中学生完全攻略书系

权威·全面·速查

完全攻略

高中数学学考必备

Complete Strategies

主编◎卢银中 李百炼

◎思维解读 ◎解法归纳 ◎知识详解◎疑难突破

湖南少年儿童出版社
HUNAN JUVENILE & CHILDREN'S PUBLISHING HOUSE

中学生完全攻略书系
权威·全面·速查

完全攻略

Complete Strategies
高中数学学考必备

丛书主编◎卢银中　李百炼
本册主编◎刘建胜
编委◎刘建胜　周芝林　王　强　李千炼　李小云
刘小春　陈光华　何福华　张　旭

◎思维解读 ◎解法归纳 ◎知识详解 ◎疑难突破

湖南少年儿童出版社
HUNAN JUVENILE & CHILDREN'S PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

高中数学学考必备完全攻略 / 刘建胜编著.

—长沙：湖南少年儿童出版社，2011.7

（中学生完全攻略书系）

ISBN 978 - 7 - 5358 - 6740 - 7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 131944 号

策划编辑：徐烈军

责任编辑：陈星星　刘慧姣

质量总监：郑　瑾

出 版 人：胡　坚

出版发行：湖南少年儿童出版社

社　　址：湖南省长沙市晚报大道 89 号　邮编：410016

电　　话：0731 - 82196301（销售部）　82196313（总编室）

传　　真：0731 - 82196301（销售部）　82196330（综合管理部）

经　　销：湖南省新华书店

常年法律顾问：北京市长安律师事务所长沙分所　张晓军律师

印　　制：长沙丰华印刷厂

开　　本：787 mm×1092 mm　1/16

印　　张：29.5

版　　次：2011 年 8 月第 1 版

印　　次：2011 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：45.00 元

前言
Preface

在升学和升职竞争日趋激烈的大环境里，淘汰就是生态。当学子们担负着重荷艰难前行时，谁能想之所想、急之所急？谁能教之以良策、辅之以巨力，帮助他们以学习能手的姿态走向成功？本丛书着眼于强化学科素质，着力于应对毕业、升学考试，着手于课程的学习、巩固和过关，在课标与能力、传授与吸收、学习与检测、学考与高考之间搭建桥梁，指引津渡，让你由生手而熟手，由能手而巧手，从而轻装上阵，攻城略地，过关斩将，决胜两考。

这套“新课标完全攻略”丛书，就是为你提供全面落实新课标理念的高中课程完美攻坚方略的。它包括知识体系的网状呈现，知识点的明晰解释，典型例题的详解步骤和克难攻坚的方法技巧。编者从“学”的角度来设计“知”“能”框架，充分体现学生的认知水平和思维习惯，又以“教”的高度，由浅入深，循序渐进，及时点拨，引导学生带着工具、方法上路。它既是学生进学修业的良师益友，又是教师教学辅导的业内高参。

弄舟学海，只有找到最佳航向，才能以最短航程抵达彼岸。学习功课，只有兼顾知识基础的全面性、知识之间的相关性，才能形成综合能力，带来高质高效。本丛书从各学科特点出发，知识立意和能力立意并重，将知识点和能力点序列化，是你学习的顾问、攻坚的利器。先用知识网络引读者“入乎其内”，辅以逐项解读，领读者“渐入佳境”，然后借鉴经典例题，将解题的“通途”和“歧路”作对比分析，达到“出乎其外”。

下面就每个章节的编写思路、流程及功能分别予以说明，以资阅读、理解和运用。

知识导图 以交柯错叶、主次分明的几何图形，完美呈现各章节的知识点，连点成线，积线成面，结面成网。缩成知识的外部形貌，析出知识的内在逻辑。读图助理解，析图助识记，按图可检索，弃图可运用。

课程导航 提示高中新课程标准对本节知识点和能力点的要求，从概念到运用。

两考定位 揭示本节知识和技能在考试中的地位和考查的要求，从学考到高考。

知识解读 依据知识网络的架构，精确描述“网”上各“点”的内涵和外延，全面解读常考的重点难点，适时勾出常见易错易混点；借助来自学考、高考及其模拟考的相关题目，详细讲解涉及各能力点的命题规律和解题思路，让学习者从“知其然”到“知其所以然”。逐“点”叙述，分项剖析；借“点”发散，激活思维；随“点”设题，查杀漏缺。这就是本书独特的编写个性。这种行文风格使得本书在教辅书林中独树一帜。初学时使用它，顿生脚踏实地、步步为营之感；复习时使用它，渐悟滤去沉渣、发现新陆之妙。

Preface

疑难透视 在全面解读知识网络的基础上，深入探讨学习者在理解、运用过程中可能遇到的疑难问题，找出瓶颈，结合实例，“依乎天理，批大郤，导大窾”，逐步达到“游刃有余”的境界。对那些难倒大多数学生的“顽疾痼弊”，则应之以“组合拳”，既列举频现于学生答卷的各类失分点并予以点拨，又专门编排了识记技巧、理解法门、解题指津、难关通道等一系列颇具针对性的方法。

巩固提高 分章节选编紧扣课程导航、两考定位和知识网络的检测卷，以巩固知识基础，强化思维品质，提高实战能力，增益学习者参加学考和高考的实力和信心。除少量借鉴近几年比较成熟的学考、高考原题或改编的模拟题外，绝大部分题目为编者原创。为利于自我测评，书末附有检测卷的全部答案和中等难度以上题目的详细解析。

编者常有两难。在承继传统和与时俱进之间，不免遇到尴尬；在打造特色和面向全体方面，不免顾此失彼。欢迎方家批评指正并及时反馈。

衷心感谢果断采用本书者，更加钦佩认真使用本书者。

编　者

Complete Raiders

目录
Contents

Contents

Chapter 1

第一章
集合

1.1　集合的含义与表示

知识导图…

- 集合的含义与表示
  - 集合的含义：把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫集合
  - 集合元素的三要素
    - 确定性：能判断$x \in A$或$x \notin A$
    - 无序性：集合与组成的元素顺序无关
    - 互异性：若$a \in A$，且$b \in A$，则$a \neq b$
  - 集合的分类
    - 有穷集：集合中元素的个数是有限的
    - 无穷集：集合中元素的个数是无限的
    - 空集$\varnothing$：不含任何元素
  - 集合的表示法
    - 列举法：把集合中的元素一一列举出来
    - 描述法：把集合中元素的公共属性描述出来
    - 图示法：用一条封闭的曲线（或数轴）表示集合的方法

课程导航…

1. 了解集合的含义，会用符号“$\in$”或“$\notin$”表示元素与集合的关系.

2. 理解集合的表示法，能选择自然语言，图形语言，集合语言，描述不同的具体问题，体会集合语言的意义与作用.

3. 理解集合的特征性质，形成用集合表述数学概念、关系的简洁性的能力.

两考定位…

集合的含义与表示是两考的必考内容，主要考点有：集合相等、集合元素的性质、集合的表示法. 一般以选择题、填空题的形式出现.

知识解读…

一、元素与集合的概念

1. 集合的概念：集合是一个原始概念，不需定义，但为了更好地理解集合的概念，给集合下了一个描述性定义：即一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合（简称集）.

2. 集合常用大写的英文字母$A,B,C,\cdots$表示，元素常用小写的英文字母$a,b,c,\cdots$表示.

二、集合中元素的三大特征

集合中的元素必须具有三大特征“确定性、互异性、无序性”.

1. 确定性：任何一个对象都能确定它是不是某一集合的元素，这是集合的最基本特征. 没有确定性就不能成为集合，即对任意元素x和任意集合A，$x \in A$和$x \notin A$二者有且只有一个成立. 例如“很

知识导图
课程导航
两考定位
知识解读
疑难透视

小的数”、“个子较高的同学”都不能构成集合.

2. 互异性:集合中的任何两个元素都是不同的,即若 $a\in A$,且 $b\in A$,则 $a\neq b$. 在集合的运算中,常用元素的互异性检验所得结论是否正确.

3. 无序性:在同一集合里,通常不考虑元素之间的顺序.

例1 下列说法正确的是 ( )

A. 某班年龄较小的学生组成一个集合

B. 集合$\{1,2,3\}$与集合$\{3,1,2\}$是不同集合

C. 集合$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}$是无穷集

D. 若 $a\in A$,且 $b\in A$,则 $a\neq b$

解析:本题着重考查集合元素的“确定性、互异性、无序性”及集合的分类. A项中年龄较小的界限不明确,不满足确定性.

答案:D

例2 (2010·江西模拟)定义集合运算:$A\otimes B=\{z\mid z=x\cdot y,x\in A,y\in B\}$,$A=\{1,2\}$,$B=\{2,4\}$,则集合 $A\otimes B$ 的所有元素之和为 ( )

A. 2　　B. 4

C. 14　　D. 18

解析:因为 $z=x\cdot y$,$x\in\{1,2\}$,$y\in\{2,4\}$,所以 $x\cdot y=2,4,8$,从而 $A\otimes B=\{2,4,8\}$,故集合 $A\otimes B$的所有元素之和为 14.

答案:C

变式训练 1:已知 $x^2\in\{1,0,x\}$,求实数 x 的值.

例3 用列举法表示集合$\{x\mid x=\frac{a}{b},a\in\mathbf{Z},|a|<2,b\in\mathbf{N}_+,b\leqslant 3\}$.

解析:由 $a\in\mathbf{Z}$,且 $|a|<2$,得 a 的值为 $-1,0,1$,由 $b\in\mathbf{N}_+$,$b\leqslant 3$,得 b 的值为 $1,2,3$,所以用列举法表示该集合为:$\left\{0,-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$.

例4 (2010·浙江理数)设函数的集合 $P=\left\{f(x)=\log_2(x+a)+b\mid a=-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1;b=-1,0,1\right\}$,平面上点的集合 $Q=\left\{(x,y)\mid x=-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1;y=-1,0,1\right\}$,则在同一直角坐标系中,$P$ 中函数 $f(x)$的图象恰好经过 Q 中两个点的函数的个数是 ( )

A. 4个　　B. 6个

C. 8个　　D. 10个

解析:本题主要考查了函数的概念、定义域、值域、图象和对数函数的相关知识点,对数学素养有较高要求,体现了对能力的考察,属中档题. 当 $a=0,b=0$;$a=0,b=1$;$a=\frac{1}{2},b=0$;$a=\frac{1}{2},b=1$;$a=1,b=-1$;$a=1,b=1$ 时满足题意.

答案:B

变式训练 2:用列举法表示集合$\left\{x\mid \frac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right\}$.

三、集合的表示方法

集合的表示方法有三种,分别是列举法、描述法和图示法.

1. 列举法

将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.

使用列举法时,需注意以下几点:

(1)元素间用分隔号“,”;

(2)元素不重复;

(3)元素无顺序;

(4)对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律表述清楚后才能用省略号.

2. 描述法

把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内来表示集合的方法. 它的一般形式是$\{p\mid p$ 适合的条件$\}$.

对于描述法,不能只把注意力放在竖号“|”右边“p”适合的条件,还要对竖号“|”左边“p”的形式引起足够的重视.

3. 图示法

为了形象地表示集合,我们常常画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合.

四、元素与集合的关系

1. 属于:如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$.

2. 不属于:如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$.

3. 元素 a 与集合 A 有且仅有两种关系:$a\in A$ 或 $a\notin A$. 二者有且只有一种情形成立.

例5 (2011·福建)i 是虚数单位,若集合 $S=\{-1,0,1\}$,则 ( )

A. $\mathrm{i}\in S$　　B. $\mathrm{i}^2\in S$

C. $\mathrm{i}^3\in S$　　D. $\frac{2}{\mathrm{i}}\in S$

解析:$\mathrm{i}^2=-1$,$\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$,$\frac{2}{\mathrm{i}}=-2\mathrm{i}$.

答案:B

例6 已知 $A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$,且 $-3\in A$,求 a 的值.

解析:$\because -3\in A$,$\therefore a-2=-3$ 或 $2a^2+5a=-3$.

由 $a-2=-3$，得 $a=-1$，此时 $2a^2+5a=-3$，矛盾（舍去）.

由 $2a^2+5a=-3$，得 $2a^2+5a+3=0$，$\therefore a=-1$（舍去）或 $a=-\frac{3}{2}$ 合题意.

所以，a 的值为 $-\frac{3}{2}$.

思维点拨与方法提炼：

此类试题要注重采用分类讨论的思想处理问题，即若 $a\in A$，则 a 可能等于 A 中所有未知元素.

五、集合的分类

集合按元素的多少，通常可分为有限集、无限集、空集（用 $\varnothing$ 表示）.

1. 有限集：含有有限个元素的集合叫做有限集.

2. 无限集：含有无限个元素的集合叫做无限集.

3. 空集：不含任何元素的集合叫空集，通常记作 $\varnothing$. 特别注意，在集合的关系与运算中千万别漏了空集这种情况.

六、常用数集的符号

为了书写的方便，我们规定常见的数集用特定的字母表示，下面是几种常见的数集的表示方法.

(1)全体非负整数的集合通常简称为非负整数集（或自然数集），记作 $\mathbf{N}$；

(2)非负整数集内排除 0 的集合，也称正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$（或 $\mathbf{N}_+$）；

(3)全体整数的集合通常简称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

(4)全体有理数的集合通常简称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

(5)全体实数的集合通常简称为实数集，记作 $\mathbf{R}$；

(6)全体复数的集合通常简称为复数集，记作 $\mathbf{C}$.

疑难透视…

1. 集合元素的性质特征在解决实际问题中的应用

在解决实际问题时，要特别注重集合元素的“无序性”元素、“互异性”和“确定性”的应用，当两个集合有公共元素时，在求并集时公共元素只能算一个，“互异性”又是检验结果是否符合题意的有效途径.

2. 元素与集合的关系及集合表示法的变通在解决实际问题中的应用

用描述法表示集合时，集合中的元素必须满足描述法所表示的集合的共同属性，并能根据共同属性处理问题.

例 7 若三元素集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\}$，求 $a^{2\,011}+b^{2\,001}$ 的值.

解析：由题意知，$0\in\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$，又 $a\neq 0$，所以 $b=0$，因而 $\begin{cases}a^2=1\\a+b=a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=a\\a+b=1\end{cases}$，

由 $\begin{cases}a^2=1\\a+b=a\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$ 合题意.

由 $\begin{cases}a^2=a\\a+b=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$（舍去），

所以 $a^{2\,011}+b^{2\,001}=-1$.

思维点拨与方法提炼：

集合相等是一个非常重要的概念，概念本身好像很容易理解，但运用集合相等的概念解决问题则是本节的重点和难点，这类问题除运用分类讨论外，还要利用集合元素的三个性质（无序性、确定性、互异性）检验结论是正确与否.

例 8 由实数构成的集合 A 满足：若 $a\in A$，$a\neq 1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$.

(1)若 $2\in A$，求 A 中的另两个元素；

(2)证明：集合 A 不可能是单元素集合；

(3)证明：集合 A 至少有三个不同的元素.

解析：(1)由 $2\in A\Rightarrow\frac{1}{1-2}=-1\in A\Rightarrow\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$，

所以 A 中的另两个元素是 -1 和 $\frac{1}{2}$.

(2)假若集合 A 是单元素集合，则 $a=\frac{1}{1-a}$ 成立，而 $a=\frac{1}{1-a}$ 无解，

所以集合 A 不可能是单元素集合.

(3)由(2)知 $a=\frac{1}{1-a}$ 无解，同理 $a=\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$ 也无解，

因而若 a 是集合 A 的元素，则 a，$\frac{1}{1-a}$，$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}$ 是集合 A 中的三个不同的元素，

所以集合 A 至少有三个不同的元素.

思维点拨与方法提炼：

本题着重考查元素与集合的从属关系，综合性强，对学生的理解能力和运算能力要求都很高，特别是证明集合 A 不可能是单元素集合和 A 至少有三个不同的元素时，要转化为方程的思想来解决问题，更是此题的精妙所在.

1.2 集合间的基本关系

知识导图...

集合间的基本关系

- 子集：任意$x\in A\Rightarrow x\in B$，则称$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$）
- 真子集：若$A\subseteq B$，但存在$x\in B$，且$x\notin A$，则称$A\subsetneqq B$（或$B\supsetneqq A$）
- 相等集合：若$A\subseteq B$，且$B\supseteq A$，则称$A=B$
- 集合中子集的个数：n个元素组成的集合，其子集的个数为2^n

课程导航...

1. 理解集合的子集的概念，能区分“属于”与“包含”之间的区别.

2. 理解集合之间包含与相等的含义，探究集合之间“包含”与“相等”的区别.

3. 能正确地使用 Venn 图表示任意两(或三)个集合之间的关系.

4. 熟练区分和使用一些常用符号(含数集符号).

两考定位...

集合的含义与表示是两考的必考内容，主要考点有：求子集或真子集的个数、集合间关系的判断. 一般以选择题或填空题的形式直接考查，或与函数、方程、不等式等综合考查.

知识解读...

一、子集

1. 子集

定义：一般地，对于两个集合A、B，如果集合A中任意一个元素都是集合B的元素，就说这两个集合有包含关系，称集合A为集合B的子集，记作$A\subseteq B$(或$B\supseteq A$).

说明：“A是B的子集”的含义是：集合A中的任何一个元素都是集合B中的元素，即由$A\subseteq B$，则对任意$x\in A\Rightarrow x\in B$.

2. 真子集

定义：对于两个集合A和B，若$A\subseteq B$，但存在$x\in B$且$x\notin A$，则称集合A是集合B的真子集，记作$A\subsetneqq B$(或$B\supsetneqq A$).

说明：(1)$A\subseteq B$包括$A=B$和$A\subsetneqq B$两种情况，两者必居其一，存在$x\in B$且$x\notin A$，这说明$A\neq B$，只能$A\subsetneqq B$.

(2)要注意“$\subseteq$”与“$\subsetneqq$”的区别，虽然两者均表示集合间的包含关系，但后者是前者“$\neq$”情形时的包含关系，因此使用时要正确选择.

例 1 集合$A=\{x|0\leqslant x<3$，且$x\in\mathbf{N}\}$的真子集个数为 ( )

A. 4 个 B. 7 个

C. 8 个 D. 16 个

解析：由题意得：$A=\{0,1,2\}$，所以A的真子集个数为 7 个.

答案：B

例 2 已知集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若$B\subseteq A$，求$m$的取值范围.

解析：因为$B\subseteq A$，若$B=\varnothing$，则$m+1>2m-1\Rightarrow m<2$.

若$B\neq\varnothing$，则$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\m+1\geqslant -2\\2m-1\leqslant 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\geqslant 2\\m\geqslant -3\\m\leqslant 3\end{cases}$

$\Rightarrow 2\leqslant m\leqslant 3$.

综上得：m的取值范围是$m\leqslant 3$.

变式训练 1：满足$\{a\}\subseteq M\subsetneqq\{a,b,c,d\}$的集合$M$共有 ( )

A. 6 个 B. 7 个

C. 8 个 D. 15 个

二、集合相等

1. 定义：如果集合A是集合B的子集($A\subseteq B$)，且集合B是集合A的子集($B\subseteq A$)，则称集合

A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

2. 说明

(1)若要证明 $A=B$，只需证明 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 即可.

(2)运用集合相等解有关问题时，要注意检验，看所得结果是否符合集合中元素的三要素.

例 3 判断下列两个集合之间的关系：

(1)$A=\{x|x^2=x\}$，$B=\{0,1\}$；

(2)$A=\{x|x$ 是 8 的约数$\}$，$B=\{1,2,4,8,16\}$；

(3)$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{1\}$.

解析：本题着重考查子集与相等集合的概念，(1)$A=B$；(2)$A\subsetneqq B$；(3)$B\subsetneqq A$.

例 4 已知集合 $A=\{1,a-1,2a\}$，集合 $B=\{1,4,b\}$，且 $A=B$，求 a,b 的值.

解析：由 $A=B$ 得：$\begin{cases}a-1=4\\2a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=b\\2a=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$，此时 $a-1=1$ 矛盾，

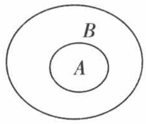
所以：$a=5$，$b=10$.

变式训练 2：设集合 $P=\{-1,a+b,ab\}$，$Q=\{0,\frac{b}{a},a-b\}$，若 $P\cup Q=P\cap Q$，则 $a-b=$______.

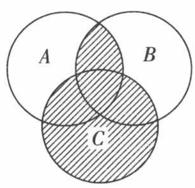
三、Venn 图

用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 Venn 图.

A 是 B 的真子集，用 Venn 图表示，如图所示.



例 5 下列表示图形中的阴影部分的是（　　）



A. $(A\cup C)\cap(B\cup C)$

B. $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

C. $(A\cup B)\cap(B\cup C)$

D. $(A\cup B)\cap C$

解析：由 Venn 图可知，应选 A.

答案：A

变式训练 3：由 10 名学生组成的野外生存训练队中，有 5 人擅长游泳，有 4 人擅长攀高，还有 3 人不具有这两项技能，现要派人到河中小岛的高树上摘野果，问有几人可派？

四、集合与集合的关系

1. 集合与集合的关系有：“$=$”，“$\subseteq$”，“$\not\subseteq$”，“$\subsetneqq$”四种.

2. 几点说明

(1)真子集必是子集，子集不一定是真子集，即 $A\subsetneqq B\Rightarrow A\subseteq B$.

(2)任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

(3)空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

空集是任何非空集合的真子集，即 $\varnothing\subsetneqq A\neq\varnothing$.

(4)对于集合 A,B,C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

对于集合 A,B,C，若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

(5)要特别注意 a 与 $\{a\}$；数 0、$\{0\}$ 与 $\varnothing$；$\{(a,b)\}$ 与 $\{a,b\}$ 等的区别.

例 6 已知集合 $A=\{x|x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=4n-3,n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=8n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 A,B,C 的关系是（　　）

A. $A\not\supseteq B\not\supseteq C$　　B. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$

C. $A=B\supsetneqq C$　　D. $A=B=C$

解析：由集合 $B=\{x|x=4(n-1)+1,n\in\mathbf{Z}\}$，可知 $A=B$. 又 $C=\{x|x=4\times2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，

$\because 2n$ 是偶数，$\therefore C\subsetneqq A$.

答案：C

例 7 若集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$ 且 $B\subsetneqq A$，求 m 的值.

解析：易知 $A=\{-3,2\}$，因 $B\subsetneqq A$，故 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-3\}$ 或 $B=\{2\}$.

(1)若 $B=\varnothing$，则 $mx+1=0$ 无解，此时 $m=0$；

(2)若 $B=\{-3\}$，则 $x=-3$ 是关于 x 的方程 $mx+1=0$ 的解，此时 $m=\frac{1}{3}$；

(3)若 $B=\{2\}$，则 $x=2$ 是关于 x 的方程 $mx+1=0$ 的解，此时 $m=-\frac{1}{2}$.

综上所述：$m=0$ 或 $m=\frac{1}{3}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

变式训练 4：若 $\varnothing\subsetneqq\{x|x^2\leqslant a,a\in\mathbf{R}\}$，求实数 a 的取值范围.

五、集合中子集的个数

1. 由 n 个元素组成的集合 A 则有

(1)A 的子集个数是 2^n；

(2)A 的真子集个数是 2^n-1；

(3) A 的非空子集个数是 2^n-1；

(4) A 的非空真子集个数是 2^n-2.

2. 设集合 A,B 分别为含有 n,m 个元素的有限集，则

(1)若 $B\subseteq C\subseteq A$，则 C 的个数是 2^{n-m}；

(2)若 $B\subseteq C\subsetneqq A$，则 C 的个数是 $2^{n-m}-1$；

(3)若 $B\subsetneqq C\subseteq A$，则 C 的个数是 $2^{n-m}-1$；

(4)若 $B\subsetneqq C\subsetneqq A$，则 C 的个数是 $2^{n-m}-2$.

例 8 集合$\{1,2,3,5\}$的所有子集有____个.

解析：由集合子集的概念知，集合$\{1,2,3,5\}$的所有子集有 16 个.

答案：16

变式训练 5：已知集合 $A\subseteq\{1,2,3\}$ 且 A 中至少含有一个奇数，则这样的集合 A 有 （ ）

A. 5 个 B. 6 个

C. 7 个 D. 8 个

疑难透视...

1. 怎样完整地理解子集的概念

$A\subseteq B$ 包括 $A\subsetneqq B$ 和 $A=B$，可类比实数 $x\leqslant y$ 包括 $x<y$ 和 $x=y$.

即 $A\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A\\ A\neq B \text{ 且 } A\subset B\end{cases}$

2. 正确区分元素与集合，集合与集合间的符号表示

3. 子集的个数

例 9 (2011·安徽)设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，则满足 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\varnothing$ 的集合 S 的个数为 （ ）

A. 57 B. 56 C. 49 D. 8

解析：本题考查集合间的基本关系，考查集合的基本运算，考查子集问题，考查组合知识，属中等难度题. 集合 A 的所有子集共有 $2^6=64$ 个，由已知 $S\cap B\neq\varnothing$，4，5，6，7 四个元素在集合 S 中至少含有一个，而不含元素 4，5，6，7 的 A 的子集有 $2^3=8$ 个，所以满足条件的集合 S 共有 56 个.

答案：B

例 10 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|2<x+1\leqslant 4\}$，$C=\{x|x^2+bx+c>0\}$，如果集合 A,B,C 满足 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，求 b,c 的值.

解析：因为 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，$A\cup B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，

由 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，

得 $C=\complement_R(A\cup B)$.

即 $C=\{x|x<-2$，或 $x>3\}$，所以 -2，3 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根.

由韦达定理得：$b=-1$，$c=-6$.

1.3 集合的基本运算

知识导图...

集合的基本运算

- 交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A, 且x\in B\}$
- 并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A, 或x\in B\}$
- 全集：包含了所研究问题范围内的一切元素
- 补集：$\complement_{B}A=\{x|x\in B，且x\notin A\}$

课程导航...

1. 掌握两个集合的交集与并集的概念，会求两个集合的交集与并集，能运用 Venn 图表示两个集合的交、并运算.

2. 了解全集的意义，体会补集的概念，理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

3. 掌握有关集合的术语和符号，并能正确地使用它们表示集合的运算.

4. 通过借助 Venn 图和具体的实例，探究、讨论集合之间交、并、补的运算规律和内在联系.

两考定位...

集合的运算是两考的必考内容，主要考点有：子集、交集、并集的基本运算和集合关系的判断. 一般以选择题和填空题的形式出现. 重点是集合的运算及集合关系的判断，在水平考试中也可能出大题.

知识解读...

一、并集

1. 并集的定义：一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B".

符号语言表达式为：$A\cup B=\{x|x\in A，或 x\in B\}$.

关于定义的理解：

(1)其中的"或"字的意义，用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的，"$x\in A$，或 $x\in B$"这一条件，包括下列三种情况：$x\in A$，但 $x\notin B$；$x\in B$，但 $x\notin A$；$x\in A$，且 $x\in B$.

(2)对于集合 A，B 中相同的元素，在 $A\cup B$ 中只能出现一次，因为要满足集合中元素的互异性.

2. 并集的运算性质

(1)$(A\cup B)\supseteq A$；$(A\cup B)\supseteq B$；

(2)$A\cup A=A$；

(3)$A\cup\varnothing=A$；

(4)$A\cup B=B\cup A$.

例 1 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\{y|y=|x|-x,x\in A\}$，求 $A\cup B$.

解析：本题着重考查并集的定义、集合元素的互异性及集合的表示法. 将集合 A 的元素一一代入 $y=|x|-x$，可得集合 $B=\{4,2,0\}$，则 $A\cup B=\{-2,-1,0,1,2,4\}$.

例 2 已知集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x|mx=1\}$，且 $A\cup B=A$，求 m 的值.

解析：由 $A\cup B=A$，得 $B\subseteq A$. 分 $B=\varnothing$ 和 $B\neq\varnothing$ 两种情况讨论：

(1)若 $B=\varnothing$，则 $m=0$，符合题意；

(2)若 $B\neq\varnothing$，则 $x=\dfrac{1}{m}$，由 $\dfrac{1}{m}\in A$，得 $m=-1$ 或 $m=1$.

综上得：m 的值为 0、-1 或 1.

变式训练 1：$A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|2a-2<x<a+2\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

二、交集

1. 交集的定义：一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B".

符号语言表达式为：$A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$.

说明：(1)A 与 B 的公共元素都在集合 $A\cap B$ 中；反过来，$A\cap B$ 的任一元素都是 A 与 B 的公共元素；

(2)并不是任意两个集合总有公共元素，当 A 与 B 没有公共元素时，$A\cap B=\varnothing$.

2. 交集的运算性质

(1)$(A\cap B)\subseteq A,(A\cap B)\subseteq B$；

(2)$A\cap A=A$；

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(4)$A\cap B=B\cap A$.

例 3 (2010·江西理数)若集合 $A=\{x||x|\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|x\geqslant 0\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\varnothing$

解析：$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y|y\geqslant 0\}$，解得 $A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$.

答案：C

例 4 已知集合 $A=\{x|x^2+ax+b=0\}$，$B=\{x|x^2+cx+15=0\}$，$A\cup B=\{3,5\}$，$A\cap B=\{3\}$，求实数 a,b,c 的值.

解析：$\because A\cap B=\{3\}$，$\therefore 9+3a+b=0$，$9+3c+15=0$，$\therefore c=-8$，$x^2-8x+15=0$，解得 $B=\{3,5\}$，$\therefore A=\{3\}$，$a^2-4b=0$，又 $\because 9+3a+b=0$，解得 $a=-6,b=9,c=-8$.

变式训练 2：设集合 $A=\{|a+1|,3,5\}$，$B=\{2a+1,a^2+2a,a^2+2a-1\}$，当 $A\cap B=\{2,3\}$ 时，求 $A\cup B$.

三、补集

1. 全集的定义：一般地，如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，记作 U.

说明：全集是相对于所研究问题而人为定义的一个相对概念，它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素. 因此，全集因研究问题的范围不同而发生变化.

2. 补集的定义：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对全集 U 的补集，记作 $\complement_U A$，$\complement_U A=\{x|x\in U,且\ x\notin A\}$.

3. 补集的运算性质

(1)$A\cup\complement_U A=U$；

(2)$A\cap\complement_U A=\varnothing$；

(3)$\complement_U(\complement_U A)=A$；

(4)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；

(5)$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

例 5 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$M=\{1,2,3\}$，$N=\{3,4,5,6\}$，求 $M\cap(\complement_U N)$.

解析：$\because \complement_U N=\{1,2,7,8\}$，$M=\{1,2,3\}$，$\therefore M\cap\complement_U N=\{1,2\}$.

例 6 已知全集 $U=\{2,0,3-a^2\}$，$P=\{2,a^2-a-2\}$，且 $\complement_U P=\{-1\}$，求实数 a 的值.

解析：$\because \complement_U P=\{-1\}$，$\therefore -1\in U$，

$\therefore 3-a^2=-1$，$\therefore a=-2$，或 $a=2$.

当 $a=-2$ 时，$P=\{2,4\}$，因为 $4\notin U$ 矛盾；

当 $a=2$ 时，$P=\{2,0\}$，符合题意，所以实数 a 的值为 2.

变式训练 3：已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$P=\{2,|2a-1|\}$，且 $\complement_U P=\{5\}$，求实数 a 的值.

四、集合的运算律

1. 交换律

$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$.

2. 结合律

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

3. 分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4. 德·摩根定律

$\complement_S(A\cap B)=\complement_S A\cup\complement_S B$，$\complement_S(A\cup B)=\complement_S A\cap\complement_S B$.

例 7 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|0<x<4\}$，$C=\{x|x<a\}$.

(1)求 $A\cap B$，$A\cup B$；

(2)求$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

(3)若 $B\subseteq A$，求 a 的取值范围.

解析：(1)$A\cap B=\{x|0<x\leqslant 3\}$，

$A\cup B=\{x|-1\leqslant x<4\}$；

(2)$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|x<-1\ 或\ x\geqslant 4\}$；

(3)若 $B\subseteq C$，则 $a\geqslant 4$.

变式训练 4：设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

五、集合中元素的个数

有限集合 A 的元素个数记作 card(A).

一般地，对任意两个有限集合 A,B，有 card$(A\cup B)=$card$(A)+$card$(B)-$card$(A\cap B)$.

当且仅当 $A\cap B=\varnothing$ 时，$\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)$.

例 8 已知集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{d,e,f,g,h\}$，则 $\text{card}(A\cup B)=$________.

解析：$\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore$ 由集合元素的性质可知 $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)=3+5=8$.

例 9 设全集 $S=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x=2a,a\in A\}$，则集合 $\complement_S(A\cup B)$ 中的元素个数为　　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

解析：因为 $A=\{1,2\}$，所以 $B=\{x\mid x=2a,a\in A\}=\{2,4\}$，则 $A\cup B=\{1,2,4\}$，

所以 $\complement_S(A\cup B)=\{3,5\}$.

答案：B

六、数形结合在集合中的应用

为了使集合的交、并、补关系直观形象地显示而利于运算，要十分重视数形结合思想的应用，本节中数形结合主要体现在用韦恩图及数轴解决有关问题.

1. 数轴的运用

利用数轴解决集合的运算问题，特别需要注意的是"端点值"的问题，是能取"等号"，还是不能取"等号"；要注意各个端点的画法：能取到端点的值时，用实心的点在数轴上表示；取不到端点的值时，用空心的圈在数轴上表示.

2. Venn 图的运用

一般集合往往借助于 Venn 图来解决，用 Venn 图讨论集合的关系，具有化抽象为具体的功能，我们要做到已知集合运算式能作出相应的 Venn 图；已知 Venn 图能写出相应的集合运算式；在运用韦恩图解题时，必须熟悉图形中各部分是如何用集合的交、并、补集表示的.

例 10 设集合 $A=\{x\mid -2<x<5\}$，$B=\{x\mid 2-t<x<2t+1,t\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap B=B$. 求 t 的取值范围.

解析：着重考查数形结合思想与分类讨论思想在集合运算中的应用，

由 $A\cap B=B$，知 $B\subseteq A$.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，$2t+1\leqslant 2-t$，得 $t\leqslant\dfrac{1}{3}$；

(2) 当 $B\neq\varnothing$ 时，则 $2t+1>2-t$ 且 $2t+1\leqslant 5$ 且 $-2\leqslant 2-t$ 结合数轴表示，得 $\dfrac{1}{3}<t\leqslant 2$.

综上所述：$t\leqslant 2$.

疑难透视…

1. 并集的元素个数：一般地，对任意三个集合 A,B,C 有

(1) $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$.

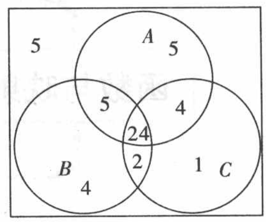
(2) $\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(A\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$.

2. 与集合有关的现实生活问题，结合 Venn 图，直观形象，可降低难度.

3. 当遇到从正面求解比较复杂、比较抽象，甚至难于找到解题思路的题型时，通常用补集思想处理.

例 11 某班有 50 人，参加学校举行的 A,B,C 三科竞赛，选 A 的有 38 人，选 B 的有 35 人，选 C 的有 31 人，兼选 A,B 的有 29 人，兼选 A,C 的有 28 人，兼选 B,C 的有 26 人，A,B,C 均选的有 24 人，问此班均未选的有多少人？

解析：设参加 A,B,C 三种竞赛的学生组成的集合分别为 A,B,C. 由题意作出它们的 Venn 图，如右图所示.



由图知均未选的有 5 人.

或用公式(2)得

$\text{card}(A\cup B\cup C)=38+35+31-29-28-26+24=45$，

所以参加竞赛的学生有 45 人，从而未参加的有 5 人.

例 12 若集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2+3x+2=0\}$，当 A 中至多有一个元素时，求 a 的取值范围.

分析：由题意可知：A 中的元素个数可能有 0 个、1 个、2 个三种情况，题意要求 A 中至多有一个元素，只包含 0 个和 1 个两种情况，此时通过构建"补集"；求 A 中只有 2 个元素的情况，然后求其补集，使问题得到间接解决.

解析：假设 A 中有 2 个元素，即方程 $ax^2+3x+2=0$ 有两个不等实根，

则 $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=9-8a>0\end{cases}$，解得：$a<\dfrac{9}{8}$，且 $a\neq 0$，此时 a 的取值范围是 $\left\{a\mid a<\dfrac{9}{8}，且\ a\neq 0\right\}$.

其补集为：$\left\{a\mid a=0\ 或\ a\geqslant\dfrac{9}{8}\right\}$，即为所求的 a 的取值范围.

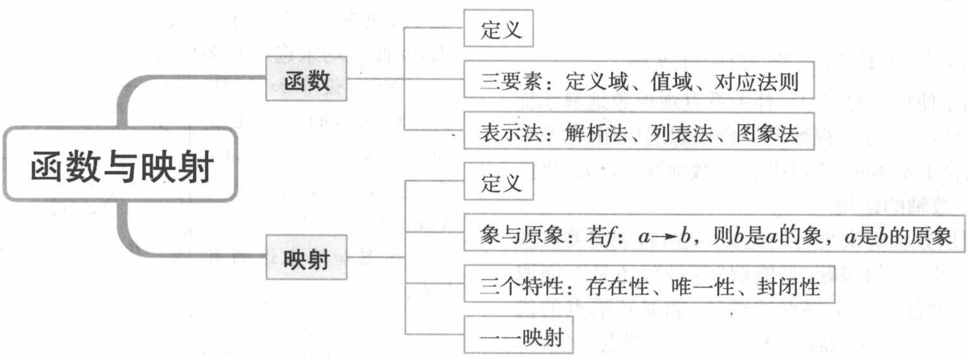
知识导图
课程导航
两考定位
知识解读
疑难透视

Chapter 2

第二章
函数概念与基本初等函数(Ⅰ)

2.1 函数与映射

知识导图...



课程导航...

1. 理解函数的概念,掌握函数的三要素,会用三种方法表示函数.

2. 了解映射、一一映射的概念,体会映射的三个特性.

3. 掌握一些简单函数的定义域、值域的求法.初步掌握换元法的简单应用.

4. 了解分段函数及复合函数的概念.

两考定位...

函数与映射的有关知识是两考的必考内容,主要考点有:求函数的解析式;分段函数的求值;函数图象的应用.一般以选择题和填空题的形式出现,难度不大.

知识解读...

一、函数的定义

1. 传统定义:在某一个变化过程中有两个变量 x 和 y,如果对于在某一个范围内的任一个 x 的值,都有唯一的 y 的值与它对应,则称 y 是 x 的函数,x 叫自变量,y 叫因变量.

2. 现代定义:设 A,B 是两个非空数集,如果按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个数 x,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作 $y=f(x)(x\in A)$.其中 x 叫做自变量,x 的取值集合 A 叫做函数的定义域;与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域.

3. 对函数概念的理解

(1)A,B 都是非空数集,因此定义域(或值域)为空集的函数不存在.

(2)在现代定义中,B 不一定是函数的值域,如函数 $y=x^2+1$ 可称为实数集到实数集的函数.

(3)对应关系、定义域、值域是函数的三要素,缺一不可.其中对应关系是核心,定义域是根本,当定义域和对应关系已确定,则值域也就确定了.