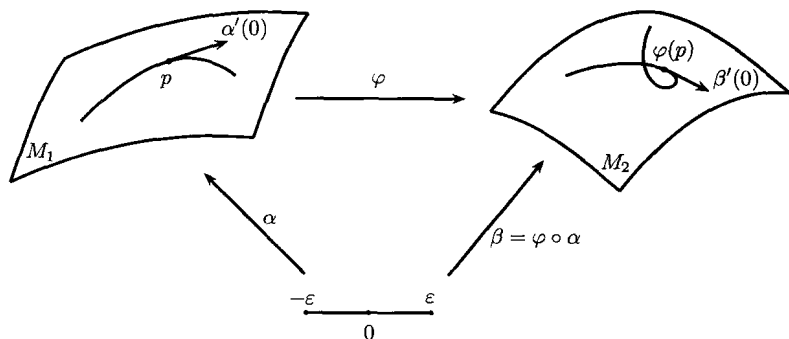


图 1.5

**证明** 分别选取点  $p$  和  $\varphi(p)$  的一个参数化  $(X, U)$  和  $(Y, V)$ , 在这两个参数化下  $\varphi$  可写成

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X(q) = (y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

这里  $q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U, (y_1, y_2, \dots, y_m) \in V$ .

曲线  $\alpha$  可写成

$$X^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

于是,

$$Y^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \dots, y_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))).$$

因此, 在自然基底  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_0, \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_0 \right\}$  下

$$\beta'(0) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x'_i(0), \frac{\partial y_2}{\partial x_i} x'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x'_i(0) \right). \quad (1.2)$$

所以,  $\beta'(0)$  与曲线  $\alpha$  的选取无关. 将(1.2) 改写成

$$\beta'(0) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} x'_i(0) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_0.$$

或

$$(\beta'(0))^T = d\varphi_p(v) = \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{m \times n} (x'_i(0))^T.$$

其中,  $\beta'(0)$  表示  $m$  个元素的行向量,  $\left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{m \times n}$  表示一个  $m \times n$  的矩阵,  $(x'_i(0))$  表示  $n$  个元素的行向量.

从上面的式子可以看出,  $d\varphi_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$  是一个线性变换, 它在参数化  $(X, U)$  和  $(Y, V)$  下所对应的矩阵恰好是  $Y^{-1} \circ \beta(t)$  的 Jacobi 矩阵. 证毕. ■

注 5 对于微分流形间的切映射, 不难验证:

- (1)  $d(\text{Id}) = \text{id}$ . 其中,  $\text{Id}$  是流形的恒等映射,  $\text{id}$  是切空间的恒等映射;
- (2)  $d(f \circ g) = d(f) \circ d(g)$ ;
- (3) 设  $(X, U)$  是  $M^n$  的一个参数化, 若  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , 则

$$dX(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

定义 1.1.5 设  $M_1, M_2$  是微分流形, 如果映射  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  既单又满, 且  $\varphi$  与  $\varphi^{-1}$  都是光滑的, 则称  $\varphi$  是微分同胚(diffeomorphism). 记为:  $M_1 \cong M_2$ .

显然, 如果  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  是微分同胚, 则  $M_1$  和  $M_2$  的维数相同.

定理 1.1.6 设  $M_1, M_2$  都是  $n$  维微分流形,  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  是光滑映射. 若存在  $p \in M_1$ , 使得  $d\varphi_p$  是线性同构, 则存在  $p$  点的开邻域  $U \subset M_1$ , 使得

$$\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$$

是一个微分同胚.

证明 先参数化, 再利用  $\mathbb{R}^n$  中的逆函数定理即证. ■

在同一个拓扑流形上可能有不同的微分结构, 但它们所构造的微分流形可能是微分同胚的.

例 1.1.6 设微分流形  $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$  的光滑结构分别是  $\{(\text{Id}, \mathbb{R})\}$  和  $\{(X(t) = t^3, \mathbb{R})\}$ , 则它们具有不同的光滑结构(见例 1.1.2), 但映射

$$\begin{aligned} \varphi: M_1 &\longrightarrow M_2 \\ t &\longmapsto t^3 \end{aligned}$$

是一个微分同胚.

注 6 存在 7 维光滑流形  $M^7$ , 使得  $M^7$  (拓扑)同胚于  $S^7$ , 但  $M^7$  不微分同胚于  $S^7$ . 见参考文献 [Mil56].

注 7 任意的  $C^1$  流形都  $C^1$  微分同胚于一个光滑流形. 见参考文献 [Hir76].

## §1.2 浸入与嵌入

定义 1.2.1 设  $M_1, M_2$  分别是  $n$  维和  $m$  维的微分流形,  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  为  $C^\infty$  映射. 对任意的  $p \in M_1$ ,

- (1) 若  $d\varphi_p$  都是单射, 则称  $\varphi$  是浸入 (immersion). 流形  $M_1$  称为流形  $M_2$  的浸入子流形;
- (2) 若  $d\varphi_p$  都是满射, 则称  $\varphi$  是浸没 (submersion);
- (3) 若  $d\varphi_p$  都是单射, 且  $\varphi(M_1) \subset M_2$  取子拓扑时, 映射  $\varphi: M_1 \rightarrow \varphi(M_1)$  是同胚的, 则称  $\varphi$  是嵌入 (embedding). 流形  $M_1$  称为流形  $M_2$  的嵌入子流形 (submanifold).

从定义可以看出, 若  $\varphi: M_1^n \rightarrow M_2^m$  是浸入, 则  $n \leq m$ ; 若  $\varphi$  是浸没, 则  $n \geq m$ .

例 1.2.1 浸入.

定义映射  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  为

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

因为对任意的  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0$ , 所以  $\varphi$  是浸入(如图 1.6).

例 1.2.2 浸没.

Hopf 纤维化 (Hopf fibration), 映射

$$\begin{aligned} \pi: S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (z, w) &\longmapsto (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}) \end{aligned}$$

其中,  $(z, w) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ ,  $S^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ ,  $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2$ ,  $w = y_1 + \sqrt{-1}y_2$ .



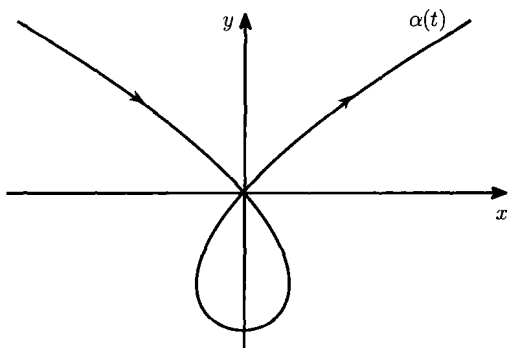


图 1.6

注意到,  $\pi(e^{\sqrt{-1}\theta}(z, w)) = \pi((z, w))$ , 因此球面  $S^3$  上任意点  $p$  处的切向量  $\sqrt{-1} \cdot p \in \text{Ker } d\pi_p$ . 设  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是映射  $\pi$  的自然扩充, 则切映射  $d\Phi$  可以写成矩阵形式:

$$d\Phi = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -y_1 & -y_2 \\ y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \\ -y_2 & y_1 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

故  $\text{Ker } d\Phi = \{\lambda \cdot (-x_2, x_1, -y_2, y_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . 于是, 对  $S^3$  上任意点  $p$ ,  $\text{Ker } d\pi_p = \{\lambda\sqrt{-1} \cdot p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . 因此,  $d\pi_p$  是满的,  $\pi$  是浸没.

注 1 Hopf 纤维化还有以下形式:  $\pi: S^7 \rightarrow S^4$ ,  $\pi: S^{15} \rightarrow S^8$ . 它们都是浸没, 其定义分别用到四元数和 Cayley 数的乘法.

例 1.2.3 单的浸入不一定是嵌入.

环面  $T^2 = S^1 \times S^1$  可以看作  $\mathbb{R}^2/\sim$ , 其中等价关系  $\sim$  定义如下, 对任意的  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, \text{ 使得 } x_1 = m + x_2, y_1 = n + y_2.$$

考虑映射  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow T^2$ ,

$$\varphi(t) = [(t, \varepsilon t)].$$

不难得到, 当  $\varepsilon$  为无理数时,  $\varphi$  是单一的浸入且象集  $\varphi(\mathbb{R})$  在  $T^2$  上处处稠密. 显然, 此时  $\varphi(\mathbb{R})$  作为  $T^2$  的子空间与  $\mathbb{R}$  不同胚. 因此,  $\varphi$  不是嵌入.

例 1.2.4 嵌入.

定义映射

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ [(x, y, z)] &\longmapsto \left(\frac{x^2-y^2}{2}, xy, yz, zx\right) \end{aligned}$$