华师优等生 优

优等生数学

第二版

余红兵◎编著

如果说“奥数”是提供给4%的优等生

那么本书是提供给20%的优等生

如果你已经是优等生，不妨一读

如果你想成为优等生，不能不读

华东师范大学出版社

九年级

优等生数学

第二版

余红兵◎编著

九年级

★ 经典例题

★ 解题策略

★ 画龙点睛

★ 举一反三

★ 融会贯通

华东师范大学出版社

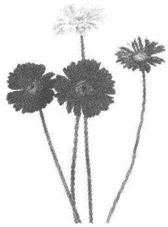
图书在版编目(CIP)数据

优等生数学. 九年级/余红兵编著. —上海：华东师范大学出版社，2007. 6

ISBN 978 - 7 - 5617 - 5388 - 0

Ⅰ. 优…　Ⅱ. 余…　Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 068940 号



优等生数学（九年级）

编　　著　余红兵
封面题辞　王　元
策划组稿　倪　明　孔令志
项目编辑　孔令志
审读编辑　徐慧平
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www. ecnupress. com. cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购)电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup. taobao. com/

印 刷 者　江苏常熟文化印刷有限公司
开　　本　720 × 965　16 开
插　　页　1
印　　张　14. 5
字　　数　229 千字
版　　次　2011 年 6 月第二版
印　　次　2011 年 6 月第四次
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5617 - 5388 - 0/G · 3164
定　　价　24. 00 元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话 021 - 62865537 联系）

使用指南

如果说“奥数”是提供给4%的优等生
那么本书是提供给20%的优等生
如果你已经是优等生，不妨读一读
如果你想成为优等生，不能不读

如果你是一名教师，你可以根据学生的学习情况、教学的进度以及课时安排等来安排本书相关内容的使用.

如果你是一名学生，或是一名学生家长，我们有如下建议：

学到哪，看到哪 虽然现在教材的版本很多，但除了知识点安排的先后顺序之外，其内含的知识是相同的，所以你可以根据所学到的知识内容，挑选相关章节进行学习.

看一看，练一练 对于每一讲中的五个板块，你可以根据自己的时间合理安排，如果时间充裕，你可以看完“经典例题”，再完成“举一反三”和“融会贯通”；你也可以先做习题，遇到困难时再看例题，理解解题的思路与方法.一切都由你自己决定.

先看易，后看难 由于知识点之间肯定会有难易的差别，所以书中难免出现前面的内容比后面的内容难的情况，你可以根据自己的学习程度，按先易后难的顺序有选择地进行阅读.

有兴趣，最重要 兴趣是促进学习的最佳动力，兴趣可以使得学习变得

事半功倍.只要你有兴趣,只要你学有余力,你可以挑有兴趣的先看,那收获一定更大.

寒暑假,好时机 也许你平时的学习很忙,除了完成学校的功课以外无暇顾及其他参考书,这本书在寒暑假时使用是一个极好的选择.因为对平时学过的内容再学是一个提高的过程,这本书是同步基础上的提高,恰好满足你的要求.

本书的作者均是数学解题高手,只要你能够有效、合理地使用本套《优等生数学》,那么你一定能学到很多解题的高招,可以又好又快地提高你的数学成绩.

祝贺你成为数学优等生!

序

如今，家长对子女的教育非常关注，希望他们在学习上成为优胜者，成为优等生.

所谓的优等生，既有绝对性，又有相对性. 儿童们在共同学习过程中，自然有差异，学习成绩有高低之分. 但就中小学数学而言，只要有浓厚的兴趣、认真的学习态度和科学的学习方法，多数孩子能取得优良的数学成绩.

数学成绩不够理想而又喜欢数学的孩子，希望找到提高的途径；数学成绩优良的孩子，又会感到一般的课程内容吃不饱，希望学得更深入一些.《优等生数学》这套书，可以帮助这部分孩子实现他们的心愿.

由朱华伟、熊斌、余红兵等编写的这套书，以中小学数学教学内容为依托，立足于学生基础知识进行拓展；以数学新课标为准绳，着眼于培养学生灵活运用知识的能力；以思维训练为核心，着重于培养学生的自主探究能力.

该书设计有很好的栏目：

“经典例题” 新颖独特，覆盖面广，趣味性强，具有代表性，有启迪作用；

“解题策略” 深入浅出，通俗易懂，情景生动，引人入胜，如循循善诱的老师上课；

“画龙点睛” 清晰的思路与诗情画意的标题融为一体，言简意赅地揭示解题的奥秘；

“举一反三” 提供了有层次性、发展性的题目，让学生在探索中有一种

“出乎预料之外，在乎情理之中”的感觉；

“融会贯通” 摘选了近几年国内外有关考试（包括数学竞赛）中的一些优秀试题和作者自编的一些题目，这些题目有一定的综合性和难度，可以帮助学生开阔视野，拓展思维.

这套书的例题和习题，难度不算大，题量不算多，如能认真对待每一道题，把每一道题目弄懂弄通，数学素质会有明显的提高. 如果课余时间不多，在家长指导下品尝一些，也能开眼界，扩思路，提高对数学的兴趣.

愿更多的学生喜欢数学，取得优良的成绩.

张景中

2007 年 5 月 29 日

张景中：著名数学家，中国科学院院士，中国教育数学学会名誉理事长，中国科普作家协会名誉理事长.

目　录

1 平方根的概念

如果一个数的平方等于数 a，那么这个数就称为 a 的一个平方根.很明显，这里的 a 必须是非负数.若 $a>0$，则 a 有两个平方根，记作 $\pm\sqrt{a}$，其中正的平方根 $\sqrt{a}$，称为 a 的算术平方根.数 0 只有一个平方根，就是 0.

经典例题

若 $3a-1$ 与 $2a-4$ 是同一个数的平方根，求这个数.

解题策略

记所求的数为 x.有两种情况：

若 $3a-1=2a-4$，则 $a=-3$，从而 $3a-1=-10$.故由平方根的定义知，

$$x=(-10)^2=100.$$

若 $3a-1$ 与 $2a-4$ 不相等，即这两个数是 x 的两个不同的平方根，则 $3a-1$ 与 $2a-4$ 为互相反数，故有

$$(3a-1)+(2a-4)=0,$$

解得 $a=1$，所以 $3a-1=2$，故 $x=2^2=4$.

因此所求的数是 4 或 100.

画龙点睛

1. 若一个数有平方根，则要么平方根是零，要么有两个平方根，且互为相反数.

2. 本题中不要忽略了 $3a-1$ 与 $2a-4$ 相等这一情况.

举一反三

1. 对于任何数 a，下面的数中必定有平方根的是(　　).

(A) $a+1$　　　　(B) a^2+5a

(C) a^2+6a+1　　　　(D) a^2+4a+6

2. 若$\sqrt{2}-1$是$a-2\sqrt{2}$的一个平方根，则$a=$________.

3. 已知$2x-1$的平方根为±3，$3x+y-1$的平方根为±4，求$x+2y$的算术平方根.

融会贯通

4. 已知$\sqrt{a-2}+\sqrt{b^2-9}=0$，求$a+b$的值.

2 二次根式的概念

解决涉及二次根式的问题，必须紧紧抓住二次根式的概念和基本性质.

经典例题

若 a 满足 $(\sqrt{a-1})^2+\sqrt{(a-1)^2}=4$，求 a.

解题策略

$\sqrt{a-1}$ 是 $a-1$ 的算术平方根，故必有 $a-1\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$. 由定义知

$$(\sqrt{a-1})^2=a-1 \quad (a\geqslant 1).$$

注意 $(a-1)^2\geqslant 0$，$\sqrt{(a-1)^2}$ 是 $(a-1)^2$ 的算术平方根，它是非负的，故 $\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=a-1$（因上面已得到了 $a\geqslant 1$）.

因此问题中的等式即为

$$(a-1)+(a-1)=4 \quad (a\geqslant 1),$$

解得 $a=3$. 因 $3>1$，故 $a=3$ 是所求的解.

画龙点睛

所涉及的二次根式必须有意义，是很多此类问题中的“隐含条件”，切莫忽视.

举一反三

1. 要使得 $\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}$ 有意义，则 x 的取值范围是________.

2. 设 x、y 满足 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-4}+1}{x+2}$，求 $\sqrt{x+y}$.

3. 设 a 和 x 满足

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+3(\sqrt{1-x})^2-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=a,$$

试确定 a 的取值范围.

融会贯通

4. 设 a、b、c 满足 $a+b+c+3=2(\sqrt{a}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c+1})$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

3 分母有理化

分母有理化，是化简根式及根式运算中最为基本的一步.

经典例题

将$\dfrac{a+1}{1-a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}}$分母有理化.

解题策略

问题中的二次根式隐含着$-\dfrac{1}{a}>0$，即$a<0$.

首先将$\sqrt{-\dfrac{1}{a}}$分母有理化，我们有

$$\sqrt{-\frac{1}{a}}=\sqrt{-\frac{a}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{-a}=-\frac{\sqrt{-a}}{a}\quad（注意\ a<0），$$

因此问题中的分式化为$\dfrac{a+1}{1+\sqrt{-a}}$. 为了将此分式分母有理化，我们注意，$1+\sqrt{-a}$的有理化因子是$1-\sqrt{-a}$. 当$1-\sqrt{-a}\neq 0$时，我们用$1-\sqrt{-a}$同乘上述分式的分子、分母得

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}}&=\frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{(1+\sqrt{-a})(1-\sqrt{-a})}\\&=\frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{1-(\sqrt{-a})^2}\\&=\frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{1+a}\\&=1-\sqrt{-a},\end{aligned}$$

当 $1-\sqrt{-a}=0$ 即 $a=-1$ 时，$\dfrac{a+1}{1+\sqrt{-a}}=\dfrac{-1+1}{2}=0$，这也等于 $1-\sqrt{-a}$.

合并上面两种情况的结果可知

$$\frac{a+1}{1-a\sqrt{-\frac{1}{a}}}=1-\sqrt{-a}.$$

也可采用下面的方法：将$\dfrac{a+1}{1+\sqrt{-a}}$的分子用平方差公式拆开(避免了分两种情况处理)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}}&=\frac{1-(-a)}{1+\sqrt{-a}}=\frac{1^2-(\sqrt{-a})^2}{1+\sqrt{-a}}\\&=\frac{(1-\sqrt{-a})(1+\sqrt{-a})}{1+\sqrt{-a}}\\&=1-\sqrt{-a}.\end{aligned}$$

画龙点睛

1. 将形如$\sqrt{\dfrac{u}{v}}$(这里 $uv\geqslant 0$，$v\neq 0$)的根式分母有理化，应注意算术平方根的意义：$\sqrt{\dfrac{u}{v}}=\sqrt{\dfrac{uv}{v^2}}=\dfrac{1}{|v|}\sqrt{uv}$.

2. 将形如$\dfrac{1}{u+\sqrt{v}}$(这里 $u\neq 0$，$v\geqslant 0$)的根式分母有理化，应注意(分母的)有理化因子 $u-\sqrt{v}$是否可能为零，必要时需分情况分别处理.

3. 有时，利用 $u\geqslant 0$ 时有 $u=(\sqrt{u})^2$，及平方差公式，处理更为直接.

举一反三

1. 化简 $ab\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$.

2. 化简 $\dfrac{x^2-xy}{x+\sqrt{xy}}$.

3. 化简 $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$.

融会贯通

4. 设 $\sqrt{x}=\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$,化简 $\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$.