研究生用书

# 有限元法及其应用

# Finite Element Method and its Application

秦太验 徐春晖 周喆 编著

中国农业大学出版社
CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS

# 有限元法及其应用

inite Element Method and its
Application

● 秦太验 徐春晖 周 喆 编著



中国农业大学出版社
CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS

## 内 容 简 介

本书系统地阐述有限单元法的基本原理、数值方法、计算机程序设计技术及其应用。

全书共12章，内容包括有限元法预备知识——加权余量法、杆系结构问题、弹性平面问题、弹性空间问题、热传导问题、流体力学问题、动力学问题、板壳结构问题等，重点是有限元法的基本原理和数学公式表达的建立，以及单元插值函数的构造。最后以一个线弹性静力学教学程序FEMED为例介绍有限元程序设计，使读者初步掌握有限元编程的基本方法并具备通用程序开发能力。

本书的特点是由浅入深，简明易懂。书中精选了大量例题，通过这些例题，学生可以逐步掌握有限元法的基本理论和方法，特别适合于教学学时偏少的情况。

本书可作为高等院校力学、机械、土木、水利、航空航天等专业本科生和研究生的教材，也可作为其他相关专业科技人员的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

有限元法及其应用/秦太验，徐春晖，周喆编著. —北京：中国农业大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5655-0379-5

Ⅰ.①有… Ⅱ.①秦…②徐…③周… Ⅲ.①有限元法 Ⅳ.①0241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第158437号

**书　　名** 有限元法及其应用

**作　　者** 秦太验　徐春晖　周　喆　编著

| | | | |
|---|---|---|---|
| **策划编辑** | 梁爱荣　席　清 | **责任编辑** | 梁爱荣 |
| **封面设计** | 郑　川 | **责任校对** | 王晓凤　陈　莹 |
| **出版发行** | 中国农业大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京市海淀区圆明园西路2号 | **邮政编码** | 100193 |
| **电　　话** | 发行部 010-62818525，8625 | | 读者服务部 010-62732336 |
| | 编辑部 010-62732617，2618 | | 出　版　部 010-62733440 |
| **网　　址** | http://www.cau.edu.cn/caup | | **E-mail**: cbsszs@cau.edu.cn |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京鑫丰华彩印有限公司 | | |
| **版　　次** | 2011年8月第1版　　2011年8月第1次印刷 | | |
| **规　　格** | 787×980　　16开本　　20.5印张　　375千字 | | |
| **定　　价** | 31.00元 | | |

**图书如有质量问题本社发行部负责调换**

# 出版说明

我国的研究生教育正处于迅速发展、深化改革时期，研究生教育要在研究生规模和结构协调发展的同时，加快教学改革步伐，以培养高质量的创新人才。为加强和改进研究生培养工作，改革教学内容和教学方法，充实高层次人才培养的基本条件和手段，建设研究生培养质量基准平台，促进研究生教育整体水平的提高，中国农业大学通过一系列的改革、建设工作，形成了一批特色鲜明的研究生教学用书，本书是其中之一。特别值得提出的是，本书得到了“北京市教育委员会共建项目”专项资助。

建设一批研究生教学用书，是研究生教育教学改革的一次尝试，这批研究生教学用书，以突出研究生能力培养为出发点，引进和补充了最新的学科前沿进展内容，强化了研究生用书在引导学生扩充知识面、采用研究型学习方式、提高综合素质方面的作用，必将对提高研究生教育教学质量产生积极的促进作用。

中国农业大学研究生院

2008 年 1 月

# 前　　言

在工程和科学技术各个领域内，对于许多力学、物理等问题，人们已经找到了它们应遵循的基本方程（常微分方程或偏微分方程）和相应的定解条件，但能用解析方法求出精确解的只是少数方程性质比较简单且几何形状相当规则的问题。对于大多数问题，由于方程或求解区域的几何形状比较复杂，很难得到解析的答案，这类问题的解决通常有两种途径：一种是引入简化假定，将方程和几何边界简化为能够处理的情况，从而得到问题在简化情况下的解答，这种方法对于很多复杂问题是不可行的，因为过多的简化可能导致误差很大甚至错误的解答。另一种解决途径和方法则是近年来得到突飞猛进发展的数值解法，特别是近 30 多年来，随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，数值方法已成为求解工程和科学技术问题的主要工具。随着线性问题的求解在理论与计算技术上的日趋成熟，目前研究重点已转向非线性问题。

数值分析方法主要分两大类。一类以有限差分法为代表，其特点是直接求解基本微分方程和相应的定解条件的近似解。借助于有限差分法，能够求解某些相当复杂的问题，特别是求解流体流动问题，差分法有自己的优势。但用于求解几何形状复杂的结构时，它的精度将降低，甚至发生困难。另一类是首先建立和原问题基本方程及定解条件相等效的积分提法，进而建立近似解法，如最小二乘法、里兹法、伽辽金法等都属于这一类数值方法。由于这几种方法都是在全求解区域上假设近似函数，因此对于几何形状复杂的问题，不可能建立合乎要求的近似函数。而有限元法的出现，是数值分析方法研究领域内的重大突破性进展。利用变分原理建立的有限元方程和经典的里兹法的主要区别是，有限单元法假设的近似函数不是定义在全求解区域而是在单元上，而且事先不要求满足任何边界条件，因此它可以用来处理复杂的连续介质问题。

有限元法是一种工程数值计算方法，其适应性很强，可以解决各种各样的复杂工程问题。有限元法的基本思想就是将任意一个连续体离散化为一组有限个、按一定方式互相联结且几何形状简单的单元的组合，单元本身又可以有不同形状，使复杂问题简化从而得到问题的解。有限元法作为数值分析方法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假定的近似函数来分片地表示全求解区域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数，或这些函数与其导数在单元各个节点上的数值和其插值函数来表达。这样一来，未知场函数或未知场函数及其导数

在各个节点上的数值就成为新的未知量(即自由度),从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题,一经求解出这些未知量,就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值,从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加,即单元尺寸的缩小,解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解最后将收敛于精确解。

从应用数学角度看,有限元法基本思想的提出,可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作,他对里兹法作了重要的推广,在划分为许多三角形的区域上引进分片试探函数,将各三角形区域相互联结处的函数值取为问题的未知量。由于当时尚未出现计算机,他的思想没有结出丰硕果实。1960 年,Clough 首次提出了"有限单元法"这个词,使人们更清楚地认识到有限元法的功效。有限单元法的最大特点是适应性强,它可以把形状不同、性质不同的单元组集起来求解,所以特别适用于求解不同构件组合成的复杂结构。1960 年以后,伴随着电子计算机的快速发展和广泛应用,有限元法的发展速度才显著加快,已被广泛应用于几乎所有的工程技术领域。

有限元法在现代农业科技的各个领域也得到越来越广泛的应用。农业方面有限元法早期的应用主要是有关农业机械强度计算方面。近一二十年来,有限元法在农产品和食品的加工方法、蔬菜和水果的损伤防护、水分及其溶质在土壤和植物体内的运动、农业环境保护以及作物生长过程等方面都得到了应用。

本书是在黄文彬教授编写的《有限元法基础》讲义的基础上修订、扩充而完成的。书中提供的有限元教学程序 FEMED 是在李明瑞教授编写的有限元教学程序 FEP2 的基础上修改而成的。

本书的特点是由浅入深地阐述了有限元法的基本理论,精选了大量例题,通过这些例题,使学生逐步掌握有限元法的基本理论和方法。内容包括有限元法的理论基础——加权余量法、杆系结构、平面弹性问题、空间弹性问题、热传导问题、流体力学问题、动力学问题、板壳问题、几何非线性问题、二维梁有限变形算法以及有限元程序设计等。本书可作为工科院校有关专业研究生和本科生的教材,也可作为有关专业教师和工程技术人员的参考用书。

本书的第 1 章至第 5 章由秦太验教授编写,第 6、7、10、11 章由徐春晖副教授编写,第 8、9、12 章由周喆副教授编写。

黄文彬教授、李明瑞教授和华云龙教授分别对本书的不同章节作了详细审阅,提出了许多宝贵意见。在此特别向三位教授表示衷心的感谢。

本书的出版得到了中国农业大学研究生院的资助,同时也得到了中国农业大

学出版社的大力支持。责任编辑悉心完成了本书的审阅和编辑。作者向他们表示由衷的谢意。

由于水平所限，本书肯定存在不足和不妥之处，欢迎同行专家和读者批评、指正。

作　者

2010 年 10 月

# 目　　录

**1　有限元法预备知识——加权余量法** ………………………………………… (1)
1.1　变分问题的加权余量法 ………………………………………… (1)
1.2　弹性力学的变分原理——虚功原理 ………………………………………… (9)
小结 ………………………………………… (11)
习题 ………………………………………… (12)
**2　杆系结构问题** ………………………………………… (13)
2.1　杆单元、平面桁架有限元法 ………………………………………… (13)
2.2　平面梁单元 ………………………………………… (25)
2.3　平面刚架有限元法 ………………………………………… (42)
2.4　空间桁架 ………………………………………… (50)
2.5　空间刚架 ………………………………………… (53)
小结 ………………………………………… (64)
习题 ………………………………………… (65)
**3　弹性平面问题** ………………………………………… (69)
3.1　弹性平面问题的基本公式 ………………………………………… (69)
3.2　三节点三角形单元 ………………………………………… (71)
3.3　四节点矩形单元 ………………………………………… (78)
3.4　多节点单元的形函数 ………………………………………… (83)
3.5　用面积坐标表示三角形单元的形函数 ………………………………………… (90)
3.6　等效节点载荷 ………………………………………… (95)
小结 ………………………………………… (97)
习题 ………………………………………… (97)
**4　平面等参单元** ………………………………………… (100)
4.1　等参单元的概念 ………………………………………… (100)
4.2　等参单元的收敛性研究 ………………………………………… (104)
4.3　等参变换的雅可比矩阵 ………………………………………… (105)
4.4　等参单元的单刚和等效外载 ………………………………………… (110)
4.5　Wilson 元 ………………………………………… (114)
4.6　三角形单元的等参变换 ………………………………………… (121)

4.7　高斯数值积分 ……………………………………………………… (123)
小结……………………………………………………………………… (130)
习题……………………………………………………………………… (130)
**5　弹性空间问题** ……………………………………………………… (132)
5.1　空间轴对称问题 ……………………………………………………… (132)
5.2　空间四面体单元 ……………………………………………………… (136)
5.3　空间等参单元 ………………………………………………………… (139)
小结……………………………………………………………………… (149)
习题……………………………………………………………………… (150)
**6　热传导问题** …………………………………………………………… (151)
6.1　热传导问题基本方程 ………………………………………………… (151)
6.2　二维稳态热传导问题 ………………………………………………… (154)
6.3　二维瞬态热传导问题 ………………………………………………… (161)
6.4　温度应力计算 ………………………………………………………… (165)
小结……………………………………………………………………… (167)
习题……………………………………………………………………… (168)
**7　流体力学问题** ………………………………………………………… (170)
7.1　流体力学基本知识 …………………………………………………… (170)
7.2　稳定渗流基本方程及其离散化 ……………………………………… (172)
7.3　二维不可压理想流体无旋流动 ……………………………………… (176)
小结……………………………………………………………………… (181)
习题……………………………………………………………………… (182)
**8　动力学问题** …………………………………………………………… (183)
8.1　弹性动力学基本方程 ………………………………………………… (183)
8.2　质量矩阵和阻尼矩阵 ………………………………………………… (185)
8.3　直接积分法 …………………………………………………………… (187)
8.4　振型叠加法 …………………………………………………………… (193)
8.5　例子：阶梯形杆的固有频率和动力响应……………………………… (197)
小结……………………………………………………………………… (200)
习题……………………………………………………………………… (200)
**9　板壳结构问题** ………………………………………………………… (201)
9.1　薄板理论 ……………………………………………………………… (201)
9.2　Kirchhoff 板单元……………………………………………………… (206)

9.3 Mindlin 板单元 …… (212)
9.4 平板壳单元 …… (215)
小结 …… (218)
习题 …… (218)
**10 有限变形问题** …… (220)
10.1 有限变形的初步概念 …… (220)
10.2 变形梯度与应变 …… (224)
10.3 应力的定义及各种应力之间的关系 …… (228)
10.4 杆单元的有限变形理论及有限元算法 …… (232)
10.5 二维与三维弹性体的有限变形及有限元法 …… (238)
小结 …… (245)
习题 …… (246)
**11 二维梁的有限变形问题** …… (247)
11.1 引论 …… (247)
11.2 二维梁的有限变形运动学分析 …… (249)
11.3 虚功方程与有限元列式 …… (253)
11.4 用牛顿迭代法求解有限元平衡方程 …… (256)
11.5 截面上的 Cauchy 应力 …… (258)
小结 …… (261)
习题 …… (262)
**12 有限元程序设计** …… (263)
12.1 有限元程序的基本结构 …… (263)
12.2 数组的半动态分配 …… (265)
12.3 构造单元刚度矩阵及总刚度矩阵的组集 …… (267)
12.4 总刚度矩阵的变带宽存贮 …… (268)
12.5 给定位移约束的处理 …… (271)
12.6 单元应力及节点力的计算 …… (273)
12.7 FEMED 程序 …… (274)
12.8 算例 …… (302)
12.9 FEMED 程序索引 …… (312)
小结 …… (314)
习题 …… (315)
**参考文献** …… (316)

# 1 有限元法预备知识——加权余量法

在工程领域内，对于许多力学问题和物理问题，人们都可以给出其数学模型，即应遵循的基本方程（微分方程）和相应的定解条件。但能用解析方法求出精确解的只是极少数比较简单的情况，对于大多数问题，由于方程的复杂性和求解域几何形状的复杂性，导致无法求得问题的解析解，只能采用数值方法求解。随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，数值分析方法已成为求解工程实际问题的有力工具。有限元法是目前应用最为广泛，技术最为成熟的求解微分方程的数值方法，变分原理是有限元法的理论基础，分片插值是构造有限元法的思想核心。

## 1.1 变分问题的加权余量法

### 1.1.1 泛函及变分的定义

积分描述法的基本概念是泛函。泛函也是一种“函数”，但它是一种比通常所说的函数有更深内涵的“函数”，这种函数的独立变量一般不是通常函数的自变量，而是通常函数本身。这种以函数作为它的独立变量的“函数”称为泛函。为了说明这种泛函的具体含义，现举三个实例（图 1.1）。

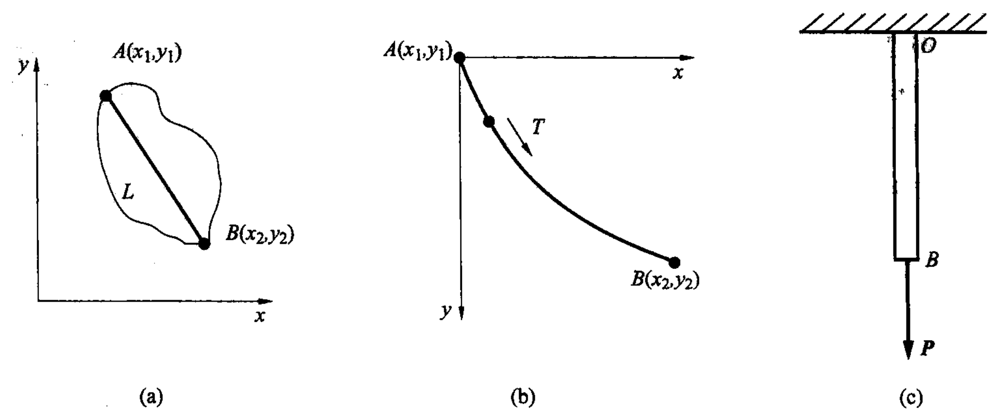


图 1.1 泛函实例

**例题 1.1** 如图 1.1(a)所示，在 $xy$ 平面上，$A$、$B$ 两个定点间可以连接出很多条曲线 $y=y(x)$，$x$ 是自变量，$y$ 是独立函数。曲线的长度 $L$ 是随不同的曲线 $y$ 而变的，所以 $L$ 是 $y$ 的"函数"，而 $y$ 又是自变量 $x$ 的函数，所以 $L$ 是一个泛函。由于曲线长度是弧长的积分，所以上述泛函 $L[y]$ 为：

$$L[y]=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\mathrm{d}s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

这是一种积分描述法。

**例题 1.2** 如图 1.1(b)所示，假设在 $A$、$B$ 两定点连成的曲线上有一质点，此质点在重力的作用下，无摩擦地从 $A$ 滑到 $B$ 需要一定的时间 $T$。$T$ 随不同的曲线 $y(x)$ 而变化，所以 $T$ 是 $y$ 的"函数"，即 $T=T[y]$，而 $y$ 又是自变量 $x$ 的函数，所以 $T$ 是一个泛函。

设 $A$ 取在原点，则质点由 $A$ 滑行到 $B$ 的速度可用 $v=\sqrt{2gy}$ 表示。滑行弧段长 $\mathrm{d}s$ 所需的时间 $\mathrm{d}T$ 可以表示为：

$$\mathrm{d}T=\frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

故需要的总时间泛函 $T[y]$ 为：

$$T[y]=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

这也是一种积分描述法。

**例题 1.3** 如图 1.1(c)所示。假设有一根不计自重的弹性杆 $OB$，长度为 $l$，横截面面积为 $A$，弹性模量为 $E$，$O$ 端固定在原点，$x$ 轴沿杆的轴线向下，$B$ 端受拉力 $P$ 作用，杆内各点会产生随 $x$ 变化的位移 $u(x)$，因而产生应变 $\varepsilon$ 和应力 $\sigma$。在线弹性范围内，当某点的应变由 0 增至 $\varepsilon$，则该点的应变能密度为 $U_0=\int_0^{\varepsilon}\sigma\mathrm{d}\varepsilon$。由于 $\sigma=E\varepsilon$，所以，应变能密度 $U_0=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$。又由于 $\varepsilon=\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$，则杆内总应变能 $\Pi_0$ 为：

$$\Pi_0=\int_V\frac{E}{2}\varepsilon^2\mathrm{d}V=\int_0^l\frac{AE}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

如果考虑杆的 $B$ 端载荷所做的功 $W=Pu(l)$，则杆的总势能 $\Pi$ 等于总应变能 $\Pi_0$ 减去外力功 $W$，为：

$$\Pi = \Pi_0 - W = \int_0^l \frac{AE}{2}\left[\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2 \mathrm{d}x - Pu(l) \tag{1.5}$$

杆的总势能 $\Pi$ 是位移 $u$ 的导数的函数，而 $u$ 又是自变量 $x$ 的函数，所以总势能 $\Pi[u']$ 是一种泛函。这仍是一种积分的描述方法。

这类例子不胜枚举。泛函广泛地存在于数学、物理、力学问题之中。由上面三个例子可以看出，一个函数对应着泛函的一个数值；另一个函数对应着泛函的另一个数值。这种建立在函数与数值之间的对应关系叫做泛函关系，所以泛函定义为：

设 $\{y(x)\}$ 是可取函数集，如果对于这个集合中任意函数 $y(x)$ 恒有某个确定的数与之对应，记为 $\Pi[y]$，则说 $\Pi[y]$ 是定义于集合 $\{y(x)\}$ 上的一个泛函。

从这个定义可以看出，泛函有两个基本点：

(1)泛函有它的定义域，这个定义域是指满足一定条件的函数集。一定条件是指边界条件、初始条件和函数的连续程度，人们把定义域内的这种函数称为可取函数或容许函数。

(2)泛函 $\Pi[y]$ 与可取函数 $y(x)$ 有明确的对应关系。泛函的值是由一条可取曲线的整体性质决定的，它表现在"积分"上。在固体力学中，这种积分往往具有能量性质，所以有时称为能量泛函，如例题 1.3 所述。

若对泛函提出某种要求，如要求例题 1.1 中 $AB$ 曲线长度最短；要求例题 1.2 中质点从 $A$ 滑到 $B$ 所需时间最短；要求例题 1.3 中杆的总势能最小或在外力作用下平衡，那么，就要对泛函取极值，这时，就要用到泛函的变分 $\delta$，这个变分符号 $\delta$ 和微分算符 d 可以进行类比。取函数的微分 $\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0$，由于 $\mathrm{d}x\neq 0$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，便取得极值点。类似地，上面三个例子的变分提法为：例题 1.1 是曲线在两端固定的边界条件下，通过取曲线长度(泛函)的变分为零，即 $\delta L=0$，可求得最短曲线；例题 1.2 是在两端固定的边界条件下，通过取质点滑过曲线所需时间(泛函)的变分为零，即 $\delta T=0$，可求得最速降线；例题 1.3 是在 $O$ 端固定，$B$ 端受 $P$ 力作用的边界条件下，取杆的总势能(泛函)的变分为零，即 $\delta\Pi=0$，可得平衡态下的位移函数。

### 1.1.2 变分问题的直接解法——里兹法

直接解法都是半逆解法，即先假设满足本质性边界条件(狄里克雷边界条件)的某个函数就是极值函数。在这个极值函数内，设置一些待定系数。将此函数代入问题的泛函后令其变分等于零，则可求得这些待定系数，从而得到问题的解。

**例题 1.4** 已知 $y(0)=y(1)=0$，试确定 $y=f(x)$，使泛函 $\Pi=\int_0^1(y'^2-y^2-2xy)\mathrm{d}x$ 取极值。

**解**：满足本质性边界条件的函数类就是可取函数。在可取函数中取如下三种试探函数分别求解。

**1. 试探函数 $y_1=a_1x(1-x)$**

这个函数体现了 $x=0,1$ 时，$y_1=0$，满足本质性边界条件，待定系数为 $a_1$，将 $y_1$、$y_1'$ 代入本题泛函中，得：

$$\Pi(a_1)=\int_0^1[a_1^2(1-2x)^2-a_1{}^2x^2(1-x)^2-2a_1x^2(1-x)]\mathrm{d}x$$

此式随 $a_1$ 而变。通过 $\delta\Pi(a_1)=0$ 或 $\frac{\mathrm{d}\Pi(a_1)}{\mathrm{d}a_1}=0$，求泛函极值

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(a_1)}{\mathrm{d}a_1}=\int_0^1[2a_1(1-2x)^2-2a_1x^2(1-x)^2-2x^2(1-x)]\mathrm{d}x=0$$

解得：
$$a_1=\frac{5}{18}$$

所以：
$$y_1=\frac{5}{18}x(1-x)$$

**2. 试探函数 $y_2=(a_1+a_2x)x(1-x)$**

此函数也满足本质性边界条件，待定系数为 $a_1$、$a_2$。将 $y_2$、$y_2'$ 代入泛函中，并分别取：

$$\frac{\partial\Pi(a_1,a_2)}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial\Pi(a_1,a_2)}{\partial a_2}=0$$

积分后得方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}a_1+\frac{3}{10}a_2=\frac{1}{6}\\ \frac{3}{10}a_1+\frac{26}{105}a_2=\frac{1}{10}\end{aligned}\right\}$$

或写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{26}{105}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{10}\end{Bmatrix}$$

由此解得：$a_1=\dfrac{71}{369}, a_2=\dfrac{7}{41}$

所以：$y_2=\left(\dfrac{71}{369}+\dfrac{7}{41}x\right)x(1-x)$

**3. 试探函数 $y_3=(a_1+a_2x+a_3x^2)x(1-x)$**

此函数仍满足本质性边界条件，待定系数为 $a_1$、$a_2$、$a_3$。将 $y_3$、$y_3'$代入泛函中，并分别取：

$$\frac{\partial \Pi(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_1}=0,\quad \frac{\partial \Pi(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_2}=0,\quad \frac{\partial \Pi(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_3}=0$$

积分后得方程组：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{3}{10} & \dfrac{19}{105} \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{26}{105} & \dfrac{79}{420} \\ \dfrac{19}{105} & \dfrac{79}{420} & \dfrac{103}{603} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{15} \end{Bmatrix}$$

由此解得：$a_1=0.189\,6, a_2=0.184\,9, a_3=-0.014\,2$

所以：$y_3=(0.189\,6+0.184\,9x-0.014\,2x^2)x(1-x)$

此问题的解析解可通过泛函的欧拉方程及第一类边界条件：

$$y''+y+x=0,\quad y(0)=y(1)=0$$

而求得：
$$y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$$

将数值解和解析解的比较列于表 1.1 中。

**表 1.1 例题 1.4 数值解和解析解的比较**

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y$(解析解) |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.2 | 0.044 4 | 0.036 25 | 0.036 16 | 0.036 10 |
| 0.4 | 0.066 67 | 0.062 57 | 0.062 71 | 0.062 78 |
| 0.6 | 0.066 67 | 0.070 76 | 0.070 91 | 0.071 02 |
| 0.8 | 0.044 45 | 0.052 64 | 0.052 55 | 0.052 50 |
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

由表 1.1 可以看出，随着试探函数阶次的提高，数值解逐渐逼近解析解。

将例题 1.4 中的试探函数 $y_1$、$y_2$、$y_3$ 写成待定系数 $a_i(i=1,2,3)$ 展开的形式：

$$y_1 = a_1 x(1-x) = a_1 N_1(x)$$

$$y_2 = (a_1 + a_2 x)x(1-x) = a_1 N_1(x) + a_2 N_2(x) = \sum_{i=1}^{2} a_i N_i(x)$$

$$\begin{aligned} y_3 &= (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)x(1-x) \\ &= a_1 N_1(x) + a_2 N_2(x) + a_3 N_3(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i N_i(x) \end{aligned}$$

式中：$N_i(x)$为坐标的函数。

已经证明，试探函数：

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)$$

当 $n \to \infty$时，通过代入泛函取极值求出的 $y_n$ 将收敛到精确解。这样确定的试探函数系列$\{y_n\}$称为泛函的极小化序列。这种选取试探函数对泛函进行变分的直接解法称为里兹法。$a_i$ 称为里兹参数，在有限元中是待求的节点函数值；$N_i(x)$称为里兹基函数，是一族线性无关的坐标的函数，在有限元中是插值函或称形函数，需预先构造。

**例题 1.5** 已知 $y(0)=0$，$y'(1)=0$，试确定 $y=f(x)$，使泛函：

$$\Pi = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\mathrm{d}x$$

取极值。

**解**：本题和例题 1.4 不同之处在于有了自然边界条件(黎曼边界条件)$y'(1)=0$。解析解变为：

$$y = \frac{\sin x}{\cos 1} - x$$

用里兹法求解。在可取函数类中取试探函数

$$y_2 = (a_1 + a_2 x)x$$

$$y_3 = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)x$$

将 $y_2$、$y_2'$、$y_3$、$y_3'$分别代入泛函中，变分求极值后，计算结果与解析解比较如表 1.2 所示。

**表 1.2 例题 1.5 用里兹法求解的计算结果**

| $x$ | $y_2$ | $y_3$ | $y$(解析解) | $y'_2$ | $y'_3$ | $y'$(解析解) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.985 6 | 0.857 0 | 0.850 4 |
| 0.2 | 0.179 9 | 0.167 9 | 0.167 7 | 0.812 9 | 0.811 6 | 0.813 9 |
| 0.4 | 0.325 2 | 0.320 4 | 0.320 7 | 0.640 3 | 0.702 4 | 0.704 7 |
| 0.6 | 0.436 0 | 0.444 6 | 0.445 0 | 0.467 6 | 0.529 4 | 0.527 5 |
| 0.8 | 0.512 2 | 0.527 9 | 0.527 7 | 0.295 0 | 0.292 5 | 0.289 5 |
| 1.0 | 0.554 0 | 0.557 4 | 0.557 4 | 0.122 3 | −0.008 2 | 0.000 0 |

表 1.2 说明，试探函数阶次提高，则函数的数值结果精度提高，导数的数值结果精度也提高，但没有函数的数值结果的精度高。表 1.2 还说明，试探函数只需考虑到本质性边界条件，无须考虑自然边界条件，计算结果会自然得到满足。如 $x=1$ 时，$y'_2=0.122\,3$，$y'_3=-0.008\,2$，趋于自然边界条件 $y'(1)=0$。此例题泛函中并非不含自然边界条件，而是由于这个自然边界条件是齐次的缘故，传热问题的绝热边界条件就是如此。

总结以上两例，里兹法可归纳如下：

(1)里兹法是在给定泛函的前提下，在全区域内选择试探函数集合代入泛函，然后通过变分求极值的方法确定待定参数。试探函数的形式为：

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x) \tag{1.6}$$

式中：$y_n$ 为里兹基函数 $N_i(x)$ 的线性组合。常取 $N_i(x)$ 为线性无关的幂级数，如例题 1.4、例题 1.5 所述。

(2)里兹法试探函数只需在满足本质性边界条件的可取函数类中选取，无须考虑自然边界条件，自然边界条件会自然得到满足。

以上两点说明，里兹法试探函数的选取是很容易的，克服了微分方程求解时对边界条件要求苛刻的缺点。

(3)里兹法归结为下列线性代数方程的求解：

$$\boldsymbol{Ka} = \boldsymbol{b} \tag{1.7}$$

式中：系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 一般是对称正定的，给求解带来了很大方便。

里兹法的根本性缺点是在全区域上选取试探函数，这在工程上是很难做到的。有限单元法克服了上述缺点，将全区域划分成有限个单元，在单元上选取试探函数，使这种变分问题的直接解法变成了工程计算中的现实，所以，有限元法继承了