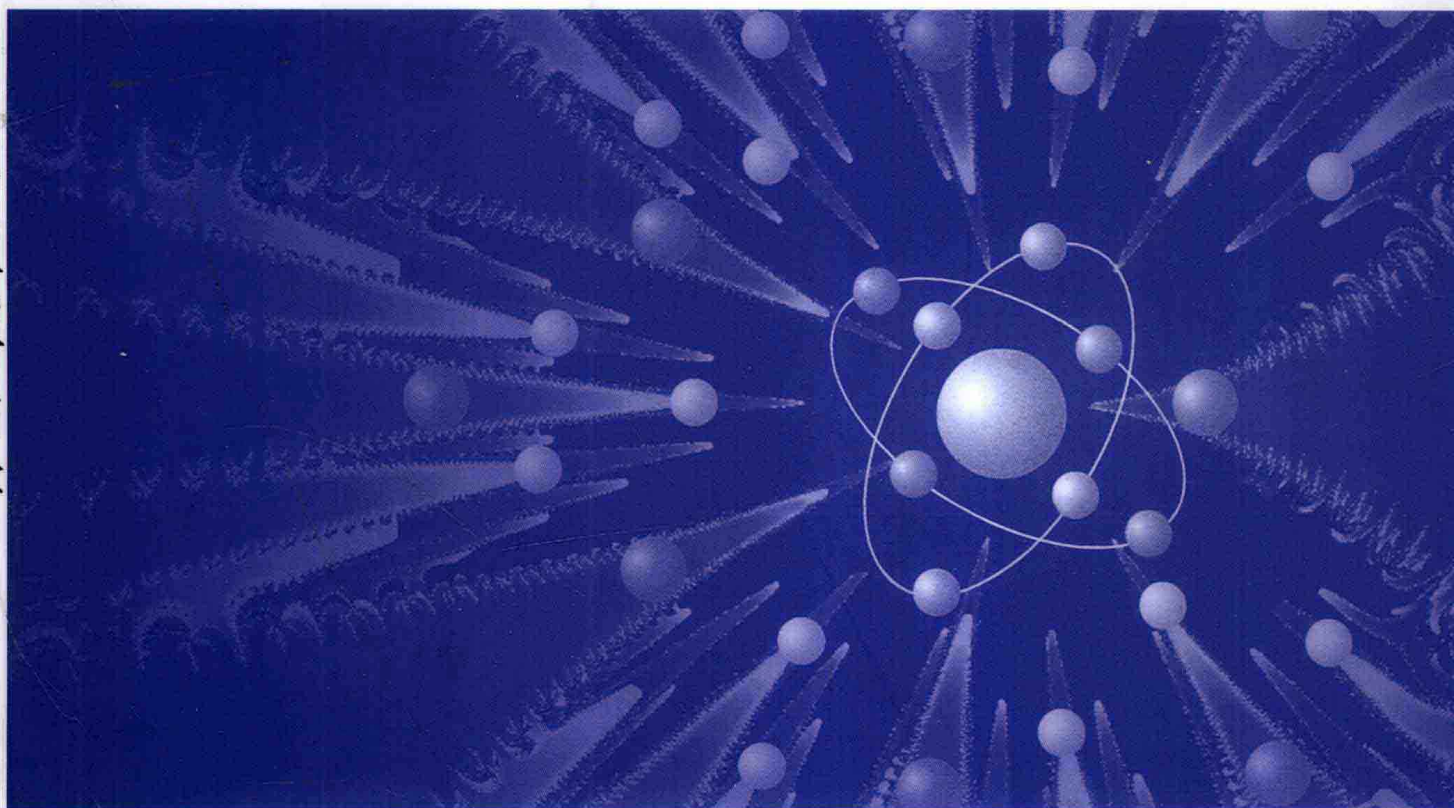


◆ 大师讲经典课程丛书 ◆



Tang Aoqing's
Quantum Mechanics 之
量子力学

● 授课 唐敖庆 笔记 徐元植

大师讲经典课程丛书

唐敖庆 之 量子力学

授课 唐敖庆
笔记 徐元植



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

唐敖庆之量子力学/唐敖庆著;徐元植编. —杭州:浙江大学出版社, 2011. 4

ISBN 978-7-308-08510-6

I. ①唐… II. ①唐…②徐… III. ①量子力学—高等学校—教材 IV. ①0413. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 045475 号

唐敖庆之量子力学

授课 唐敖庆

笔记 徐元植

责任编辑 许佳颖

文字编辑 李峰伟

封面设计 雷建军

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 杭州日报报业集团盛元印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 11.75

字 数 294 千

版 印 次 2011 年 4 月第 1 版 2011 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-08510-6

定 价 24.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

唐敖庆院士简介

唐敖庆院士,1915年11月出生于江苏省宜兴县。初中毕业考入无锡师范学校,毕业后曾在小学任教。1936年夏考入北京大学化学系学习。抗日战争爆发后随校南迁到昆明,在西南联大继续学习。1940年7月毕业留校任教。

抗战胜利后,唐敖庆与李政道、朱光亚、王瑞骥、孙本旺等以助手的身份,随吴大猷(物理)、曾昭伦(化学)、华罗庚(数学)于1946年赴美考察原子能技术。而后,唐敖庆被推荐留在哥伦比亚大学化学系攻读博士学位。1949年11月获博士学位。1950年2月回国应聘为北京大学副教授,半年后晋升为教授。1952年调东北人民大学(吉林大学前身)组建化学系。1956年任吉林大学副校长,1978年任吉大校长。1955年起被选为中国科学院学部委员(后改称院士)。1980年12月任国务院学位委员会委员兼化学学科评议组召集人。1981年5月当选为中国科学院主席团成员。1981年8月当选为国际量子分子科学研究院院士。1982年8月当选为中国化学会第21届理事会理事长。1986年2月调任国家自然科学基金委主任,兼吉林大学名誉校长。1986年6月被选为第3届中国科学技术协会副主席。1987年12月任国家自然科学基金奖励委员会副主任。1990年11月当选为中国化学会第23届理事会理事长。

唐敖庆在吉林大学先后主讲过无机化学、物理化学、物质结构、量子化学、统计力学等10多门课程,且经常同时讲授2~3门课。1978年他在吉大化学系物质结构研究室的基础上,创建了吉林大学理论化学研究所。从1953到1966年他先后指导过物质结构、高分子物理化学专业的20多名研究生;1978年恢复研究生制度之后,他共招收了14名博士生、26名硕士生。他通过高分子物理化学学术讨论班和物质结构学术讨论班以及科研工作,培养出一批具有高水平的学术带头人,如孙家钟、江元生、邓丛豪、刘若庄、张乾二、鄢国森、戴树珊、沈家骢、汤心颐等。

唐敖庆是理论化学家、教育家和科技组织领导者。他在组建现代化学团队和研究机构中作出了业绩。他是中国理论化学研究的开拓者,在配位场理论、分子轨道图形理论、高分子反应统计理论等领域取得了一系列杰出的研究成果,对中国理论化学学科的奠基和发展作出了贡献。他还曾任国家自然科学基金委员会首届主任,创建了中国的科学基金制度。

鉴于他的科学成就,于1993年获陈嘉庚化学奖,1995年获何梁何利基金科学和技术成就奖。2008年7月15日病逝于北京。



裘祖文教授向老师唐敖庆院士汇报工作



1986 年秋裘祖文教授回母校访问时与徐元植教授合影

序

量子化学是应用量子力学的基本原理和方法研究化学问题的一门科学。量子力学可以说是量子化学的基础,化学专业的学生、教师和化学工作者,学习、掌握量子化学的同时,如能学习和参考量子力学原理,则对学习量子化学会有很大的帮助。目前国内外已经有不少量子力学的教科书和专著,但化学专业的学生学习起来仍有一定的困难。我国量子化学之父——唐敖庆先生曾于1961年为中国科学院应用化学研究所光谱班学员开设了量子力学课程。虽然,对象是光谱班的学员,但其内容适用于广大的化学系学生。唐先生一生讲课无数,使所有听众受益匪浅,不少课程已经编撰成专著,从1982年科学出版社出版的唐敖庆等《量子化学》,到2003年吉林大学出版社出版的唐敖庆《理论化学中的群论方法》等数十本,流传至今。遗憾的是这门量子力学课程的内容未曾编撰成书。1963年我有幸在吉林大学物质结构学术讨论班聆听唐先生讲课,亲身感受过他老人家讲课的精湛艺术和独特风格。唐先生具有惊人的记忆力,在备课时主要靠思维记忆,讲课从来都不用讲稿,一个上午,连续讲两个小时的课,推导公式和讲解,从头到尾一气呵成。唐先生讲课,语言简练,表述精准,系统完整,深入浅出,富有逻辑性和启发性,使听课的师生精神高度集中,在唐老师的引导下开展积极思维活动。看了浙江大学徐元植教授根据他和裘祖文教授的笔记整理的这本《唐敖庆之量子力学》,仿佛又回到了当年吉林大学的课堂。

徐元植教授记下的《唐敖庆之量子力学》全书共分8章,内容精炼简洁,从旧量子论的实验基础,经典力学的局限性,到物质的波粒二象性,引出量子力学的发展之必然;量子力学的数学基础和基本假设等的叙述,为化学专业学生学习量子力学打下了必要的基础;对线性代数和群论等,也作了非常简练的介绍,不多也不少,是学习量子力学之前必须掌握的数学工具,使学生对量子力学中力学量的“表象”能有准确的理解;有关角动量和中心力场、角动量守恒等基本概念,是进一步掌握角动量理论和不可约张量法的重要基础;微扰、变分和WKB等近似方法是学习掌握近代计算量子化学方法必不可少的基本知识;后两章介绍的电子自旋、自旋角动量、光谱结构以及相对论量子力学知识,为进一步学习掌握各种光谱、波谱和电子能谱的理论,奠定了必要的基础。

这本书的序,本应由当年听过这门课的裘祖文教授来写,但由于裘祖文教授的健康原因无法完成此任。应徐元植教授之托,我欣然答应。得悉为出版这本书让唐老师这门课程的内容得以流传于世,徐元植教授仔细校对笔记内容使这本笔记臻于完善,并多方奔走联系出



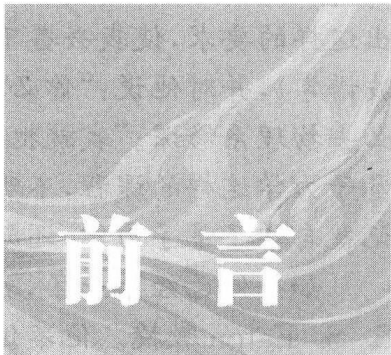
版,他这种认真负责的精神实在令人感动!

掌握一门理论知识本无捷径可走,但一本好书往往能帮助初学者少走弯路。衷心希望这本书能够有助于包括化学在内的非物理学专业的青年学子学习掌握量子力学的基础知识!

刘春万

2010年12月12日于福州

* 刘春万教授是中国科学院福建物质结构研究所资深研究员,20世纪50年代留苏的理学博士、量子化学专家。



前言

大师讲课,我做笔记。

唐敖庆教授是量子力学的大师。1950年,他从美国哥伦比亚大学留学回来就在北京大学化学系任教。1951年,我考上北京大学化工系,学校规定工学院一年级学生在理学院(沙滩)修课。当时唐老师给理学院化学系一年级学生开“普通化学”课,我去旁听了几堂课,留下了极其深刻的印象。

1961年,当时我在中国科学院大连化学物理研究所工作,所领导派我到长春应用化学研究所出差,任务是学习并全面掌握电子磁共振波谱学,从谱仪的基本原理、仪器制造到操作技术,一直到波谱解析,再到实际应用(开题研究)。而我又是一个学石油化工出身、刚参加工作不久(仅5年)的研究实习员,数学和物理的功底都非常浅薄,确实难以担此重任。

刚巧遇上唐敖庆教授给应化所光谱班的学员开“量子力学”课,裘祖文先生担任辅导老师。光谱班的学员是从全国各大学(多半是工科大学)本科一年级的学生中抽调来的,程度参差不齐。我有幸参加旁听了这门课。为了能够听懂“量子力学”这门课,裘祖文先生还给我补习了“线性代数”、“偏微分方程”、“复变函数”、“数理方程”、“特殊函数”这5门学习量子力学之前的基础课程。

唐敖庆教授是该领域中的大师,面对程度参差不齐、基础又差的学员,他能够把量子力学这门课讲得深入浅出,引人入胜,充分显示了大师的渊博知识,更突出了大师高超的讲课技艺,使得学员们尤其是我本人终生受益;同时,也留下了一本千金难买的听课“笔记”。

1998年我退休了。10年后,2008年1月我编著的《实用电子磁共振波谱学》面世了。是年秋天,浙江大学竺可桢学院(浙大尖子生集中学习的学院)的一



位二年级学生来找我,说他对“电子磁共振波谱学”颇感兴趣,希望作为他今后的努力方向。在当前国内的电子磁共振波谱学正处于无人问津的低潮之际,他提出这样的要求,使我兴奋不已。我送给他一本我编著的书——《实用电子磁共振波谱学》,并对他说:“你必须先修量子力学这门课,然后才能读懂这本书,但也不必去物理系修课。”我就把我听唐老师“量子力学”课的这本笔记借给他自学。像量子力学这样的课程,不听课单靠自学一般说来比较困难。然而他就靠这本笔记就自学了量子力学,还颇有心得。

如今他已经毕业了,我把他推荐给美国丹佛大学(University of Denver)的 S. S. Eaton 教授。他不但被录取了,而且还获得了全额奖学金。他把我借给他的“量子力学”笔记还给我时说:他想要把该笔记做成电子版,或把这本笔记全部复印能够带到美国去。这才启发我考虑是否应该出版这本“笔记”,让更多的学子也能分享到大师讲课的魅力。

时隔半个世纪,“笔记”原稿的纸已发黄,虽有些字迹已不太清楚,但都还能回忆得起来。在整理输入到电脑的过程中,唐老师当年讲课的音容笑貌、生动活跃的课堂氛围仍历历在目,记忆犹新。如今,唐老师已驾鹤西去,无法请他审阅斧正。当年的辅导老师,裘祖文教授,现也年过八旬,且右手右脚致残已 20 余年,审稿也无可能。但他当年的笔记记得非常之好,并且鼎力支持出版这本“笔记”,把他当年记的笔记,用特快专递寄来给我,以校核我的笔记中疏漏舛误之处。然而,限于我本人的水平,难免仍有差错。若有发现,均应归咎于我本人,幸勿误伤唐老师的声誉,并请不吝指正。

“笔记”的出版得到浙江大学出版社陈晓嘉副社长的大力支持,以及为出版本书提供帮助的裘祖文教授、陈占国教授等致以衷心的感谢。希望并相信会有更多的学习“量子力学”的读者,尤其是非物理学专业的学子,能从中受益。

徐元植

2011 年 1 月 22 日于
浙江大学求是村

* 裘祖文先生 1951 年毕业于浙江大学化工系,吉林大学教授曾任吉大理论化学研究所所长。

目 录

CONTENTS



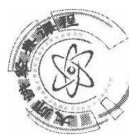
绪 言	1
第 1 章 旧量子论	2
1.1 黑体辐射	2
1.2 光电效应	5
1.3 康普顿(Compton)效应	6
1.4 氢原子和类氢离子的光谱	7
第 2 章 波和粒子	9
2.1 平面波	9
2.1.1 单色的平面波	9
2.1.2 平面波的叠加	11
2.1.3 波包——无穷多个平面波的叠加	12
2.1.4 相速度和群速度	14
2.2 光的二象性	15
2.2.1 光的折射	15
2.2.2 多普勒(Doppler)效应	16
2.2.3 光栅的衍射	17
2.3 德布罗意(de Broglie)波	18
2.3.1 de Broglie 假设	18
2.3.2 简单的推论	19
2.3.3 实验验证	21
2.3.4 de Broglie 波的统计意义	24
2.4 波动方程(薛定谔方程(Schrödinger Equation))	26
2.4.1 自由粒子的运动方程	26



2.4.2 在场的作用下粒子的运动方程	27
第3章 量子力学基础	28
3.1 量子力学的数学基础	28
3.1.1 算符及其运算法则	28
3.1.2 线性算符	30
3.1.3 本征函数和本征值	30
3.1.4 自轭算符	31
3.1.5 正交归一化集合	33
3.1.6 展开公式	36
3.2 量子力学的基本假设	37
3.2.1 力学量用自轭线性算符表示	37
3.2.2 力学量的测定值(量子力学中的测量理论)	38
3.2.3 运动方程	40
3.2.4 波函数	41
3.3 重要推论	43
3.3.1 几率流密度	43
3.3.2 量子泊松方括	45
3.3.3 力学量平均值对时间的导数	46
3.3.4 厄伦费斯特(Ehrenfest)定理	47
3.3.5 运动积分	48
3.3.6 宇称守恒	49
3.4 量子力学与经典力学的关系	50
3.4.1 从量子力学到牛顿力学	50
3.4.2 从 Schrödinger 方程到哈密尔顿-雅可比(Hamilton-Jacobi)方程	54
3.5 量子力学的测量理论	58
3.5.1 两条定理的证明	58
3.5.2 状态的测定	60
3.5.3 测不准关系式(海森堡(Heisenberg)原理)	61
第4章 表象理论	64
4.1 数学准备	64
4.1.1 线性空间	64
4.1.2 线性变换	71
4.1.3 矩阵	77



4.2 几种表象	82
4.2.1 本征值与本征函数	82
4.2.2 状态函数的表象	86
4.2.3 力学量算符的表象	87
4.2.4 量子力学公式与方程的表象	88
4.2.5 Schrödinger 方程的算符解法	89
4.2.6 Schrödinger 表象与 Heisenberg 表象	90
第5章 中心力场	92
5.1 动量	92
5.1.1 动量算符	92
5.1.2 动量的本征函数	93
5.1.3 坐标表象与动量表象	93
5.1.4 在动量表象中的坐标	94
5.2 角动量	94
5.2.1 角动量算符	94
5.2.2 角动量对易公式	95
5.2.3 角动量的本征值	96
5.2.4 角动量的本征函数	97
5.3 中心力场的一般讨论	100
5.3.1 求能量算符 H 的本征函数	100
5.3.2 能量算符 H 的本征值	102
5.3.3 具体实例	102
5.4 库仑力场	103
5.4.1 运动方程	103
5.4.2 运动方程的解	103
5.4.3 本征值与本征函数	105
5.4.4 氢原子与类氢离子	106
第6章 近似方法	110
6.1 微扰(摄动)理论	110
6.1.1 存在简并的能量算符不明显含时的微扰	110
6.1.2 谐振子运动的近似方法解	114
6.1.3 氢原子的 Stark 效应	116
6.2 变分法	119



6.2.1 两条定理	119
6.2.2 变分方法	119
6.2.3 变分法的应用例举(氢原子的基态)	121
6.3 WKB 的近似方法	124
6.3.1 WKB 近似方法的导出及其适用范围	124
6.3.2 联结公式	126
6.3.3 势垒问题	127
6.3.4 势阱问题	130
6.4 含时的微扰理论	131
6.4.1 一级微扰	131
6.4.2 不含时的 H'_{mk}	132
6.4.3 H' 是时间周期性的函数	133
6.5 光的发射和吸收	134
6.5.1 Einstein 关系式	134
6.5.2 粒子在电磁场中的运动	135
6.5.3 发射与吸收系数	136
6.5.4 选择定则	139
第 7 章 自旋	141
7.1 总角动量	141
7.1.1 定义	141
7.1.2 空间量子化	141
7.1.3 矩阵表示	142
7.1.4 自旋角动量	144
7.2 角动量相加	145
7.2.1 无耦合表象	145
7.2.2 耦合表象	146
7.2.3 矢量加法定则	147
7.2.4 矢耦系数	148
7.3 电子自旋	149
7.3.1 实验基础	149
7.3.2 电子自旋	150
7.4 光谱谱线的精细结构	150
7.4.1 微扰计算	152
7.4.2 谱线的精细结构	153



7.5 电子在电磁场中的运动	154
7.5.1 Pauli 方程	154
7.5.2 几率密度与几率流密度	155
7.5.3 氢原子或类氢离子在电磁场中的谱线分裂(Zeeman 效应)	156
第 8 章 相对论量子力学	159
8.1 几类矩阵	159
8.1.1 Pauli 矩阵	159
8.1.2 Dirac 矩阵	160
8.1.3 σ' 矩阵	161
8.1.4 一个关系式	161
8.2 自由粒子的 Dirac 方程	162
8.2.1 Dirac 方程	162
8.2.2 自由粒子的 Dirac 方程的解	163
8.2.3 自旋问题	165
8.3 电子在电磁场中运动的 Dirac 方程	166
8.3.1 Dirac 方程	166
8.3.2 Pauli 方程	166
8.3.3 轨道—轨道相互作用	167
后记	170
附录：裘祖文教授回忆老师唐敖庆院士	171
笔记者简介	174

绪 言

量子力学是一门理论课程,而科学的理论是客观规律的概括和总结,但总结的正确与否,还要通过实验的检验。

客观规律是可以认识的,但却是逐步深入的。物理学的规律是从大物体开始研究的。所谓大物体,就是宏观(肉眼看得见)的物体,其运动的速度比光的速度要慢很多。到 19 世纪中叶,已经总结出:牛顿三大定律、万有引力定律、法拉第定律、麦克斯韦电磁场方程,等等,这已算是相当完善了。以至于有人认为所有的物理现象用经典力学(实物的规律)和经典电动力学(场的规律)都可以解决了。但是,到后来把这些规律推广到物体小到与原子差不多大小,运动的速度可以与光速相比拟的时候,已经不能再用经典力学和经典电动力学来解决。譬如:电子的质量在其运动速度等于光速的 $9/16$ 时,就发生变化。在重新研究概括的基础上得到了相对论力学(1905 年)。同时也发现:在研究微观客体(如基本粒子、原子、分子等)时,有些现象也不是原来的理论所能够阐明的。随着科学研究的新发展,量子力学诞生了(1924 年),在 1924—1927 年得到了蓬勃发展。量子力学的主要规律,在那时就都已经建立起来了。

相对论力学和量子力学是当代自然科学最伟大的成就,并在大量的实验事实面前验证了它的正确性。现在看起来这两门力学已经相当完善,但却不能说认识已经终止。实际上,现在发现的某些现象,也并非相对论力学和量子力学所能够说明的。

量子力学是研究微客体运动的一门科学。微客体运动有以下三个特点。

1. 波动和粒子的二象性。就是把经典力学从粒子性出发,与经典电动力学以波动为基础的统一起来,认为微客体既是粒子又是波动。

2. 运动规律的统计性。认识微客体的运动是以大量的粒子为基础的,其规律带有统计性。统计的规律,我们在经典力学中已经遇到过。譬如:“气压”用宏观的时间观察到的平均值表示。但是,量子力学中的统计规律应该是反映粒子和波动的二重性。

3. 力学量(如动量、角动量、能量等)在数值上的不连续性。

量子力学的发展是经过了 1900—1924 年的量子论阶段。它又可以分为:研究微观客体运动速度比光速慢得多的非相对论量子力学和运动速度可以与光速相比拟的相对论量子力学。本课程主要讲述非相对论量子力学。其实,相对论量子力学直到今天也并非很完善,仍需进一步的认识和深化。

第 1 章 旧量子论

■ 这一章讲 4 个问题：黑体辐射、光电效应、康普顿效应、氢原子和类氢离子的光谱。

1.1 黑体辐射

球状物体的外面保持一定的温度 T ，里面辐射出多种频率的射线。取单位体积内频率为 ν 的能量是 $U(\nu)$ ，则在频率范围从 ν 到 $\nu + d\nu$ 之间的能量为 $U(\nu) d\nu$ ，这个能量可以通过球面上开一个小孔，测量其能流密度 $I(\nu)$ ，即由单位时间流过单位面积，频率为 ν 的能量来决定。小孔的开法，要求不影响到里面的能量分布 $U(\nu)$ 。

可以证明

$$I(\nu) = \frac{c}{4\pi} U(\nu) \quad (1.1)$$

由此从 $I(\nu)$ 得出的能量 $U(\nu)$ ，与频率 ν 的关系如图 1.1 所示。

实验测定的结果：

1. 当 $\nu \approx 0$ 时， $U(\nu) \propto \nu^2$ ；当 $\nu \rightarrow \infty$ 时， $U(\nu) \approx 0$ ；这中间有一个极大值，即当 $\nu = \nu_0$ 时。

2. 此值的位置与温度有关，温度升高，极大值向频率高处移。

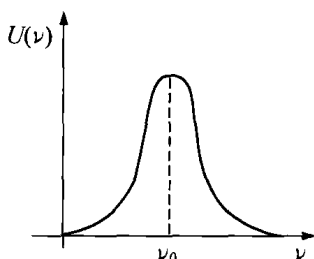


图 1.1

Rayleigh - Jeans 试图用经典力学的结论，用下面的方法得出上面的结果。他假设单位体积中含频率为 ν 的粒子有 $\rho(\nu)$ 个，则在 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 范围内有 $\rho(\nu) d\nu$ 。辐射是一种谐振子辐射，每种波平均能量 = 动能 + 位能 = kT ，则有

$$\rho(\nu) d\nu \cdot kT = U(\nu) d\nu \quad (1.2)$$

下面我们来讨论 $\rho(\nu)$ ：

先来看平面正方形：不是什么波都能在平面中运动，必须满足边界条件，在方形的顶点是波节。设有波长为 λ 的波，沿边长为 L 的方形与 x, y 轴分别成 α, β 角传播（如图 1.2 所示）。从几何上看，我们有

$$\lambda_x \cdot \cos\alpha = \lambda; \quad \lambda_y \cdot \cos\beta = \lambda \quad (1.3)$$

$$\text{或 } \frac{1}{\lambda_x} = \frac{1}{\lambda} \cos\alpha; \quad \frac{1}{\lambda_y} = \frac{1}{\lambda} \cos\beta \quad (1.4)$$

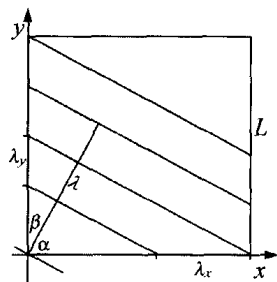


图 1.2

从边界条件，我们可以得到



$$L = n_x \frac{\lambda_x}{\alpha}; \quad L = n_y \frac{\lambda_y}{\beta} \quad n_x, n_y = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

$$n_x = \frac{2L}{\lambda_x} = \frac{2L}{\lambda} \cos \alpha; \quad n_y = \frac{2L}{\lambda_y} = \frac{2L}{\lambda} \cos \beta \quad (1.6)$$

故有 $n_x^2 + n_y^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \quad (\because \alpha + \beta = \frac{\pi}{2})$

我们得到能量在某一频率为 ν 的条件是:

$$\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 = n_x^2 + n_y^2 \quad (1.7)$$

n_x, n_y 可取的数为图 1.3 中的黑点。我们的要求就是在 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 之间的波数。也就是以 $\frac{2L\nu}{c}$ 和 $\frac{2L}{c}(\nu + d\nu)$ 为半径作圆，两圆之间的点子数。从图 1.3 中直接观察即可看到：每单位面积中就有一个点子。只要计算圆环的面积就能知道有多少个波数。此圆环的面积为：

$$\frac{1}{4} \left\{ \pi \left[\frac{2L}{c}(\nu + d\nu) \right]^2 - \pi \left(\frac{2L\nu}{c} \right)^2 \right\} \quad (1.8)$$

忽略其高级无穷小诸项，此圆环的面积为：

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{2L}{c} \right)^2 2\nu d\nu = 2\pi \frac{L^2}{c^2} \nu d\nu \quad (1.9)$$

电磁场是横波，电场的矢量如图 1.4 所示，所以实际波数应该是其两倍：即在 ν 与 $\nu + d\nu$ 之间不同频率波的数目为： $2 \times 2\pi \frac{L^2}{c^2} \nu d\nu$ 。

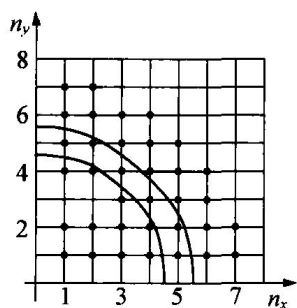


图 1.3

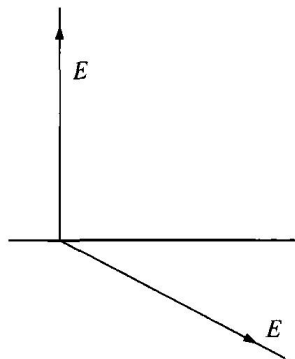


图 1.4

再看立体的情况：设有波长为 λ 的波沿着与 x, y, z 轴成 α, β, γ 角传播，在几何上有

$$\lambda_x \cos \alpha = \lambda; \quad \lambda_y \cos \beta = \lambda; \quad \lambda_z \cos \gamma = \lambda \quad (1.10)$$

$$\text{或 } \frac{1}{\lambda_x} = \frac{1}{\lambda} \cos \alpha; \quad \frac{1}{\lambda_y} = \frac{1}{\lambda} \cos \beta; \quad \frac{1}{\lambda_z} = \frac{1}{\lambda} \cos \gamma \quad (1.11)$$

在边界上有

$$L = n_x \frac{\lambda_x}{\alpha}; \quad L = n_y \frac{\lambda_y}{\beta}; \quad L = n_z \frac{\lambda_z}{\gamma} \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (1.12)$$