普通高等院校“十二五”规划教材

数学建模算法与应用

司守奎 孙玺菁◎编著

Mathematical Modeling

国防工业出版社
National Defense Industry Press

随书附光盘一张

数学建模算法与应用

Mathematical Modeling

普通高等院校“十二五”规划教材

数学建模算法与应用

司守奎　孙玺菁　编著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

作者根据多年数学建模竞赛辅导工作的经验编写本书，涵盖了很多同类型书籍较少涉及的新算法和热点技术，主要内容包括时间序列、支持向量机、偏最小二乘回归分析、现代优化算法、数字图像处理、综合评价与决策方法、预测方法以及数学建模经典算法等内容。全书系统全面，各章节相对独立。

本书所选案例具有代表性，注重从不同侧面反映数学思想在实际问题中的灵活应用，既注重算法原理的通俗性，也注重算法应用的实现性，克服了很多读者看懂算法却解决不了实际问题的困难。

本书所有例题均配有 Matlab 或 Lingo 源程序，程序设计简单精炼，思路清晰，注释详尽，灵活应用 Matlab 工具箱，有利于没有编程基础的读者快速入门。同时很多程序隐含了作者多年的编程经验和技巧，为有一定编程基础的读者深入学习 Matlab、Lingo 等编程软件提供了便捷之路。

本书既可以作为数学建模课程教材和辅导书，也可以作为相关科技工作者参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模算法与应用/司守奎，孙玺菁编著．—北京：国防工业出版社，2011．8
普通高等院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-118-07647-9

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①司…②孙…　Ⅲ．①数学模型—高等学校—教材　Ⅳ．①O141．4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 151122 号

※

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 27¾　**字数** 649 千字
2011 年 8 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—4000 册　**定价** 49．00 元(含光盘)

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前 言

如今，人类社会正经历由工业化社会向信息化社会过渡的变革。以数字化为特征的信息社会有两个显著特点：计算机技术迅速发展与广泛应用；数学的应用向一切领域渗透。随着计算机技术的飞速发展，科学计算的作用越来越引起人们的广泛重视，已经与科学理论和科学实验并列成为人们探索和研究自然界、人类社会的三大基本方法。为了适应这种社会的变革，培养和造就出一批又一批适应高度信息化社会具有创新能力的高素质的工程技术和管理人才，在各高校开设“数学建模”课程，培养学生的科学计算能力和创新能力，就成为这种新形势下的历史必然。

数学建模是为了特定的目的，根据特有的内在规律，对现实世界的特定对象进行必要的抽象、归纳、假设和简化，运用适当的数学工具建立一个数学结构。数学建模就是运用数学的思想方法、数学的语言去近似地刻画一个实际研究对象，构建一座沟通现实世界与数学世界的桥梁，并以计算机为工具，应用现代计算技术，达到解决各种实际问题的目的。建立一个数学模型的全过程称为数学建模。因此“数学建模”（或数学实验）课程教学对于开发学生的创新意识，提升人的数学素养，培养学生创造性地应用数学工具解决实际问题的能力，有着独特的功能。

数学建模过程就是一个创造性的工作过程。人的创新能力首先是创造性思维和具备创新的思想方法。数学本身是一门理性思维科学，数学教学正是通过各个教学环节对学生进行严格的科学思维方法的训练，从而引发人的灵感思维，达到培养学生的创造性思维的能力。同时，数学又是一门实用科学，它能直接用于生产和实践，解决工程实际中提出的问题，推动生产力的发展和科学技术的进步。学生参加数学建模活动，首先就要了解问题的实际背景，深入到具体学科领域的前沿，这就需要学生具有能迅速查阅大量科学资料，准确获得自己所需信息的能力；同时，不但要求学生必须了解现代数学各门学科知识和各种数学方法，把所掌握的数学工具创造性地应用于具体的实际问题，构建其数学结构，还要求学生熟悉各种数学软件，熟练地把现代计算机技术应用于解决当前实际问题，最后还要具有把自己的实践过程和结果叙

述成文字的写作能力。通过数学建模全过程的各个环节,学生可以进行创造性的思维活动,模拟现代科学研究过程。通过“数学建模”课程的教学和数学建模活动,极大地开发了学生的创造性思维的能力,培养学生在面对错综复杂的实际问题时,具有敏锐的观察力和洞察力,以及丰富的想象力。因此,“数学建模”课程在培养学生的创新能力方面有着其他课程不可替代的作用。

几年的“数学建模”教学实践告诉我们,进行数学建模教学,为学生提供一本内容丰富,既理论完整又实用的“数学建模”教材,使学生少走弯路尤为重要。这也是我们编写这本教材的初衷。本教材既是我们多年教学经验的总结,也是我们心血的结晶。本教材的特点是尽量为学生提供常用的数学方法,并将相应的 Matlab 和 Lingo 程序提供给学生,使学生在进行书中提供的案例的学习时,在自己动手构建数学模型的同时上机进行数学实验,从而为学生提供数学建模全过程的训练,以便能够举一反三,取得事半功倍的教学效果。

全书共 15 章,各章有一定的独立性,这样便于教师和学生按需要进行选择。

一本好的教材需要经过多年的教学实践,反复锤炼。由于我们的经验和时间所限,书中的错误和纰漏在所难免,敬请同行不吝指正。

编 者

2011 年 5 月

目　录

第 1 章　线 性 规 划

1.1　线性规划问题

在人们的生产实践中，经常会遇到如何利用现有资源来安排生产，以取得最大经济效益的问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支——数学规划，而线性规划（Linear Programming，LP）则是数学规划的一个重要分支。自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形方法以来，线性规划在理论上趋向成熟，在实用中日益广泛与深入。特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了，已成为现代管理中经常采用的基本方法之一。

1.1.1　线性规划的实例与定义

例 1.1　某机床厂生产甲、乙两种机床，每台销售后的利润分别为 4000 元与 3000 元。生产甲机床需用 A、B 机器加工，加工时间分别为每台 2h 和 1h；生产乙机床需用 A、B、C 三种机器加工，加工时间为每台各 1h。若每天可用于加工的机器时数分别为 A 机器 10h、B 机器 8h 和 C 机器 7h，问该厂应生产甲、乙机床各几台，才能使总利润最大？

上述问题的数学模型：设该厂生产 x_1 台甲机床和 x_2 乙机床时总利润 z 最大，则 x_1,x_2 应满足

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2, \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_2 \leqslant 7, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中：变量 x_1,x_2 称为决策变量。式（1.1）称为问题的目标函数，式（1.2）中的几个不等式是问题的约束条件，记为 s. t.（即 subject to）。由于上面的目标函数及约束条件均为线性函数，故称为线性规划问题。

总之，线性规划问题是在一组线性约束条件的限制下，求一线性目标函数最大或最小的问题。

在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划数学模型是很重要的一步，往往也是很困难的一步，模型建立得是否恰当，直接影响到求解。而选择适当的决策变量，是建立有效模型的关键之一。

1.1.2　线性规划问题的解的概念

一般线性规划问题的（数学）标准型为

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.3}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m, \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{1.4}$$

其中：$b_i \geq 0, i=1,2,\cdots,m$。

可行解 满足约束条件(1.4)的解 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的可行解，而使目标函数(1.3)达到最大值的可行解称为最优解。

可行域 所有可行解构成的集合称为问题的可行域，记为 R。

1.1.3 线性规划的 Matlab 标准形式及软件求解

线性规划的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值，约束条件的不等号可以是小于等号也可以是大于等号。为了避免这种形式多样性带来的不便，Matlab 中规定线性规划的标准形式为

$$\min \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x},$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \\ \mathrm{Aeq} \cdot \boldsymbol{x} = \mathrm{beq}, \\ \mathrm{lb} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathrm{ub}. \end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}$,beq,lb,ub 为列向量；$\boldsymbol{c}$ 称为价值向量；$\boldsymbol{b}$ 称为资源向量；$\boldsymbol{A}$,Aeq 为矩阵。

Matlab 中求解线性规划的命令为

```
[x,fval] = linprog(f,A,b)
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

其中：x 返回的是决策向量的取值；fval 返回的是目标函数的最优值；f 为价值向量；A 和 b 对应的是线性不等式约束；Aeq 和 beq 对应的是线性等式约束；lb 和 ub 分别对应的是决策向量的下界向量和上界向量。

例如，线性规划

$$\max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}, \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}.$$

的 Matlab 标准型为

$$\min_{\boldsymbol{x}} -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}, \quad \text{s.t.} \quad -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}.$$

例 1.2 求解下列线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3,$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10,$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

解(1) 化成 Matlab 标准型，即

$$\min \quad w = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3,$$

$$\text{s.t.}\ \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} -10 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$[1,1,1] \cdot [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}} = 7.$$

（2）求解的 Matlab 程序如下：

```
f=[-2; -3; 5];
a=[-2,5,-1;1,3,1]; b=[-10;12];
aeq=[1,1,1];
beq=7;
[x,y]=linprog(f,a,b,aeq,beq,zeros(3,1));
x, y=-y
```

（3）求解的 Lingo 程序如下：

```
model:
sets:
row/1..2/:b;
col/1..3/:c,x;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=2 3 -5;
a=-2 5 -1 1 3 1;
b=-10 12;
enddata
max=@ sum(col:c*x);
@ for(row(i):@ sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@ sum(col:x)=7;
end
```

求得的最优解为 $x_1=6.4286, x_2=0.5714, x_3=0$，对应的最优值 $z=14.5714$。

例 1.3 求解下列线性规划问题：

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 + x_3,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

解 编写 Matlab 程序如下：

```
c=[2;3;1];
a=[1,4,2;3,2,0];
b=[8;6];
[x,y]=linprog(c,-a,-b,[],[],zeros(3,1)) % 这里没有等式约束,对应的矩阵为空矩阵
```

求得的最优解为 $x_1=0.8066, x_2=1.7900, x_3=0.0166$，对应的最优值 $z=7.0000$。

1.1.4 可以转化为线性规划的问题

很多看起来不是线性规划的问题,也可以通过变换转化为线性规划的问题来解决。

例 1.4 数学规划问题:

$$\min \quad |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} \leqslant \boldsymbol{b}.$$

其中:$\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为相应维数的矩阵和向量。

要把上面的问题变换成线性规划问题,只要注意到事实:对任意的 x_i,存在 $u_i,v_i \geqslant 0$ 满足

$$x_i = u_i - v_i,\ |x_i| = u_i + v_i.$$

事实上,只要取 $u_i=\frac{x_i+|x_i|}{2}$,$v_i=\frac{|x_i|-x_i}{2}$就可以满足上面的条件。

这样,记 $\boldsymbol{u}=[u_1,\cdots,u_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v}=[v_1,\cdots,v_n]^{\mathrm{T}}$,从而可以把上面的问题变成

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i),$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \leqslant b, \\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \geqslant 0. \end{cases}$$

其中:$\boldsymbol{u} \geqslant 0$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 的每个分量大于等于 0。进一步把模型改写成

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i),$$

$$s.t. \quad \begin{cases} [\boldsymbol{A},\ -\boldsymbol{A}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \geqslant 0. \end{cases}$$

例 1.5 (续例 1.4 类型的实例)求解下列数学规划问题:

$$\min \quad z=|x_1|+2|x_2|+3|x_3|+4|x_4|,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4 \leqslant -2, \\ x_1-x_2+x_3-3x_4 \leqslant -1, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4 \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

解 做变量变换 $u_i=\frac{x_i+|x_i|}{2}$,$v_i=\frac{|x_i|-x_i}{2}$,$i=1,2,3,4$,并把新变量重新排序成一维向量 $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=[u_1,\cdots,u_4,v_1,\cdots,v_4]^{\mathrm{T}}$,则可把模型变换为线性规划模型

$$\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} [\boldsymbol{A},\ -\boldsymbol{A}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{bmatrix} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{y} \geqslant 0. \end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{c}=[1,2,3,4,1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{b}=[-2,-1,-\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$。

计算的 Matlab 程序如下：

```
clc, clear
c=1:4; c=[c,c]'; % 构造价值列向量
a=[1 -1 -1 1; 1 -1 1 -3; 1 -1 -2 3];
a=[a,-a]; % 构造变换后新的系数矩阵
b=[-2 -1 -1/2]';
[y,z]=linprog(c,a,b,[],[],zeros(8,1)) % 这里没有等式约束,对应的矩阵为空矩阵
x=y(1:4)-y(5:end) % 变换到原问题的解,x=u-v
```

求得最优解 $x_1=-2$，$x_2=x_3=x_4=0$，最优值 $z=2$。

该题也可以直接使用 Lingo 软件求解，Lingo 程序如下：

```
model:
sets:
col/1..4/:c,x;
row/1..3/:b;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=1 2 3 4;
b=-2 -1 -0.5;
a=1 -1 -1 1 1 -1 1 -3 1 -1 -2 3;
enddata
min=@sum(col:c*@abs(x));
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@for(col:@free(x)); ! x 的分量可正可负;
end
```

注：（1）Lingo 软件可以自动对带有绝对值的数学规划问题进行线性化。

（2）Lingo 线性化时，变量的个数至少扩大为原来的 4 倍，约束条件也增加很多；问题规模大时，Lingo 软件可能就无法求解了；如果能手工进行线性化，则应尽量手工线性化。

例 1.6 $\min\limits_{x_i}\{\max\limits_{y_i}|\varepsilon_i|\}$，其中 $\varepsilon_i=x_i-y_i$。

对于这个问题，如果取 $v=\max\limits_{y_i}|\varepsilon_i|$，上面的问题就变换成

$$\min\quad v,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-y_1\leqslant v,\cdots,x_n-y_n\leqslant v,\\ y_1-x_1\leqslant v,\cdots,y_n-x_n\leqslant v.\end{cases}$$

此即通常的线性规划问题。

1.2 投资的收益和风险

1.2.1 问题提出

市场上有 n 种资产 $s_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可以选择，现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资。这 n 种资产在这一时期内购买 s_i 的平均收益率为 r_i，风险损失率为 q_i，投资越分散，总的风险越少，总体风险可用投资的 s_i 中最大的一个风险来度量。

购买 s_i 时要付交易费，费率为 p_i，当购买额不超过给定值 u_i 时，交易费按购买 u_i 计算。另外，假定同期银行存款利率是 r_0，既无交易费又无风险($r_0=5\%$)。

已知 $n=4$ 时相关数据如表 1.1 所列。

表 1.1 投资的相关数据

s_i	$r_i/\%$	$q_i/\%$	$p_i\%$	u_i/元
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定资金 M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，总体风险尽可能小。

1.2.2 符号规定和基本假设

1. 符号规定

(1) s_i 表示第 i 种投资项目，如股票、债券等，$i=0,1,\cdots,n$，其中 s_0 指存入银行；

(2) r_i,p_i,q_i 分别表示 s_i 的平均收益率、交易费率、风险损失率，其中 $p_0=0,q_0=0$；

(3) u_i 表示 s_i 的交易定额；

(4) x_i 表示投资项目 s_i 的资金，$i=0,1,\cdots,n$；

(5) a 表示投资风险度；

(6) Q 表示总体收益。

2. 基本假设

(1) 投资数额 M 相当大，为了便于计算，假设 $M=1$；

(2) 投资越分散，总的风险越小；

(3) 总体风险用投资项目 s_i 中最大的一个风险来度量；

(4) $n+1$ 种资产 s_i 之间是相互独立的；

(5) 在投资的这一时期内，r_i,p_i,q_i 为定值，不受意外因素影响；

(6) 净收益和总体风险只受 r_i,p_i,q_i 影响，不受其他因素干扰。

1.2.3 模型的分析与建立

(1) 总体风险用所投资的 s_i 中最大的一个风险来衡量，即

$$\max\{q_i x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}.$$

(2) 购买 s_i 所付交易费是一个分段函数，即

$$\text{交易费}=\begin{cases}p_i x_i, x_i>u_i,\\ p_i u_i, x_i\leqslant u_i.\end{cases}$$

而题目所给的定值 u_i(单位:元)相对总投资 M 很少，$p_i u_i$ 更小，这样购买 s_i 的净收益可以简化为 $(r_i-p_i)x_i$。

(3) 要使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，这是一个多目标规划模型。

目标函数为

$$\begin{cases}\max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,\\ \min\max\{q_i x_i\}.\end{cases}$$

约束条件为

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\\ x_i\geqslant 0, i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

(4) 模型简化：

① 在实际投资中，投资者承受风险的程度不一样，若给定风险一个界限 a，使最大的一个风险 $\frac{q_i x_i}{M}\leqslant a$，可找到相应的投资方案。这样把多目标规划变成一个目标的线性规划。

模型一 固定风险水平，优化收益

$$\max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\frac{q_i x_i}{M}\leqslant a,\\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M, x_i\geqslant 0, i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

② 若投资者希望总盈利至少达到水平 k 以上，在风险最小的情况下寻求相应的投资组合。

模型二 固定盈利水平，极小化风险

$$\min\{\max\{q_i x_i\}\},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i\geqslant k,\\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M, x_i\geqslant 0, i=0,1,\cdots,n.\end{cases}$$

③ 投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时，希望选择一个令自己满意的投资组合。因此对风险、收益分别赋予权重 $s(0<s\leqslant 1)$ 和 $1-s$，s 称为投资偏好系数。

模型三 $\min s\{\max\{q_i x_i\}\} - (1-s)\sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i$,

$$\text{s.t. } \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M, x_i \geqslant 0, i = 0,1,2,\cdots,n.$$

1.2.4 模型一的求解

模型一为

$$\min f = [-0.05, -0.27, -0.19, -0.185, -0.185] \cdot [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}},$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 = 1, \\ 0.025x_1 \leqslant a, \\ 0.015x_2 \leqslant a, \\ 0.055x_3 \leqslant a, \\ 0.026x_4 \leqslant a, \\ x_i \geqslant 0, i = 0,1,\cdots,4. \end{cases}$$

由于 a 是任意给定的风险度,不同的投资者有不同的风险度。下面从 $a=0$ 开始,以步长 $\Delta a=0.001$ 进行循环搜索,编制程序如下:

```
clc,clear
a=0;
hold on
while a<0.05
    c=[-0.05,-0.27,-0.19,-0.185,-0.185];
    A=[zeros(4,1),diag([0.025,0.015,0.055,0.026])];
    b=a*ones(4,1);
    Aeq=[1,1.01,1.02,1.045,1.065];
    beq=1;
    LB=zeros(5,1);
    [x,Q]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB);
    Q=-Q;
    plot(a,Q,'*k');
    a=a+0.001;
end
xlabel('a'),ylabel('Q')
```

1.2.5 结果分析

风险 a 与收益 Q 之间的关系如图 1.1 所示。从图 1.1 可以看出:

(1) 风险大,收益也大。

(2) 当投资越分散时,投资者承担的风险越小,这与题意一致。冒险的投资者会出现集中投资的情况,保守的投资者则尽量分散投资。

(3) 在 $a=0.006$ 附近有一个转折点,在这一点左边,风险增加很少时,利润增长很

快;在这一点右边,风险增加很大时,利润增长很缓慢。所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说,应该选择曲线的转折点作为最优投资组合,大约是 $a=0.6\%$, $Q=20\%$,所对应的投资方案为

风险度 $a=0.006$,收益 $Q=0.2019$, $x_0=0$, $x_1=0.24$, $x_2=0.4$, $x_3=0.1091$, $x_4=0.2212$。

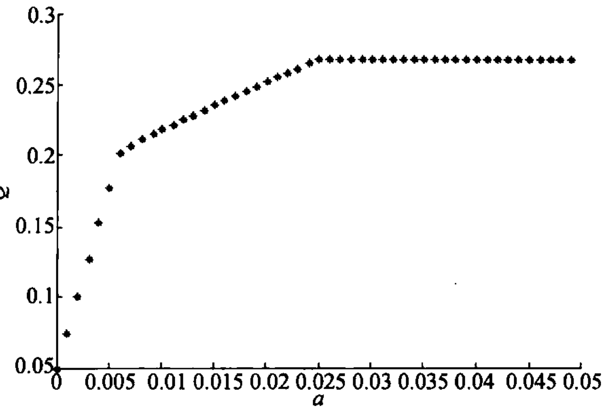

图 1.1　风险与收益的关系图

习题 1

1.1　分别用 Matlab 和 Lingo 求解下列线性规划问题:

$$\max \quad z = 3x_1 - x_2 - x_3,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ -2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

1.2　分别用 Matlab 和 Lingo 求解下列规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4|, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ & x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.3　某厂生产三种产品 I,II,III。每种产品要经过 A,B 两道工序加工。设该厂有两种规格的设备能完成 A 工序,以 A_1,A_2 表示;有三种规格的设备能完成 B 工序,以 B_1,B_2,B_3 表示。产品 I 可在 A,B 任何一种规格设备上加工。产品 II 可在任何规格的 A 设备上加工,但完成 B 工序时,只能在 B_1 设备上加工;产品 III 只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时、原材料费、产品销售价格、各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如表 1.2 所列,试安排最优的生产计划,使该厂利润最大。