普通高等院校“十二五”规划教材

工程力学实验

GONGCHENG LIXUE SHIYAN

董雪花 主编
徐志洪 李四妹 石杏喜 副主编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十二五”规划教材

工程力学实验

董雪花　主编
徐志洪　李四妹　石杏喜　副主编

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书主要内容包括误差理论和数据处理方法、材料的力学性能测试、应变电测法、振动测试、光测法及各部分相关实验。本书在编写和内容选取上，力求切合普通高等学校的实际教学要求，并注意反映近年来工程力学实验领域中的新设备、新技术和发展趋势。

本书可作为普通高等院校力学、机械工程、土木工程等专业本科学生及研究生的工程力学实验课程教材，也可作为相关工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学实验/董雪花主编.—北京：国防工业出版社，2011.8

ISBN 978-7-118-06837-5

Ⅰ.①工... Ⅱ.①董... Ⅲ.①工程力学－实验 Ⅳ.①TB12－33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 058410 号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 8 **字数** 185 千字

2011 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 25.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前 言

本书是根据普通高等学校“工程力学实验”课程的基本要求及作者多年从事该课程教学的经验,结合工程力学实验技术近年来发展的实际情况编写而成的。

“工程力学实验”课程是工程力学专业本科生必修的重要专业基础课,是一门结合力学、光学、电学和计算机领域知识的交叉学科课程,其内容与高新技术的发展密切联系。

本书共分6章。第1章误差理论和数据处理方法,第2章材料的力学性能测试,第3章应变电测法,第4章振动与动应变测试,第5章光弹性法,第6章实验。编写本书的目的旨在使学生掌握工程力学实验的基本理论和实验方法,为解决工程实际中的结构强度问题和进行力学及相关学科的科学研究打下坚实的理论基础并掌握较强的实验技能。

本书在编写上注重逻辑性和系统性,内容精炼,循序渐进,文字叙述通俗易懂,可作为普通高等院校力学、机械工程、土木工程等专业本科学生及研究生的工程力学实验课程教材,也可作为相关工程技术人员的参考书。

本书第1章由石杏喜编写,第2章和第6章的6.1节由李四妹编写,第3章、第5章和第6章的6.2节及6.4节由董雪花编写,第4章和第6章的6.3节由徐志洪编写。在本书的编写过程中,参考了国内外公开出版的一些图书、会议资料、网上资料及兄弟院校的有关讲义,还得到了学校主管部门的大力支持。长春试验机研究所有限公司、江苏东华测试技术有限公司、江苏联能电子技术有限公司等厂家提供了大量实验仪器设备相关资料,在此一并表示衷心的感谢。

希望读者给我们提出宝贵的批评和建议。

编 者

目　录

第 1 章　误差理论和数据处理方法

1.1　误差的来源及分类

1.1.1　误差理论中的基本概念

在对某物理量进行多次测量时，经过大量的实践证明，无论仪器多么精确，测量者怎么仔细，各测量值之间总是存在着差异，而且被测对象的真值与测量值之间也存在一定的差异，这种差异通常称为测量误差。

一种材料的抗拉强度、弹性模量、泊松比等，一根试样的尺寸，一个砝码的质量都存在一客观的、真正的值，称为真值。对某种材料的抗拉强度、弹性模量、泊松比、试样尺寸的测量和砝码的称重都会得到一个实际测定的数值，称为测量值。真误差 Δ_t 的定义为被测对象的测量值 l_t 与真值 x 所得的差值，也称为绝对误差，即

$$\Delta_t = l_t - x \tag{1.1}$$

一般情况下，被测对象的真值难以获取，为了进行绝对误差的计算，可以采用被测对象的多次测量的平均值来代替真值。绝对误差反映测量值相对与真值的偏差大小，其单位与给出值单位相同。由于绝对误差有时难以反映不同被测对象的测量精度，例如测量两种不同规格试样的尺寸分别为 $l_1=100\text{mm}$ 和 $l_2=50\text{mm}$，如果测量绝对误差 $\Delta_1=\Delta_2=0.2\text{mm}$，这两根试样的测量精度显然不同，而绝对误差并不能反映这种差别。因此，在这种情况下，工程上一般采用相对误差 k 来进行精度评定，相对误差是绝对误差与被测对象的测量真值之比来描述，即

$$k = \frac{\Delta}{x} \times 100\% \tag{1.2}$$

1.1.2　误差的来源

测量误差的产生，主要原因如下：一是仪器误差，由于测量仪器的构造不可能十分完善；二是测量误差，由于测量者的感觉器官的鉴别能力和技术水平与经验的限制；三是环境误差，由于测量需要在一定的外界条件下进行，所以测量结果必然会含有误差。将仪器条件、测量条件、外界条件称为测量的三大客观(测量)条件。三大客观条件相同的测量称为等精度测量；三大客观条件不同的测量称为不等精度测量。

1. 仪器误差

该误差通常包括实验设备、测量仪器及仪表带来的误差，如安装调试不准确、刻度不准、设备加工粗糙、仪表非线性以及元器件之间的间隙造成的误差。

2. 测量误差

该误差通常包括测量方法不准确而引起的误差，以及测量者的视觉分辨能力、熟练程

度和精神状态等引起的误差。

3. 环境误差

由外界环境引起的测量误差主要指测量环境的温度、气压、湿度、电场、磁场等与要求的标准状态不一致引起的误差。

1.1.3 误差的分类

误差按其对测量结果影响的性质分为系统误差和偶然(随机)误差两大类。另外,在测量结果中有时还会出现测量错误,亦称粗差,如读错、记错、测错等均属于粗差。粗差在测量结果中是不允许出现的,它不属于误差的范畴。为了防止粗差,通常在测量中除了仔细认真地工作外,还要采取一定的检核措施,以发现是否有粗差存在。

1. 系统误差

在相同的测量条件下,对某量进行一系列的测量,若误差出现的符号、数值的大小均相同,或按一定的规律变化,这种误差称为系统误差。例如,用名义长度为 10cm,而实际长度为 10.05cm 的游标卡尺测量某一试样的直径,这样测量结果必然会含有系统误差。

2. 偶然误差

在相同的测量条件下,对同一对象进行一系列的测量,若误差出现的大小和符号均不一致,且从表面上看没有任何规律性,这种误差称为偶然误差。如读数时的估读误差。对于单个的偶然误差,测量前无法预料其出现的符号和大小,但就大量的偶然误差来研究,它具有一定的规律性,并且随着测量次数的增多,这种统计规律愈是明显。认识这种规律,可以更好地指导测量实践。偶然误差是误差理论研究的主要内容。

1.2 偶然误差的性质

偶然误差表面上无规律可寻,但受其内部必然规律的支配。实践表明:对某量进行多次等精度的重复测量,得到一系列不同的测量值,在只含有偶然误差的情况下,其误差出现统计学上的规律性。测量次数越多,规律性越明显。如掷硬币,出现正反面的机会,随次数的增多而趋于相等。

1.2.1 偶然误差的特性

例如,在相同的测量条件下,对某一截面为三角形的试样的截面内角独立地进行了 360 次测量,每一三角形的内角和与其理论值 180°之差,即为该三角形内角和的真误差 Δ_i 为

$$\Delta_i = a_i + b_i + c_i - 180^\circ$$

取误差区间间隔 $d\Delta = 0.20''$,并将 360 个真误差按其符号和大小排列,列于表 1.1 中。

表 1.1 误差分布表

误差所在区间	正误差个数	负误差个数	总数	误差所在区间	正误差个数	负误差个数	总数
0.0″~0.2″	48	49	97	1.0″~1.2″	12	12	24
0.2″~0.4″	39	38	77	1.2″~1.4″	5	6	11
0.4″~0.6″	32	32	64	1.4″~1.6″	3	4	7
0.6″~0.8″	22	25	47	1.6″以上	0	0	0
0.8″~1.0″	16	17	33	Σ	177	183	360

从表 1.1 中的统计结果可以得出偶然误差具有如下特性：

1. 有界性

在一定测量条件下的有限次测量中，偶然误差的绝对值不会超过一定限度。

2. 范围性

在一定测量条件下，绝对值较小的偶然误差出现的概率大，绝对值较大的偶然误差出现的概率小。

3. 对称性

在一定测量条件下，绝对值相等的正、负偶然误差出现的概率相等。

4. 抵偿性

在一定测量条件下，对同一量进行等精度观测，随着测量次数的增加，其偶然误差的代数和趋于 0，即

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n)=0 \tag{1.3}$$

1.2.2 偶然误差的分布密度函数

德国科学家高斯根据偶然误差的特性，总结出偶然误差服从正态分布，正态分布的偶然误差值与其出现概率之间的函数关系为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1.4}$$

式中：σ 为均方根差或标准差，是与测量条件有关的参数；f 为偶然误差 Δ 出现的概率密度。

将偶然误差正态分布密度函数绘成曲线，如图 1.1 所示。

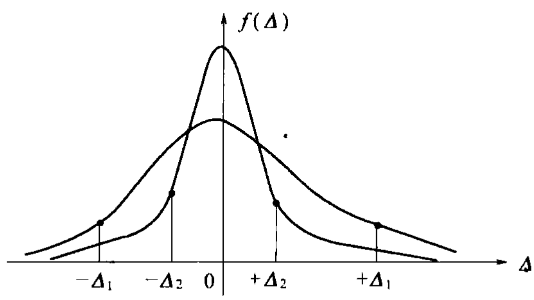

图 1.1　误差分布密度曲线

当 $\Delta\to\pm\infty$ 时，$f(\Delta)\to 0$。由于 $f(\Delta)$ 随 Δ 的增大而迅速减小，故当 Δ 达到足够大时，$f(\Delta)$ 已很小，实际上可视为零，此时的 Δ 值可以作为误差的限值。这是偶然误差的第一特性，即有界性。

若 $|\Delta_2|<|\Delta_1|$，则 $f(\Delta_2)>f(\Delta_1)$，说明 $f(\Delta)$ 随 Δ 绝对值的增大而减小。$f(\Delta)$ 为降函数，这是偶然误差的第二特性，即范围性。

若 $\Delta_2=-\Delta_1$，则 $f(\Delta_2)=f(\Delta_1)$，说明 $f(\Delta)$ 为偶函数，这是偶然误差的第三特性，即对称性。

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta)\mathrm{d}\Delta = 1$，表明误差落在全部区间内这一事件为必然事件。这也说明了测量结果中必然含有误差。

从图 1.1 中的两条误差分布密度曲线可以看出，曲线中部升得越高，曲线形状越陡峻，说明零附近的小误差出现的机会越多，表明测量质量好。相反，曲线中部升得越低，曲线形状越平缓，说明零附近的小误差出现的机会越少，表明测量质量差。测量质量的优劣取决于测量条件的好坏，而测量条件的好坏在误差分布密度曲线的形态上得到充分的反映。

1.3 偶然误差的精度评价指标

在一定的测量条件下，对某一量进行一系列的测量，对应着一种确定的误差分布。如果误差分布比较密集，即小误差出现的个数较多，则表示测量质量较好，亦即测量精度高；反之，如果误差分布比较离散，则表示测量质量较差，亦即测量精度低。反映精度高低的具体数字，称为精度评价指标。

1.3.1 算术平均值与改正数

在等精度测量条件下，对某量进行多次测量，通常取其平均值作为最后结果，认为是最可靠的。例如，对某试样直径进行 n 次测量，测量值为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，则该试样直径的算术平均值为

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_4}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i \tag{1.5}$$

由于测量仪器、测量方法、环境、人的观察力等条件的影响，物理量的真值无法测得，通常采用多次测量的平均值近似为真值。

设某量的真值为 x，测量值为 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$，其真误差为 $\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\Delta_i = l_i - x \tag{1.6}$$

上式两端取和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} l_i - n \cdot x \tag{1.7}$$

两端除以 n，得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} - x \tag{1.8}$$

由偶然误差的抵偿性可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i}{n} = 0 \tag{1.9}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} = x \tag{1.10}$$

当测量次数 n 无限增加时，测量值的算术平均值就是该未知量的真值；当测量次数 n 有限时，采用算术平均值来近似真值。

在一般情况下，被测量的真值为未知的，这时可用算术平均值代替测量的真值进行计算，测量值与算术平均值之差称为剩余误差，也叫改正数，用 v_i 表示。

$$v_i = l_i - L \tag{1.11}$$

对于等精度多次重复测量，测量值的改正数的代数和等于零，剩余误差的平方和为最小。

若将上式两端取和，有

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} l_i - n \cdot L = 0 \tag{1.12}$$

1.3.2 精度评价指标

1. 中误差

在一定测量条件下测量结果的精度可用标准差来衡量，标准差是偶然误差分散性的一个重要特征。但在实际测量工作中，不可能对某一量作无穷多次观测，因此，定义有限次观测的真误差来求标准差，也称为中误差。

1）根据真误差计算中误差

设在同精度测量条件下，对某量进行了 n 次测量，得测量值为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，相应的真误差分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，则定义该组测量值的方差为

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n} \tag{1.13}$$

当测量次数 n 有限时，则采用中误差 m 来近似值计算标准差为

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} \tag{1.14}$$

式(1.4)亦称为菲列罗公式。其中，m 代表一组测量值的精度，即这组测量值中的每一个测量值都具有这样的精度，或者说，同精度测量值具有相同的精度。而 Δ_i 彼此并不相同，这是由于偶然误差的性质所决定的。

中误差 m 的大小反映了一系列测量值的精度。不同的系列测量中，标准差越小，测量精度越高。若两列测量值的中误差相同，则表示二者的精度相同。

2）根据改正数计算中差

通常测量值的真值是不知道的，因此，无法计算真误差 Δ_i，因而也就不能利用菲列罗公式计算一组测量值的中误差。但是观测量的算术平均值 $L=\frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}$ 是可求的，这时可用

测量值的改正数 v_i 来计算这组测量值的中误差，从而衡量这组测量值的精度，即用贝塞尔公式计算：

$$m=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}} \tag{1.15}$$

所以，在已知测量值真值时，用非列罗公式求测量值的中误差；未知测量值真值时，用贝塞尔公式求测量值的中误差。

例 1.1 在同一观测条件下，对某试样长度进行了 5 次观测，其 5 次观测值分别为 10.234cm，10.238cm，10.236cm，10.240cm，10.242cm，试求：

(1) 1 次观测的中误差；

(2) 5 次观测平均值的中误差。

解：求平均值：

$$\overline{D}=\frac{10.234+10.238+10.236+10.240+10.242}{5}=10.238\text{cm}$$

各次观测的改正数：

$$\begin{aligned}
v_1 &= D_1-\overline{D}=-0.004\text{cm}\\
v_2 &= D_2-\overline{D}=0.000\text{cm}\\
v_3 &= D_3-\overline{D}=-0.002\text{cm}\\
v_4 &= D_4-\overline{D}=-0.002\text{cm}\\
v_5 &= D_5-\overline{D}=0.004\text{cm}
\end{aligned}$$

1 次测回的中误差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}v_i^2}{n-1}}=\pm 0.0032\text{cm}$$

5 次观测平均值的中误差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}v_i^2}{n(n-1)}}=0.0014\text{cm}$$

2. 相对误差

在某些测量工作中，用绝对误差还不能反映出测量质量的高低，例如测量 100mm 和 50mm 的两根试样的长度尺寸，其中误差都是±0.02mm，但不能简单地认为两者的精度一样。因此，采用相对误差可以很好地衡量它们精度的高低，相对误差 k 为中误差的绝对值与被测量真值之比，一般表示为分子是 1 的分数形式，可写成

$$k=\frac{|m|}{x}\times 100\% \tag{1.16}$$

上例中，长度为 100mm 的试样相对误差为 $k_1=0.02/100=1/5000$，长度为 50mm 的试样相对误差为 $k_2=0.02/50=1/2500$，所以前者精度高于后者。

3. 极限误差

根据偶然误差的有界性可知，在一定的观测条件下偶然误差的绝对值不会超过一定的限度，这个极限值就是极限误差。中误差只能代表一组观测值的精度，而不能代表某一个观测值的真误差大小，但二者之间有一定的统计学上的联系。在一系列等精度测量误差中，真误差与中误差之间具有如下概率统计规律：

$|\Delta|>|m|$的偶然误差出现的概率约为30%；

$|\Delta|>2|m|$的偶然误差出现的概率约为5%；

$|\Delta|>3|m|$的偶然误差出现的概率约为0.3%。

故一般认为大于$3|m|$的偶然误差是不可能的，所以一般取$3|m|$为偶然误差的极限误差，即

$$-3|m|<\Delta_{极}<3|m| \tag{1.17}$$

测量中，取$2m$为Δ的容许值$\Delta_{容}$，即

$$-2|m|<\Delta_{容}<2|m| \tag{1.18}$$

若观测值的偶然误差$2|m|<|\Delta|\leqslant 3|m|$，则认为该值不可靠（但不是错误），应舍去不用。

1.4 误差传播定律及其应用

在实际工作中，有些物理量是可以直接测量的，如试样的直径和长度，有些物理量是不能直接测量的，如屈服极限、强度极限、延伸率和断面收缩率等。对于这些不能直接测量的物理量必须通过一些直接测量得到的数值，按一定的公式或函数去计算而间接得到。由于各直接测定的数值都含有误差，因此由计算得到的间接量中也必然含有误差，阐述测量值标准差与测量值函数标准差之间关系的定律，称为误差传播定律。

1.4.1 非线性函数误差传播定律

设有独立测量值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，其中误差分别为$m_{x_1},m_{x_2},\cdots,m_{x_n}$，现有函数

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.19}$$

求函数值z的中误差m_z。

在函数z中，由于独立测量量$x_1,x_2,\cdots,x_n$存在真误差$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$，所以必然会引起未知量$z$产生真误差$\Delta_z$。

对式(1.19)进行全微分有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

因Δ_i、Δ_z均很小，由数学分析可知，可用Δ_i、Δ_z代替全微分$\mathrm{d}x_i$、$\mathrm{d}z$，从而有真误差关系式：

$$\Delta_z=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta_n \tag{1.20}$$

式(1.20)中，$\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$是函数对各个变量所取的偏导数，以测量值代入计算得到，它们是一常数。设

$$k_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(i = 1,2,\cdots,n)$$

则式(1.20)可写为

$$\Delta_z = k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 + \cdots + k_n \cdot \Delta_n \tag{1.21}$$

为了建立函数值与观测量之间的中误差关系式，设想对各 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均测量 N 次，则可以写出 N 个类似式(1.21)的关系式：

$$\begin{cases} \Delta z_1 = k_1 \cdot \Delta_{11} + k_2 \cdot \Delta_{21} + \cdots + k_n \cdot \Delta_{n1} \\ \Delta z_2 = k_1 \cdot \Delta_{12} + k_2 \cdot \Delta_{22} + \cdots + k_n \cdot \Delta_{n2} \\ \vdots \\ \Delta z_N = k_1 \cdot \Delta_{1N} + k_2 \cdot \Delta_{2N} + \cdots + k_n \cdot \Delta_{nN} \end{cases} \tag{1.22}$$

上式两端平方后再求和，得

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta z_i^2 = k_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2 + k_2^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2 + \cdots + k_n^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \Delta_{ni}^2 + 2\sum_{p=1}^{N}\Big(\sum_{\substack{i=1,j=1 \\ i\neq j}}^{n} k_i k_j \Delta_{ip}\Delta_{jp} \Big) \tag{1.23}$$

根据偶然误差的特性，当 $i\neq j$ 时，独立测量量 x_i、x_j 的偶然误差 Δ_i、Δ_j 之乘积 $\Delta_i \cdot \Delta_j$ 也表现为随机误差。依据随机误差的抵偿性，有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{N}\Big(\sum_{\substack{i=1,j=1 \\ i\neq j}}^{n} k_i k_j \Delta_{ip}\Delta_{jp} \Big) = 0 \tag{1.24}$$

故(1.23)式可写为

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta z_i^2}{N} = k_1^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta_{1i}^2}{N} + k_2^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta_{2i}^2}{N} + \cdots + k_n^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta_{n}^2}{N} \tag{1.25}$$

由中误差定义公式(1.14)，有

$$m_z^2 = k_1^2 \cdot m_{x_1}^2 + k_2^2 \cdot m_{x_2}^2 + \cdots + k_n^2 \cdot m_{x_n}^2 \tag{1.26}$$

即

$$m_z = \pm\sqrt{k_1^2 \cdot m_{x_1}^2 + k_2^2 \cdot m_{x_2}^2 + \cdots + k_{x_n}^2 \cdot m_{x_n}^2} \tag{1.27}$$

式(1.27)即为计算函数中误差的一般形式。

例 1.2 测一矩形截面试样的截面积，a 边的边长及其中误差分别为 $a=5\text{cm}$，$m_a=\pm0.02\text{cm}$，b 边的边长及其中误差分别为 $b=2\text{cm}$，$m_b=\pm0.01\text{cm}$，求矩形截面的的面积 S 及其中误差 m_S。

解：(1)列函数式 $S=a\cdot b=5\times2=10\text{cm}^2$

(2) 取偏导数 $\quad \frac{\partial S}{\partial a}=b=2\text{cm}$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=a=5\text{cm}$$

(3) 求中误差 $\quad m_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 m_b^2$

$$=(2\times 0.02)^2+(5\times 0.01)^2$$
$$=0.0041$$

故 $m_S=\pm 0.064\text{cm}^2$。

1.4.2 线性函数误差传播定律

对于一般线性函数，未知量 z 与独立直接观测量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数关系式为

$$z = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \cdots + k_n \cdot x_n \tag{1.28}$$

式中：$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 均为常数。

当独立直接观测量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的中误差为 $m_{x_1}, m_{x_2}, \cdots, m_{x_n}$，则函数值 z 的中误差表达形式为

$$m_z = \pm\sqrt{k_1^2 \cdot m_{x_1}^2 + k_2^2 \cdot m_{x_2}^2 + \cdots + k_n^2 m_{x_n}^2} \tag{1.29}$$

例 1.3 对某试样在线弹性范围内进行应力应变测量，已知其弹性模量 $E=210\text{GPa}$，某一时刻在测量点处测得的应变值及其中误差分别为 $\varepsilon=2\times 10^{-5}$，$m_\varepsilon=\pm 5\times 10^{-7}$，试求该时刻测量点处的应力 σ 及其中误差 m_σ。

解：(1)列函数式 $\sigma=E\cdot\varepsilon=210\times 10^9\times 2\times 10^{-5}=4.2\text{MPa}$

(2) 求中误差

$$m_\sigma^2 = E^2 m_\varepsilon^2$$
$$=(210\times 10^9)^2\times(5\times 10^{-7})^2$$
$$=1.1025\times 10^{10}$$

故 $m_\sigma=\pm 0.105\text{MPa}$。

1.5 实验数据处理方法

在生产和科学实验中，一方面要研究被测量量的最佳值和精度问题，另一方面要研究变量之间的内在关系。表达变量之间的内在关系的方法有很多种，如表格、数学表达式、散点图、曲线等，其中数学表达式更有利于从理论上做进一步分析研究，其形式紧凑，能客观地反映事物的内在规律性。对研究不同物理量之间的关系具有重要意义。

1.5.1 一元线性回归

为建立变量之间相互关系的数学模型，回归分析法是一种有效工具，如果两个随机变量 x 和 y 之间存在一定关系，并通过实验测量得到一系列 x 和 y 的数据，通过一元线性回归得出两个变量之间的关系式。

现对两随机变量进行一系列的测量，并得到一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$。

为了正确反映 x 和 y 之间的关系，将样本数据在直角坐标系中描出相应点的位置，作出数据散点图，如图 1.2 所示，能够直观地反映出随机变量之间是否存在相关关系和函数形式。从图 1.2 中的点位分布情况看，所有数据点表现为线性分布趋势，因此，可以假定 x 和 y 之间存在线性相关关系。设两个变量 x 和 y 之间关系式的数学模型用一元线性方程表示为

$$y = f(x) = ax + b \tag{1.30}$$