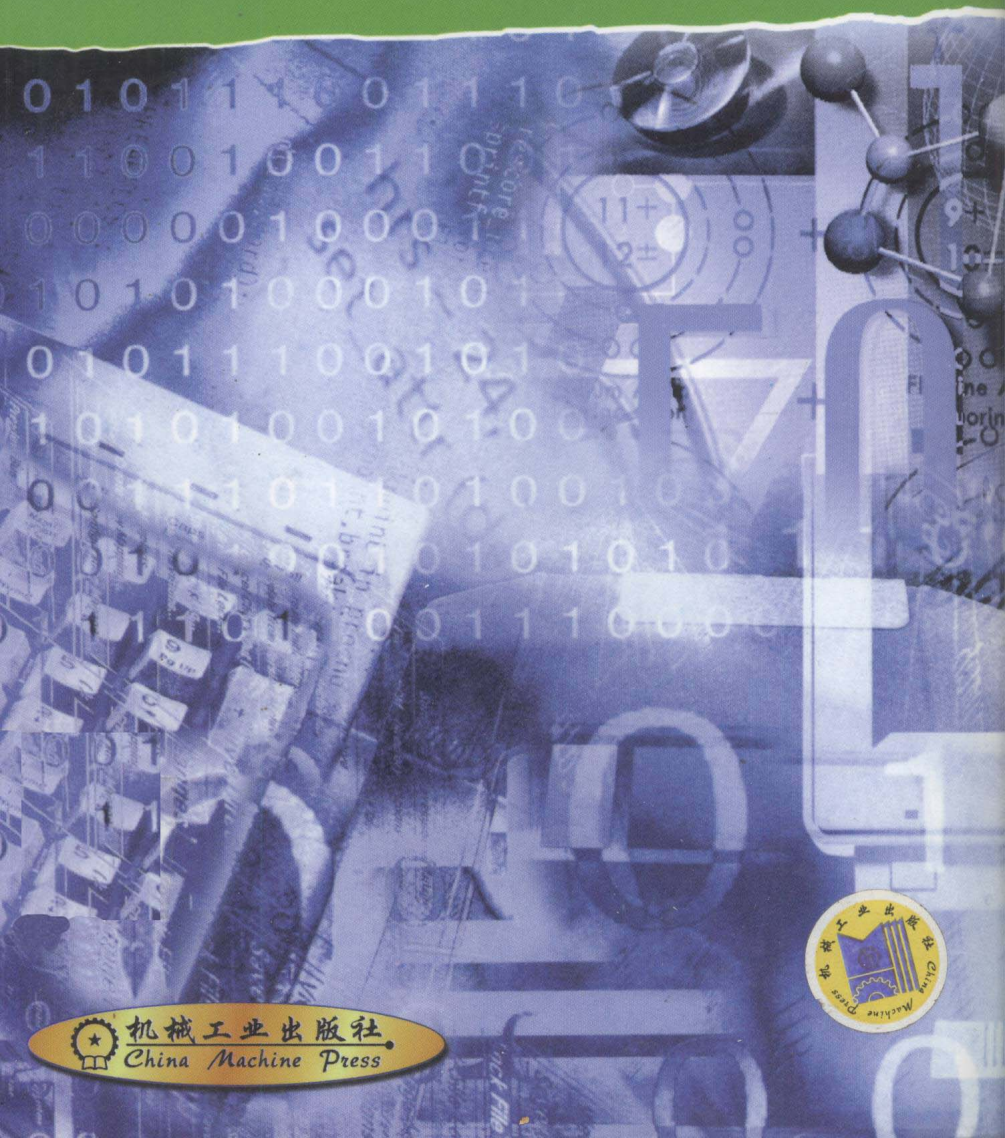


高等职业技术教育教材

数学

下册

高职数学教材编写组 编



机械工业出版社
China Machine Press

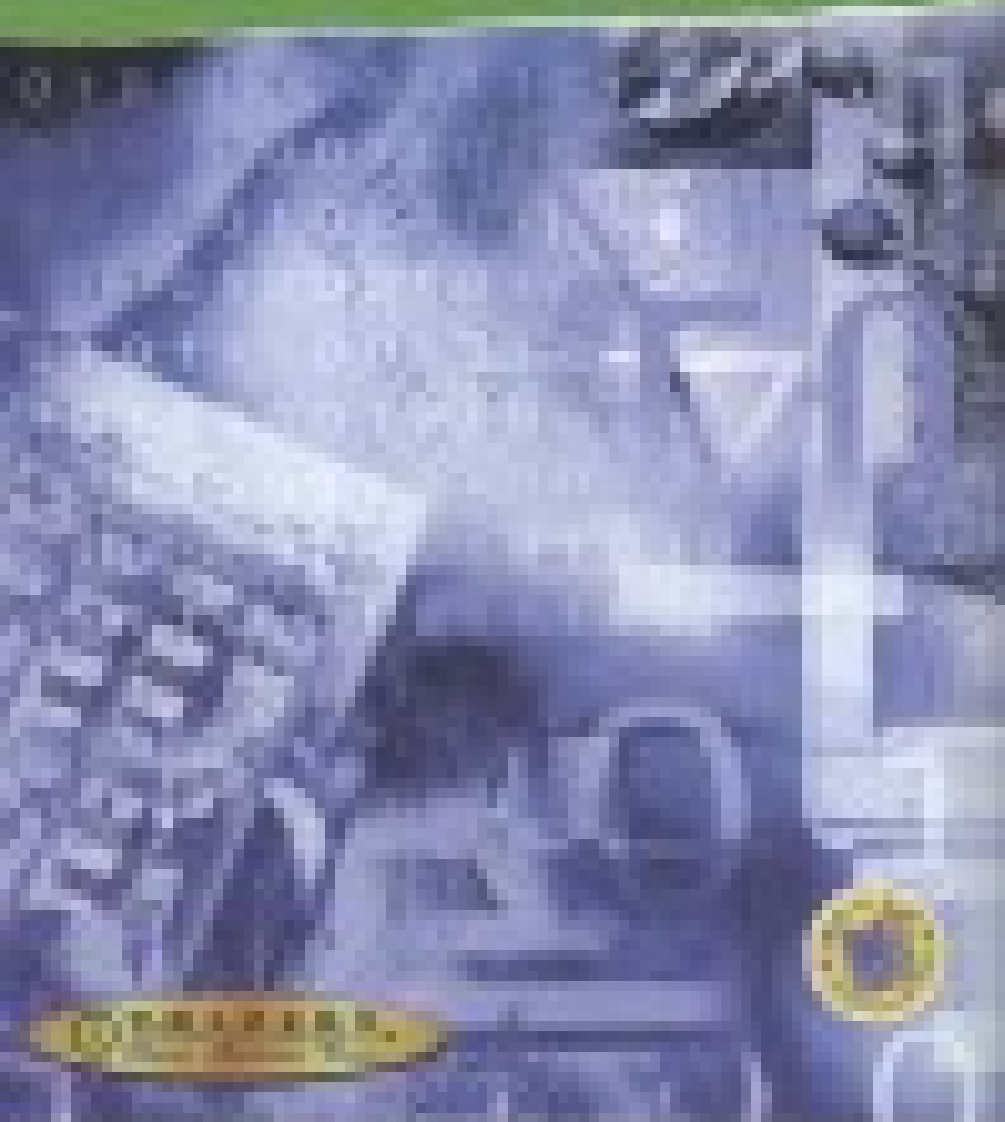


高等职业技术教育教材

数学

第2版

高等数学教材编写组 编



中国铁道出版社

高等职业技术教育教材

数 学

下 册

高职数学教材编写组 编

本套教材主编 王化久

本套教材主审 陈芝娟



机 械 工 业 出 版 社

随着高等职业技术教育的快速发展,教材配套建设势在必行,为满足高职教育的需要,我们按照以应用为目的、以“必须、够用”为度的原则编写了本套教材。教材分上、下两册,本书为下册,内容包括:微分方程及应用举例,多元函数微积分及其应用,矩阵与线性规划,无穷级数,拉氏变换,概率与数理统计。本教材的特点是:从实例引入问题,以问题为引线,进行数学的概念及其实际意义、数学思想方法等方面的介绍,用大量实例反映数学应用,并逐步引入数学建模,采用模块化设计,以利于内容的选择,适合不同专业的选用,并将数值计算方法穿插于各相应内容之中。本教材适于高等职业技术学院使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学(下册)/王化久主编. —北京:机械工业出版社, 2000.8
高等职业技术教育教材
ISBN 7-111-08153-6

I. 数… II. 王… III. 数学-高等学校:技术学校-教材
IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 65390 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑:宋学敏 韩雪清 卢若薇 版式设计:张世琴
责任校对:张媛 封面设计:李雨桥 责任印制:李妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004 年 8 月第 1 版·第 6 次印刷
850mm×1168mm $\frac{1}{32}$ ·10.125 印张·268 千字
定价:15.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

前 言

为适应我国高等职业技术教育蓬勃发展的需要，加速教材建设步伐，我们受机械工业出版社的委托，根据教育部有关文件精神，考虑到高等职业技术学院基础课的教学，应以应用为目的，以“必需、够用”为度，并参照《高等工程专科高等数学课程教学基本要求》编写了本套教材。

在编写中，我们努力体现高等职业技术教育特点，力求兼顾不同产业部门的需要，以实例引入的问题为引线，进行数学应用、概念、定理及其实际内涵、数学思想方法及其实际用途等方面的介绍。用较多的实例反映数学应用，并逐步引进数学建模思想，强调基本计算方法，以图、表直观地讲解概念，并尽量以数学定理思想的直观解释代替数学证明。

在编写中，结合高等职业技术学院学生的实际，力求使教材结构紧凑、语言简练，对必要的基本理论、基本方法和基本技能，阐述详细、深入浅出、通俗易懂，以便于教与学。

本套教材分上、下两册，本书是数学下册，内容包括：微分方程、多元函数微积分及其应用、矩阵及其应用、无穷级数、拉普拉斯变换、概率与数理统计。在每章、节后都配有一定数量的复习题、习题供教师和学生选用，书末并附有部分习题答案。

本书为高等职业技术学院各专业、职工大学、电视大学相关专业教材，也可作为工程技术人员掌握数学方法、提高计算技术的参考书。

参加本书编写的有刘永渤、王哲、卫东、张素芳、王永森、王茜。主编王哲，副主编高世贵，主审崔伟。

在编写过程中曾得到机械工业出版社的热情关怀和指导，各编、审同志所在院校对编审工作给予了大力支持和协助，在此一

并致谢。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

目 录

前言

第六章 微分方程	1
第一节 微分方程的基本概念	1
第二节 一阶微分方程	6
第三节 二阶常系数线性齐次微分方程	13
第四节 二阶常系数线性非齐次微分方程	17
第五节 微分方程应用举例	22
复习题六	27
第七章 多元函数微积分	29
第一节 空间解析几何简介	29
第二节 二元函数的概念、极限和连续性	36
第三节 偏导数	42
第四节 复合函数与隐函数的求导法则	48
第五节 全微分	53
第六节 多元函数的极值	57
第七节 二重积分	64
第八节 二重积分的计算	68
第九节 二重积分的应用	79
复习题七	84
第八章 矩阵及其应用	88
第一节 n 阶行列式的概念	88
第二节 行列式的性质 克莱姆法则	96
第三节 矩阵的概念及运算	104
第四节 逆矩阵与初等变换	117
第五节 矩阵的应用	127
复习题八	137

第九章 无穷级数	141
第一节 数项级数的概念及性质	141
第二节 正项级数的敛散性	146
第三节 任意项级数的敛散性.....	152
第四节 幂级数.....	156
第五节 函数的幂级数展开式.....	161
第六节 傅里叶级数	167
第七节 奇函数与偶函数的傅里叶级数	173
第八节 周期为 $2L$ 的函数的傅里叶级数	179
复习题九	184
第十章 拉普拉斯变换	187
第一节 拉普拉斯变换的概念.....	187
第二节 拉氏变换的性质	190
第三节 拉氏变换的逆变换	197
第四节 拉氏变换的应用	201
复习题十	204
第十一章 概率与数理统计	206
第一节 随机事件	206
第二节 概率的定义	211
第三节 概率的基本公式	216
第四节 随机变量及其分布	225
第五节 随机变量的数字特征.....	236
第六节 统计量与统计特征数.....	243
第七节 参数估计	252
第八节 假设检验	264
第九节 一元线性回归	270
复习题十一	278
附录	282
部分习题答案	287
参考文献	315

第六章 微分方程

在科学技术和经济管理中，有许多实际问题往往需要通过未知函数及其导数（或微分）所满足的关系式来求该未知函数，这种关系式就是微分方程。本章将介绍微分方程的基本概念，讨论几种简单的微分方程的解法及其应用。

第一节 微分方程的基本概念

一、引例

例 1 过点 $(1, 1)$ 的某曲线上任意一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率为 $3x^2$ ，求该曲线的方程。

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$ ，根据导数的几何意义，有

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ 或 } dy = 3x^2 dx \quad (1)$$

对式 (1) 两端积分，得

$$y = x^3 + C$$

其中 C 为任意常数。

由于曲线通过 $(1, 1)$ 点，因此，所求函数应满足条件：

当 $x=1$ 时， $y=1$ ，或写成

$$y|_{x=1} = 1 \quad (2)$$

将式 (2) 代入 $y=x^3+C$ ，得 $C=0$ ，故所求的曲线方程为

$$y = x^3$$

从几何图形上看， $y=x^3+C$ 表示一族立方抛物线（图 6-1），而所求曲线 $y=x^3$ 是这族立方抛物线中通过点

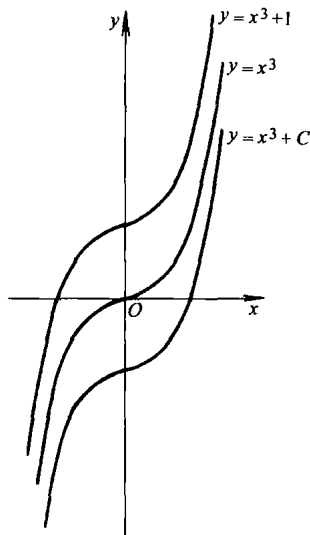


图 6-1

第六章 微分方程

在科学技术和经济管理中,有许多实际问题往往需要通过未知函数及其导数(或微分)所满足的关系式来求该未知函数,这种关系式就是微分方程。本章将介绍微分方程的基本概念,讨论几种简单的微分方程的解法及其应用。

第一节 微分方程的基本概念

一、引例

例 1 过点 $(1, 1)$ 的某曲线上任意一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率为 $3x^2$, 求该曲线的方程。

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$, 根据导数的几何意义, 有

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ 或 } dy = 3x^2 dx \quad (1)$$

对式 (1) 两端积分, 得

$$y = x^3 + C$$

其中 C 为任意常数。

由于曲线通过 $(1, 1)$ 点, 因此, 所求函数应满足条件:

当 $x=1$ 时, $y=1$, 或写成

$$y|_{x=1} = 1 \quad (2)$$

将式 (2) 代入 $y=x^3+C$, 得 $C=0$, 故所求的曲线方程为

$$y = x^3$$

从几何图形上看, $y=x^3+C$ 表示一族立方抛物线(图 6-1), 而所求曲线 $y=x^3$ 是这族立方抛物线中通过点

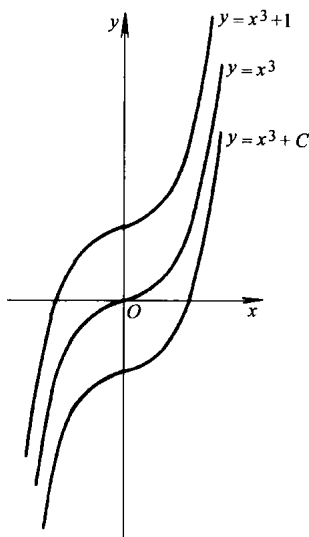


图 6-1

(1, 1)的一条。

例 2 一质量为 m 的物体只受重力的作用由距地面 hm 处开始下落 (自由落体), 试求物体下落的距离 s 与时间 t 的关系。

解 设物体下落距离 s 与时间 t 的关系为 $s=s(t)$ 。由牛顿第二定律可知

$$F=ma$$

由二阶导数的力学意义知道, 加速度

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}$$

于是

$$F=m\frac{d^2s}{dt^2}$$

又由于物体在自由落体运动中只受重力作用,

即

$$F=mg$$

因此, 得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \quad (1)$$

其中 g 是重力加速度。

按题意, 未知函数 $s(t)$ 应满足下列条件

$$s|_{t=0}=0 \quad (2)$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v\Big|_{t=0}=0 \quad (3)$$

将式 (1) 两端积分得

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1$$

再积分一次, 得

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$$

其中 C_1 、 C_2 为任意常数。

将式 (2)、式 (3) 代入上式, 得 $C_1=0$, $C_2=0$, 从而

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \left(0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

这就是物体下落距离 s 与时间 t 的关系。

上述例 1 中式 (1) 和例 2 中式 (1) 都含有未知函数的导数 (或微分), 它们都是微分方程, 由此给出有关微分方程的一些基本概念。

二、微分方程的基本概念

定义 含有未知函数的导数 (或微分) 的方程叫做微分方程。

出现在微分方程中未知函数的导数的最高阶数叫做微分方程的阶。

例如, 例 1 中式 (1) 和例 2 中式 (1) 依次是一阶和二阶的微分方程。

由例 1 和例 2 可见, 在研究实际问题时, 首先建立微分方程, 然后设法找出满足微分方程的函数, 也就是说, 要找到这样的函数, 将其代入微分方程后, 能使得该方程成为恒等式, 这个函数叫做微分方程的解。求微分方程解的过程, 叫做解微分方程。

例如, 函数 $y=x^3+C$ 和 $y=x^3$ 都是例 1 中式 (1) 微分方程的解; 函数 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ 和 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ 都是例 2 中式 (1) 微分方程的解。

如果微分方程的解中含有任意常数, 且相互独立的任意常数[⊖]的个数与方程的阶数相同, 这样的解叫做微分方程的通解。例如, 函数 $y=x^3+C$ 和 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ 分别是例 1 中式 (1) 和例 2 中式 (1) 微分方程的通解。

当通解中的这些任意常数取某定值时, 得到的解就叫做特解。

⊖ 两个任意常数独立, 是指在一个式子中出现的两个任意常数, 不能通过运算合并为一个任意常数, 例如, $y=C_1x+C_2$ 中的 C_1 和 C_2 是独立的; 而 $y=\frac{1}{2}C_1x+C_2x$ 中的 C_1 和 C_2 则可以合并为一个任意常数 C , 所以不是独立的。

例如, 函数 $y=x^3$ 和 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 分别是例 1 中式 (1) 和例 2 中式 (1) 微分方程的一个特解。

为了得到满足要求的特解, 必须根据要求对微分方程附加一定的条件, 这些条件叫做初始条件。例如, 例 1 中的初始条件是 $y|_{x=1}=1$; 例 2 中的初始条件是 $s|_{t=0}=0$, $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$ 。

从例 1 和例 2 不难看出, 对于形如

$$y^{(n)}=f(x)$$

的微分方程, 只要积分 n 次, 就可以得到它的解。

例 3 验证函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3$ 是微分方程 $y''+y'=0$ 的解。

解 因为 $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x$

$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x$$

$$y''=C_1\sin x-C_2\cos x$$

代入方程, 得

$$\begin{aligned} y''+y' &= C_1\sin x - C_2\cos x - (C_1\sin x - C_2\cos x) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

所以, 所给函数代入方程后使之成为恒等式, 因此是方程的解。

例 4 解微分方程 $y''=x$, 其中 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$ 。

解 对方程两端积分, 得

$$y' = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

再积分, 得

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$$

由 $y'|_{x=0}=0$ 得 $C_1=0$; 由 $y|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$, 因此, 所求方程的特解为

$$y = \frac{1}{6}x^3 + 1$$

习 题 6-1

1. 指出下列方程中的微分方程，并说明它的阶数。

(1) $s'' + 3s' - 2t = 0$;

(2) $(y')^2 + 3y = 0$;

(3) $(\sin x)'' + 2(\sin x)' + 1 = 0$;

(4) $x dy - y dx = 0$;

(5) $\frac{d^2 x}{dt^2} = \cos t$;

(6) $\frac{d^3 y}{dx^3} - 2x \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + x^2 = 0$ 。

2. 指出下列各题中的函数是否是所给微分方程的解 (其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数):

(1) $y'' + 4y = 0$,

$y = C_1 \sin(2x + C_2)$;

(2) $y'' - 2y' + y = 0$,

$y = x^2 e^x$;

(3) $y'' + 2y' - 3y = 0$,

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$;

(4) $u' = 3(u - 10)$,

$u = C e^{3t} - 10$;

3. 求下列微分方程的解:

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$;

(2) $y'' = 3x$;

(3) $y' = \cos x$, $y|_{x=0} = 1$;

(4) $\frac{d^2 x}{dt^2} = -2$, $x|_{t=0} = 0$, $x'|_{t=0} = 2$ 。

4. 给定方程 $y' = 3x$:

(1) 求它的通解;

(2) 求过点 $(2, 5)$ 的特解;

(3) 求出与直线 $y = 2x - 1$ 相切的曲线方程。

5. 一曲线经过 $(2, -1)$ 点, 且曲线上任意点 M 处的切线斜率为 $x^2 - 1$, 求该曲线的方程。

6. 一质点由原点开始 ($t=0$) 沿直线运动, 已知在 t 时刻的加速度为 t^2

-1, 而在 $t=1$ 时速度为 $\frac{1}{3}$, 求位移 s 的大小与时间 t 的函数关系。

7. 从下列各曲线族中, 找出满足所给初始条件的曲线:

(1) $x^2 - y^2 = C$, $y(0) = 5$;

(2) $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

(3) $y = C_1 \sin(x - C_2)$, $y|_{x=\pi} = 1$, $y'|_{x=\pi} = 0$ 。

第二节 一阶微分方程

本节介绍可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程。

一、可分离变量的微分方程

例 1 一曲线通过点 $(0, 2)$, 且曲线上任意点 $M(x, y)$ 的切线与直线 OM 垂直, 求此曲线的方程。

解 设所求曲线方程为 $y = f(x)$, 根据导数的几何意义, 曲线的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}$, 又直线 OM 的斜率为 $\frac{y}{x}$ 。因为切线与直线 OM 垂直, 所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ 或 } dy = -\frac{x}{y} dx \quad (1)$$

这就是曲线 $y = f(x)$ 应满足的微分方程。

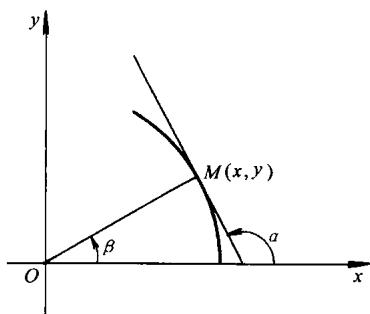


图 6-2

这个方程不能用直接积分的方法求解, 但是如果将方程适当地变形, 写成下面的形式

$$y dy = -x dx \quad (2)$$

就可以进行求解。这时, 方程的左边只含有未知函数 y 及其微分, 右边只含有自变量 x 及其微分, 也就是变量 y 和 x 已经分离在等式的两边。

将式 (2) 两边同时积分, 得

$$\int y dy = - \int x dx$$

因此有

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

即

$$x^2 + y^2 = 2C \quad (3)$$

将初始条件 $y|_{x=0}=2$ 代入式 (3), 求得 $C=2$, 于是所求曲线的方程为

$$x^2 + y^2 = 4$$

上述求解过程启发我们去寻求这类方程的解法的原则是, 把未知函数 y 及其微分 dy 移到等式一边, 而把自变量 x 及其微分 dx 移到等式另一边, 然后对两边积分, 求出通解。这种方法叫做分离变量法, 能分离变量的方程叫做可分离变量的微分方程。

它的一般形式为

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (6-1)$$

解法如下:

(1) 分离变量, 得

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

(2) 两边积分, 得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

(3) 求出积分, 得到通解。

例 2 求微分方程 $y' = 2xy$ 的通解。

解 这是一个可分离变量的微分方程, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = 2x dx \quad (y \neq 0)$$

两边积分, 得

$$\ln |y| = x^2 + C$$

即

$$|y| = e^{x^2 + C_1}$$

或

$$y = \pm e^{C_1} e^{x^2}$$

因 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数, 令其为 C , 于是得方程的通解为

$$y = C e^{x^2}$$

显然, $y=0$ 也是方程的解, 它包含在通解之中, 只要取 $C=0$ 即可。

以后为了方便起见, 可把 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$, 但要明确最终结果中的 C 是可正可负的任意常数。

例 3 求方程 $y(x^2-1)dy = x(y^2+1)$ 的通解。

解 原方程分离变量, 得

$$\frac{y}{y^2+1}dy = \frac{x}{x^2-1}dx$$

两端积分, 得

$$\frac{1}{2} \ln(y^2+1) = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + \frac{1}{2} \ln C$$

所以原方程的通解为

$$y^2+1 = C(x^2-1)$$

例 4 求方程 $\frac{dy}{dx} = 10^{x+y}$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解。

解 原方程可改写为

$$\frac{dy}{dx} = 10^x \times 10^y$$

分离变量, 得

$$10^{-y} dy = 10^x dx$$

两边积分, 得

$$\begin{aligned} \int 10^{-y} dy &= \int 10^x dx \\ -10^{-y} \frac{1}{\ln 10} &= 10^x \frac{1}{\ln 10} - \frac{C}{\ln 10} \end{aligned}$$

即

$$10^x + 10^{-y} = C$$

把初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 代入上式, 求得 $C=11$, 于是所求微分方程的特解为