

2012
详解版

高中数学

奥林匹克竞赛

总主编 蓝 润
本册主编 南 秀 全

金真题



YZLI0890126432

全国联赛卷

权威资料
方法技巧
金牌思路

湖北长江出版集团
湖北教育出版社
HUBEI EDUCATION PRESS

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克竞赛全真试题. 全国联赛卷/南秀全本册主编. —武汉:湖北教育出版社, 2011. 7

ISBN 978 - 7 - 5351 - 6478 - 0

I. 高… II. 南… III. 数学课 - 高中 - 习题 IV. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 029590 号

现在图书
book.cnxianzai.com

出版 发行:湖北教育出版社

武汉市青年路 277 号

网 址: <http://www.hbedup.com>

邮编:430015

电话:027 - 83619605

经 销:新 华 书 店

印 刷:华中科技大学印刷厂

(430074 · 武汉市洪山区珞喻路 1037 号)

开 本:880mm × 1230mm 1/32

13 印张

版 次:2011 年 3 月第 1 版

2011 年 7 月第 2 次印刷

字 数:361 千字

印数:6 001 - 10 000

ISBN 978 - 7 - 5351 - 6478 - 0

定价:24.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

前 言

数理化奥林匹克竞赛是覆盖面最广的一种群众性竞赛活动,几乎覆盖了全国各地每一所学校。各级各类的竞赛活动旨在拓宽学生的知识视野,激发学生的学习兴趣,培养学生的思维品质、动手能力,发展学生的个性特长。同时,竞赛活动对促进教师自身素质的提高,促进教学改革的深入开展和教学质量的提高,也起到了积极的作用。

然而竞赛试题内容广博,命题新颖,思路开阔,对学生的综合素质和创新要求较高。但当我们的父母看到孩子做不出训练题目想帮一把却又感到无助之时,总感叹自己手中没有一本好书,不是太难,就是太易,或是太偏,或是缺乏系统性,而面对太多的竞赛资料又总觉得有些茫然。我们的许多教师也为竞赛书太多太滥大伤脑筋,为竞赛缺少一个既有系统性而又不超竞赛大纲的书而犯愁。为此我们广泛收集,将近几年的小学、初中、高中的全国部分省市的数理化竞赛试题进行精选,将全国数理化竞赛试题进行汇总,并吸收部分国际竞赛的典型试题,汇编成这套丛书。书中通过对试卷的全面分析和研究,对每道赛题都逐一进行了详细的解析,力求通俗易懂,化难为易,既便于学生自学,又便于家长和教师参考。本套丛书力求体现以下特点:

1. **导向性。**全面反映了近几年中、小学数理化竞赛的题型,及所考查的知识点和解题方法,从而可以看出未来竞赛命题的走向和原则。

2. **新颖性。**所选内容均是经过我们筛选的近几年的国际国内竞赛试题,不仅内容新,题型新,而且具有广泛的代表性。用后一定会感到内容新鲜,题目新颖,精彩有趣。

3. **精巧性。**因为题量小而精,而不怪;灵活性强,高而可攀。当然,解答时具备较强的分析推理能力和灵活运用知识的能力。我们在解析时,注意做到语句通俗、简明,思路清晰、简捷。有的还配有图表说明,便于学生理解。对于一题多解,限于篇幅,一般只采用一两种最简便巧妙的方法。这对拓展学生思路,启迪思维,发展智力,将有很大帮助。

4. **实用性。**本丛书中前半部分是试题,并留有解答的空间,后半部分是解析。可供学生在赛前进行检测,检测后再对照答案掌握和理解解题方

法。这样既便于学生用,也便于家长和教师参考。

5. 权威性。本丛书是由在国际奥赛中屡夺金牌的黄冈的特、高级教师和国家级奥林匹克优秀教练员编写。

参加本书编写的有:石涧、吴远伦、秦必耕、吕伦兵、余林、魏友成、余光、付峰、姜文清、肖九河、王飞、肖珂、沈立新、肖一鸣、杨仕春、杜江、陈正、段文敏、胡海波、吕中浩、段文涛、南山、杨世俊、徐胜登、刘晓明。

此次修订更新了部分试题,由于时间仓促和水平有限,编写中难免出现错误或不当之处,敬请广大读者提出宝贵意见。希望本套丛书铺就您的金牌之路。

编者

2010年12月



CONTENTS

目 录

	试题	答案
2007 年希望杯数学邀请赛试题(高一)	(1)	(107)
2008 年希望杯数学邀请赛试题(高一)	(6)	(120)
2009 年希望杯数学邀请赛试题(高一)	(16)	(141)
2010 年希望杯数学邀请赛试题(高一)	(23)	(163)
2007 年希望杯数学邀请赛试题(高二)	(33)	(179)
2008 年希望杯数学邀请赛试题(高二)	(39)	(196)
2009 年希望杯数学邀请赛试题(高二)	(45)	(214)
2010 年希望杯数学邀请赛试题(高二)	(51)	(235)
2007 年第三届“希望杯”全国数学大赛试题(高一)	(57)	(250)
2008 年第四届“希望杯”全国数学大赛试题(高一)	(60)	(255)
2009 年第五届“希望杯”全国数学大赛试题(高一)	(64)	(259)
2010 年第六届“希望杯”全国数学大赛试题(高一)	(66)	(262)
2007 年第三届“希望杯”全国数学大赛试题(高二)	(70)	(268)
2008 年第四届“希望杯”全国数学大赛试题(高二)	(73)	(273)
2009 年第五届“希望杯”全国数学大赛试题(高二)	(76)	(277)
2010 年第六届“希望杯”全国数学大赛试题(高二)	(78)	(282)
2007 年全国高中数学联合竞赛试题	(83)	(288)
2008 年全国高中数学联合竞赛试题	(85)	(298)
2009 年全国高中数学联合竞赛试题	(87)	(306)
2010 年全国高中数学联合竞赛试题	(90)	(315)
2008 年中国数学奥林匹克试题	(92)	(323)
2009 年中国数学奥林匹克试题	(93)	(328)
2010 年中国数学奥林匹克试题	(93)	(334)
2008 年 IMO 中国国家队选拔考试试题	(95)	(339)

	试题	答案
2009 年 IMO 中国国家队选拔考试试题	(95)	(347)
2010 年 IMO 中国国家队选拔考试试题	(96)	(355)

2008 年中国西部数学奥林匹克试题	(98)	(365)
2009 年中国西部数学奥林匹克试题	(99)	(368)
2009 年第五届北方数学奥林匹克邀请赛	(100)	(373)
2010 年第六届北方数学奥林匹克邀请赛	(101)	(377)
2009 年第六届中国东南地区数学奥林匹克试题	(102)	(381)
2010 年第七届中国东南地区数学奥林匹克试题	(103)	(388)
2009 年第八届女子数学奥林匹克试题	(104)	(394)
2010 年第九届女子数学奥林匹克试题	(105)	(398)

第一试

一、选择题

- 函数 $f(x) = \log_2(7+2x-x^2)$ 的值域是().
 (A) $(-\infty, 3]$ (B) $(0, 3]$
 (C) $[3, +\infty)$ (D) $(0, 3)$
- 如果长度为 2800 的区间在映射 $f: x \rightarrow \frac{1}{p}x + m$ (p, m 均为常数, 且 p 为质数) 下所得到的区间长度为整数, 则 p 的最大值为().
 (A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 11
- $\cos x \cos y = \cos(x+y)$ 成立的充要条件是().
 (A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (B) $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 (C) $x = k\pi, y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (D) $x = k\pi$ 或 $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 若在 $\triangle ABC$ 中, 等式 $\cos A = 2 \sin B \sin C$ 成立, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().
 (A) 锐角三角形 (B) 钝角三角形
 (C) 直角三角形 (D) 等腰直角三角形
- 当 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 方程 $\sin \alpha + \cos \alpha = \tan \alpha$ 的实数解的个数是().
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 若函数 $h(x)$ 的图象与 $g(x) = \log_2 x$ 的图象关于直线 $y = -x$ 对称, 并且函数 $f(x)$ 的图象与 $h(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的表达式为().
 (A) $f(x) = -2^{x-2} (x \in \mathbb{R})$
 (B) $f(x) = -2^{2-x} (x \in \mathbb{R})$
 (C) $f(x) = 2^{x-2} (x \in \mathbb{R})$
 (D) $f(x) = 2^{2-x} (x \in \mathbb{R})$
- 若点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 且 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 则点 P 是 $\triangle ABC$ 的().
 (A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心
- Let f be a function such that $f(x+y^2) = f(x) + 2[f(y)]^2$ and $f(1) \neq 0$. The value of $f(2007)$ is ().
 (A) 2007 (B) $\sqrt{2007}$
 (C) $\frac{2007}{2}$ (D) None of the above

9. 如图 1, $\triangle ABC$ 为等腰三角形, $\angle A = \angle B = 30^\circ$, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, AC 边上的高为 BD , 若用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$, 则表达式为().

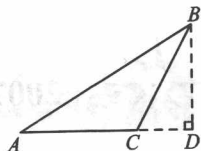


图 1

- (A) $\frac{3}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (B) $\frac{3}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$
(C) $\frac{3}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a}$ (D) $\frac{3}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}a_n + \sqrt{6}}{a_n - \sqrt{2}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 a_{2007} 的值为

().

- (A) 0 (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

二、A 组填空题

11. 函数 $y = \sqrt{9 - 3^{x^2 - 4x + 5}}$ 的定义域是_____, 值域是_____.

12. 函数 $y = |\sin x| + \sqrt{3}|\cos x|$ 的最大值为_____, 最小值为_____.

13. 若 a, b, c 是互不相等的实数, 且 a, b, c 成等差数列, b, a, c 成等比数列, 则 $a : b : c =$ _____.

14. 26 个英文字母按照字母表顺序排列: $a, b, c, \dots, x, y, z$. 若 $f(n)$ 表示处于第 n 个位置上的字母, 如 $f(1) = a, f(15) = o$ 等, 定义 $g(x) = \begin{cases} 26 - x, & x > 23 \\ x + 3, & x \leq 23 \end{cases}$, 则 $f(g(24)), f(g(2)), f(g(6)), f(g(7)), f(g(6)), f(g(11)), f(g(4))$ 所表示的字母依次排列组成的英文单词为_____.

15. “ $a = 1$ ”是“函数 $y = \cos^2 ax - \sin^2 ax$ 的最小正周期为 π ”的_____条件.

16. 已知 $\log_{14} 8 = a$, 则 $\log_{98} 56 =$ _____.

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d < 0$, 且 $a_3 a_5 + a_3 a_7 + a_5 a_9 + a_7 a_9 = 0$, 则当前 n 项的和 S_n 取得最大值时, $n =$ _____.

18. The sum of the arithmetic sequence $5, \frac{30}{7}, \frac{25}{7}, \dots$ from the n -th term to the $(n+6)$ -th term is M . The value of n such that the value $|M|$ is the smallest equals _____.

19. 已知向量 $\mathbf{a} = (2\cos\theta, 1)$, $\mathbf{b} = (2\cos(\theta - \frac{\pi}{3}), 1)$, 实数 θ 满足等式 $\log_2(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) = x^2 - 2x + 2$ [其中 $x \in (0, \frac{3}{2})$], 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角是_____.

20. 函数 $y = \frac{\sqrt{4-x^2} + 2}{x+3}$ 的最大值为_____, 最小值为_____.

三、B 组填空题

21. 在坐标平面内,横、纵坐标都是整数的点称为格点.一个质点从原点出发走5步,每一步走1个单位长度到达相邻的一个格点(每个格点可重复经过),则它能到达的不同地点有_____个;它从原点到达点(4,1)的不同路径有_____种.

22. 若对于任意实数 x , 不等式 $|x+2| - |x-1| \geq a$ 恒成立, 则 $a \in$ _____; 若存在实数 x , 使不等式 $|x+1| + |x-1| < a$ 成立, 则 $a \in$ _____.

23. 如图2, 将一块半径为1的半圆形钢板截成等腰梯形ABCD的形状, 它的下底AB是半圆直径, 上底CD的端点在圆周上. 这个梯形的周长 y 和腰长 x 之间的函数式为 $y =$ _____; 面积 S 和下底角 θ 之间的函数式为 $S =$ _____.

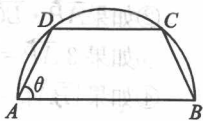


图2

24. A six-digit number $\overline{xyxyxy}$ is equal to 5 times the product of three consecutive odd numbers. These three odd numbers are _____, _____, _____.

(英汉词典: the product of three consecutive odd numbers 三个连续奇数的乘积)

25. 已知定义在正整数集上的函数

$f(n) = \begin{cases} n+2, & n \leq 2007; \\ f(f(n-4)), & n > 2007, \end{cases}$ 则当 $n \leq 2007$ 时, $n - f(n) =$ _____, 当 $2007 < n \leq 2009$ 时, $n - f(n) =$ _____.

第二试

一、选择题

1. 角 $\alpha = \cos 2007^\circ$ 在().

(A) 第一象限

(B) 第二象限

(C) 第三象限

(D) 第四象限

2. $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A = \frac{2}{7}$, $\sin B = \frac{1}{5}$, 则 $\sin C$ 的取值有().

(A) 1个

(B) 2个

(C) 3个

(D) 4个

3. $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = 0$ 且 $\sin A = 2\sin B \cdot \sin C$, 则 $\triangle ABC$ 是().

(A) 锐角三角形

(B) 钝角三角形

(C) 等边三角形

(D) 等腰直角三角形

4. 当 $x \in [0, 1)$ 时, 若函数 $f(x) = \log_2(x^2 + ax + 1 - a)$ 有意义, 则 a 的取值范围是().

(A) $a < 1$

(B) $a \leq 1$

(C) $a > 1$

(D) $a \geq 1$

5. 设命题甲: $x > 2$ 或 $y \leq 1$; 命题乙: $x \geq 3$ 且 $y < 2$. 则“命题甲不成立”是“命题乙不成立”的().

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 非充分非必要条件

6. 设点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 提出以下命题:

- ① 存在正数 λ_1, λ_2 , 使 $\overrightarrow{AP} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$;
② 如果 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 且 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 那么 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$;
③ 如果 $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 那么 $3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$;
④ 如果 $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$, 那么 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

在这 4 个命题中, 正确命题的个数为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. Let $y = f(x)$ be a function defined on $\mathbf{R}$, and $f(x) + \frac{1}{f(x+2)} = 0 (x \in \mathbf{R})$.

Then $f(x)$ is ().

- (A) not a periodic function
(B) a periodic function with the minimal positive period 4
(C) a periodic function with the minimal positive period 8
(D) a periodic function with the minimal positive period 16

(英汉词典: periodic function 周期函数; minimal positive period 最小正周期)

8. The minimum of $|x| + |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2007|$ is ().

- (A) 1003^2 (B) 1004^2 (C) 2006^2 (D) 2007^2

9. O 是平面内一点, A, B, C 是平面内与 O 不共线的三个点, P 是 BC 的中点且使等式 $\lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP}$ 成立, 则 $\triangle ABC$ 是().

- (A) 直角三角形 (B) 等边三角形
(C) 等腰三角形 (D) 不等边三角形

10. 若关于 x 的二次函数 $y = x^2 - 3mx + 3$ 的图象与端点在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 和 $(3,$

5) 的线段只有一个交点, 则 m 的值可能是().

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

二、填空题

11. 设实数 a_1, a_2, a_3 成等差数列, 且 $a_2 = 4$. 若定义 $b_n = 2^{a_n}$, 则 $b_1 b_3$ 的值是

12. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0)$ 在同一周期内, 当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $y_{\max} = 3$;

当 $x = \frac{7}{12}\pi$ 时, $y_{\min} = -3$, 则函数 y 的解析式为_____.

13. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是增函数, 若 $f(1) < f(x^2 + x + 1)$, 则 x 的范围是_____.

14. 在平面内给定正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, 对于该平面内任意一点 M , 若适当选取表达式 $\pm \overrightarrow{MA_1} \pm \overrightarrow{MA_2} \pm \overrightarrow{MA_3} \pm \overrightarrow{MA_4} \pm \overrightarrow{MA_5} \pm \overrightarrow{MA_6}$ 中的正负号, 则可使该式为零, 如_____.

(给出一个向量表达式即可)

15. 已知奇函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 2}{bx + c}$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 2$, $f(2) < 4$, 则 $c =$ _____, b 的范围是_____.

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 前 n 项的和为 S_n , 且等式 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$ 成立, 则 $a_n =$ _____.

17. 函数 $y = 2\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1}$ 的最小值为_____, 此时 $x =$ _____.

18. 已知函数 $f(x) = \min\left\{x+1, \frac{2}{x}, -x+\frac{9}{2}\right\}$, 则 $f(x)$ 的最大值为_____.

19. 不等式 $(x^2 - 1)^{2007} + x^{4014} + 2x^2 - 1 \leq 0$ 的解集为_____.

20. 函数 $y = x^3 - 6x^2 + 12x (x \leq 0)$ 的反函数的解析式是 $y =$ _____, 它的定义域是_____.

三、解答题

要求: 写出推算过程.

21. 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2} < y < \pi$, $\sin(x+y) = \frac{5}{13}$.

(1) 若 $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, 求 $\cos 2x$ 和 $\cos y$ 的值;

(2) 比较 $\sin y$ 与 $\sin(x+y)$ 的大小, 并说明理由.

22. 已知函数 $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16 - a$, 且当 $x \in [0, b]$ 时, $y \in [0, 3b]$,

求 a, b 的值.

23. 将同时满足下列条件的正整数从小到大排列, 组成数列 $\{a_n\}$:

(1) 能表示成 2007 个相邻正整数的和;

(2) 能被 5 整除, 也能被 7 整除.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2008 年希望杯数学邀请赛试题(高一)

第一试 (第1类)

一、选择题

1. 设全集 $U = \{1, 3, 5, 7\}$, 集合 $A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 3, 7\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)$ 等于 ().

- (A) $\{5\}$ (B) $\{3, 5\}$ (C) $\{1, 5, 7\}$ (D) $\emptyset$

2. 函数 $f(x) = \lg(2x+1)$ 的定义域为 ().

- (A) $\mathbf{R}$ (B) $(-\infty, -\frac{1}{2})$

- (C) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ (D) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的图象是连续的, 且其中的四组对应值如表中所示, 那么在下列区间中, 函数 $f(x)$ 一定存在零点的是 ().

x	1	2	3	4
$f(x)$	6.1	2.9	-8.5	-1

- (A) $(1, 2)$ (B) $(2, 3)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(4, +\infty)$

4. 函数 $y = (\frac{1}{2})^x$ 与函数 $y = \log_2(\frac{1}{x})$ 的图象 ().

- (A) 有且只有 1 个公共点, 且在直线 $y=x$ 上
(B) 有且只有 1 个公共点, 但不在直线 $y=x$ 上
(C) 有且只有 3 个公共点, 且有 1 个在直线 $y=x$ 上
(D) 没有公共点

5. 5^{5^5} 的五次方根是 ().

- (A) $5^{(5^5-1)}$ (B) 5^{4^5} (C) 5^{5^4} (D) $(\sqrt{5})^{5^5}$

6. Let $\otimes$ be the binary operator on positive integers defined by $a \otimes b = a^b$.

Consider the following identities:

- ① $a \otimes b = b \otimes a$;
② $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
③ $a \otimes (b+c) = (a \otimes b) + (a \otimes c)$;
④ $(a+b) \otimes c = (a \otimes c) + (b \otimes c)$.

Then ().

(A) ① and ② are true (B) ③ and ④ are true

(C) ② is true (D) None is true

7. 当 $x > 0$ 时, 不等式 $\sin \omega x > kx$ 的解集是 $\{x | 0 < x < 4\}$, 则不等式 $\sin \omega x > kx$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集是().

(A) $\{x | -4 < x < 4\}$

(B) $\{x | -4 < x < 4, \text{ 且 } x \neq 0\}$

(C) $\{x | x < -4 \text{ 或 } 0 < x < 4\}$

(D) $\{x | 0 < x < 4\}$

8. 实验室里有一架不等臂天平. 同学甲说: 分别把所称物体放在左右两个盘中各称一次, 则两次称得的质量的平均数就等于被称物体的真实质量; 同学乙说: 将一个物体放到左盘称得的质量是 1 千克, 将另一个物体放到右盘中, 称得的质量也是 1 千克. 则两个物体的质量之和的真实值是 2 千克. 甲, 乙的判断中().

(A) 甲对, 乙不对

(B) 乙对, 甲不对

(C) 甲、乙都对

(D) 甲、乙都不对

9. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$, 则 a_{2008} 等于().

(A) $-\frac{4}{3}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) 3

(D) -3

10. 在右边的每个空格中填入一个正数, 使每一行方格中的数成等差数列, 每一列方格中的数成等比数列, 则 $x + y + z$ 的值为().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

1				3
		1		
$\frac{1}{4}$		x		
			y	
				z

二、A 组填空题

11. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{32} + \lg \frac{1}{100} - 3^{\log_3 2}$ 的值为_____.

12. 若奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 且 $f(-1) = 0$, 则能使 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围是_____.

13. 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 10)$ 的值域为_____.

14. 设全集 U 为全体质数的集合, 若集合

$$A = \{x | x^2 - 5x + p = 0, x \in U\}$$

中有两个元素, 则 $p =$ _____.

15. 某小学生练习将 $1, 2, 3, \dots$ 顺序相加, 从 1 加到 n , 但是少加了一个数, 得到的和是 2008, 则少加的那个数是_____.

16. The figure 1 shows the speed-time graph of a body over a period of 90 seconds. Given that the total distance moved is 1.84 km. The value of v is _____ m/s.

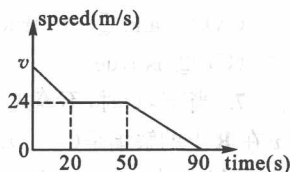


Fig. 1

17. 若不等式 $px^2 - qx + r \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 则不等式 $(qx^2 + px + r)(x - 1) > 0$ 的解集为 _____.

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq -1, \\ 2x+2, & -1 < x < 1, \\ \frac{1}{x}-1, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(a) > 1$, 则 a 的取值范围是 _____.

19. 方程 $x^3 + x + 1 = 0$ 与 $x + \sqrt[3]{x} + 1 = 0$ 的根分别是 α, β , 则 $\alpha + \beta$ 的值为 _____.

20. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+1)x + a^2 - a$ 的两个零点分别在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内, 则 a 的取值范围是 _____.

三、B组填空题

21. 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$ 的图象的对称轴是 $x = 1$, 并且图象通过点 $A(-1, 7)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

22. 如果含有 3 个元素的一个集合既可以表示为 $\{\sin\varphi, \cos\theta, 0\}$, 也可以表示为 $\{\sin^2\varphi, \sin\varphi + \cos\theta, -1\}$, 那么 $\cos\varphi =$ _____, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

23. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象与函数 $y = f(x-1) + 2$ 的图象重合, 那么 $a =$ _____, $b =$ _____.

24. 函数 $f(x) = 4^x - a \cdot 2^{x+1}$ ($-1 \leq x \leq 2$) 的最小值为 $g(a)$, 则 $g(2) =$ _____, $g(a) =$ _____.

25. 已知非零向量 a, b 的夹角为 60° , 且 $|b| = 2|a|$. 若 $a + kb$ ($k > 0$) 与向量 a 的夹角为 30° , 则 $k =$ _____, 此时 $\frac{|a|}{|a+kb|} =$ _____.

第一试 (第2类)

一、选择题

1. 设全集 $U = \{1, 3, 5, 7\}$, 集合 $A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 3, 7\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)$ 等于 ().

(A) $\{5\}$ (B) $\{3, 5\}$ (C) $\{1, 5, 7\}$ (D) $\emptyset$

2. 函数 $f(x) = \lg(2x+1)$ 的定义域为 ().

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的图象是连续的,且其中的四组对应值如下表,那么在下列区间中,函数 $f(x)$ 一定存在零点的是().

x	1	2	3	4
$f(x)$	6.1	2.9	-8.5	-1

(A) (1,2)

(B) (2,3)

(C) (3,4)

(D) (4, $+\infty$)

4. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $y = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ 的图象().

(A) 有且只有 1 个公共点,且在直线 $y=x$ 上(B) 有且只有 1 个公共点,但不在直线 $y=x$ 上(C) 有且只有 3 个公共点,且有 1 个在直线 $y=x$ 上

(D) 没有公共点

5. 5^{5^5} 的五次方根是().

(A) $5^{(5^5-1)}$ (B) 5^{4^5} (C) 5^{5^4} (D) $(\sqrt{5})^{5^5}$

6. Let $\otimes$ be the binary operator on positive integers defined by $a \otimes b = a^b$.

Consider the following identities:

① $a \otimes b = b \otimes a$;② $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;③ $a \otimes (b+c) = (a \otimes b) + (a \otimes c)$;④ $(a+b) \otimes c = (a \otimes c) + (b \otimes c)$.

Then ().

(A) ① and ② are true

(B) ③ and ④ are true

(C) ② is true

(D) None is true

7. 若三棱锥的三个侧面的斜高相等,棱锥的顶点在底面所在的平面内的射影在底面三角形的内部,则该射影是底面三角形的().

(A) 外心

(B) 内心

(C) 垂心

(D) 旁心

8. 实验室里有一架不等臂天平. 同学甲说:分别把所称物体放在左右两个盘中各称一次,则两次称得的质量的平均数就等于被称物体的真实质量;同学乙说:将一个物体放到左盘称得的质量是 1 千克,将另一个物体放到右盘中,称得的质量也是 1 千克. 则这两个物体的质量之和的真实值是 2 千克. 甲,乙的判断中().

(A) 甲对,乙不对

(B) 乙对,甲不对

- (C) 甲、乙都对 (D) 甲、乙都不对

9. 一个三棱锥的四个面所在的平面把空间分成的部分数为().

- (A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15

10. 在第一象限内,由过点(3,1)的直线与坐标轴围成的三角形面积的最小值是().

- (A) 4 (B) 6 (C) $\frac{27}{4}$ (D) 8

二、A组填空题

11. 若奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数,且 $f(-1)=0$,则能使 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围是_____.

12. 函数 $f(x)=\log_2(x^2-2x+10)$ 的值域为_____.

13. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{32} + \lg \frac{1}{100} - 3^{\lg 2}$ 的值为_____.

14. 设全集 U 为全体质数的集合,且 $A=\{x|x^2-5x+p=0, x \in U\}$ 中有两个元素,则 $p=$ _____.

15. The figure 1 shows the speed-time graph of a body over a period of 90 seconds. Given that the total distance moved is 1.84 km. The value of v is _____ m/s.

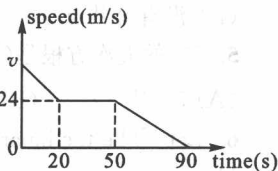


Fig. 1

16. 某小学生练习将 $1, 2, 3, \dots$ 顺序相加,从 1 加到 n ,但是少加了一个数,所得的和是 2008,则少加的那个数是_____.

17. 过四面体一个顶点的三条棱的中点可以确定一个平面,这样的平面有 4 个,用这样的四个平面截去 4 个小棱锥后,剩下的几何体的表面积与原四面体的表面积之比是_____.

18. 设方程 $x^3+x+1=0$ 与 $x+\sqrt[3]{x}+1=0$ 的根分别是 α, β ,则 $\alpha+\beta=$ _____.

19. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x \leq -1, \\ 2x+2, & -1 < x < 1, \\ \frac{1}{x}-1, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(a)>1$,则 a 的取值范围是_____.

20. 已知集合 $M=\{(x,y)|y=3-x, 0 \leq x \leq 3\}$, $N=\{(x,y)|y=-x^2-mx+1\}$, $M \cap N$ 只有一个元素,则实数 m 的取值范围是_____.

三、B组填空题

21. 如果二次函数 $y=ax^2+bx+1$ 的图象的对称轴是 $x=1$,并且图象通过

点 $A(-1, 7)$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

22. 若直线 $y = x + b$ 与曲线 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 有且只有 1 个公共点, 则 b 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若直线与曲线有 2 个公共点, 则 b 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

23. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象与函数 $y = f(x-1) + 2$ 的图象重合, 那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. 函数 $f(x) = 4^x - a \cdot 2^{x+1} (-1 \leq x \leq 2)$ 的最小值为 $g(a)$, 则 $g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $g(a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

25. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长 $AB=10, BC=8, AA_1=6$. 点 O 在棱 AB 上, $AO=6$. 现以 O 为球心, r 为半径作一球面, 则与长方体的 6 个面都有公共点的球面所对应的半径 r 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 若 $r=11$, 则该球面与长方体的 6 个面中的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个面有公共点.

第二试 (第1类)

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 是 ().

- (A) 周期为 3 的周期函数, 且是奇函数
- (B) 周期为 6 的周期函数, 且是偶函数
- (C) 周期为 3 的周期函数, 且是非奇非偶函数
- (D) 周期为 6 的周期函数, 且是非奇非偶函数

2. Which of the following inequalities is an algebraic expression for the shaded part of the number line above (Fig. 1)? Answer: ().

- (A) $|x-2| \leq 3$
- (B) $|x| \leq 5$
- (C) $|x-1| \leq 4$
- (D) $|x+1| \leq 4$



Fig. 1

3. Let x be the sum of the following 2008 numbers: 3, 33, 333, ..., $\underbrace{333\dots33}_{2008 \text{ digits}}$. Then the last four digits (thousands, hundreds, tens, units) of x are ().

- (A) 9102
- (B) 3034
- (C) 2664
- (D) 4814

4. 设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 若 $x_1 = \sin \alpha, x_{n+1} = (\sin \alpha)^{x_n} (n=1, 2, 3, \dots)$, 则数列 $\{x_n\}$ 是 ().

- (A) 递增数列
- (B) 递减数列