



优等生数学



第二版

余红兵◎编著

如果说“奥数”是提供给4%的优等生
那么本书是提供给20%的优等生
如果你已经是优等生,不妨一读
如果你想成为优等生,不能不读

 华东师范大学出版社

九年级



YZLI0890151399



优等生数学

第二版

余红兵◎编著

九年级



- ★ 经典例题
- ★ 解题策略
- ★ 画龙点睛
- ★ 举一反三
- ★ 融会贯通



YZLI0890161399



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

优等生数学. 九年级/余红兵编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2007. 6

ISBN 978 - 7 - 5617 - 5388 - 0

I. 优… II. 余… III. 数学课—初中—教学参考资料
IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 068940 号



优等生数学 (九年级)

编 著 余红兵
封面题辞 王 元
策划组稿 倪 明 孔令志
项目编辑 孔令志
审读编辑 徐慧平
封面设计 卢晓红
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://ecnup.taobao.com/>

印 刷 者 江苏常熟文化印刷有限公司
开 本 720×965 16 开
插 页 1
印 张 14.5
字 数 229 千字
版 次 2011 年 6 月第二版
印 次 2011 年 6 月第四次
书 号 ISBN 978 - 7 - 5617 - 5388 - 0/G · 3164
定 价 24.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

使用指南

如果说“奥数”是提供给 4% 的优等生
那么本书是提供给 20% 的优等生
如果你已经是优等生,不妨读一读
如果你想成为优等生,不能不读

如果你是一名教师,你可以根据学生的学习情况、教学的进度以及课时安排等来安排本书相关内容的使用。

如果你是一名学生,或是一名学生家长,我们有如下建议:

学到哪,看到哪 虽然现在教材的版本很多,但除了知识点安排的先后顺序之外,其内含的知识是相同的,所以 you 可以根据所学到的知识内容,挑选相关章节进行学习。

看一看,练一练 对于每一讲中的五个板块,你可以根据自己的时间合理安排,如果时间充裕,你可以看完“经典例题”,再完成“举一反三”和“融会贯通”;你也可以先做习题,遇到困难时再看例题,理解解题的思路与方法。一切都由你自己决定。

先看易,后看难 由于知识点之间肯定会有难易的差别,所以书中难免出现前面的内容比后面的内容难的情况,你可以根据自己的学习程度,按先易后难的顺序有选择地进行阅读。

有兴趣,最重要 兴趣是促进学习的最佳动力,兴趣可以使得学习变得

事半功倍. 只要你有兴趣, 只要你学有余力, 你可以挑有兴趣的先看, 那收获一定更大.

寒暑假, 好时机 也许你平时的学习很忙, 除了完成学校的功课以外无暇顾及其他参考书, 这本书在寒暑假时使用是一个极好的选择. 因为对平时学过的内容再学是一个提高的过程, 这本书是同步基础上的提高, 恰好满足你的要求.

本书的作者均是数学解题高手, 只要你能够有效、合理地使用本套《优生数学》, 那么你一定能够学到很多解题的高招, 可以又好又快地提高你的数学成绩.

祝贺你成为数学优生!

序

如今,家长对子女的教育非常关注,希望他们在学习上成为优胜者,成为优生。

所谓的优生,既有绝对性,又有相对性。儿童们在共同学习过程中,自然有差异,学习成绩有高低之分。但就中小学数学而言,只要有浓厚的兴趣、认真的学习态度和科学的学习方法,多数孩子能取得优良的数学成绩。

数学成绩不够理想而又喜欢数学的孩子,希望找到提高的途径;数学成绩优良的孩子,又会感到一般的课程内容吃不饱,希望学得更深入一些。《优生数学》这套书,可以帮助这部分孩子实现他们的心愿。

由朱华伟、熊斌、余红兵等编写的这套书,以中小学数学教学内容为依托,立足于学生基础知识进行拓展;以数学新课标为准绳,着眼于培养学生灵活运用知识的能力;以思维训练为核心,着重于培养学生的自主探究能力。

该书设计有很好的栏目:

“经典例题” 新颖独特,覆盖面广,趣味性强,具有代表性,有启迪作用;

“解题策略” 深入浅出,通俗易懂,情景生动,引人入胜,如循循善诱的老师上课;

“画龙点睛” 清晰的思路与诗情画意的标题融为一体,言简意赅地揭示解题的奥秘;

“举一反三” 提供了有层次性、发展性的题目,让学生在探索中有一种

“出乎预料之外，在乎情理之中”的感觉；

“融会贯通” 摘选了近几年国内外有关考试(包括数学竞赛)中的一些优秀试题和作者自编的一些题目,这些题目有一定的综合性和难度,可以帮助学生开阔视野,拓展思维.

这套书的例题和习题,难度不算大,题量不算多,如能认真对待每一道题,把每一道题目弄懂弄通,数学素质会有明显的提高.如果课余时间不多,在家长指导下品尝一些,也能开眼界,扩思路,提高对数学的兴趣.

愿更多的学生喜欢数学,取得优良的成绩.

张景中

2007年5月29日

张景中：著名数学家，中国科学院院士，中国教育数学学会名誉理事长，中国科普作家协会名誉理事长。



- 第二十一章 二次根式 /1
 - 1 平方根的概念 /1
 - 2 二次根式的概念 /3
 - 3 分母有理化 /5
 - 4 二次根式的化简与求值 /8
- 第二十二章 一元二次方程 /10
 - 5 一元二次方程的概念 /10
 - 6 一元二次方程的解 /12
 - 7 一元二次方程的解法 /14
 - 8 可化为一元二次方程的方程 /17
 - 9 一元二次方程的判别式 /19
 - 10 根与系数的关系(一) /21
 - 11 根与系数的关系(二) /24
 - 12 一元二次方程的应用 /27
- 第二十三章 旋转 /29
 - 13 旋转 /29
 - 14 旋转帮助解题 /32
 - 15 中心对称 /34
 - 16 中心对称帮助解题 /37
 - 17 关于原点对称的点的坐标 /39
- 第二十四章 圆 /41
 - 18 圆心角、圆弧和弦 /41
 - 19 垂径定理 /44
 - 20 圆周角 /46

- 21 直径所对的圆周角 /48
- 22 圆内接四边形 /50
- 23 点与圆的位置关系 /52
- 24 直线与圆的位置关系 /54
- 25 切线的判定 /56
- 26 切线的性质 /59
- 27 三角形的内切圆 /62
- 28 弦切角 /65
- 29 两圆的位置关系 /68
- 30 圆中的计算问题 /71
- 31 圆锥、圆柱的侧面积和全面积 /74

第二十五章 概率初步 /77

- 32 概率的计算 /77
- 33 概率的简单应用 /79

第二十六章 二次函数 /82

- 34 二次函数的概念 /82
- 35 二次函数的图象(一) /85
- 36 二次函数的图象(二) /88
- 37 二次函数图象的平移 /91
- 38 二次函数的最大值与最小值 /94
- 39 二次函数与一元二次方程 /97
- 40 二次函数解析式的确定(一) /101
- 41 二次函数解析式的确定(二) /104
- 42 二次函数与应用问题(一) /106
- 43 二次函数与应用问题(二) /109

第二十七章 相似 /112

- 44 比例及其性质 /112
- 45 平行线分线段成比例 /115
- 46 三角形的相似与平行线 /118
- 47 三角形相似的判定(一) /121
- 48 三角形相似的判定(二) /124

49 直角三角形的相似 /127

50 相似三角形的性质 /130

51 位似 /133

第二十八章 锐角三角函数 /135

52 锐角三角函数 /135

53 求三角函数值 /137

54 三角函数之间的关系 /140

55 三角函数值的变化规律 /143

56 解直角三角形 /145

57 解斜三角形 /148

58 解直角三角形的应用 /151

第二十九章 视图和投影 /154

59 三视图 /154

60 展开图 /157

第三十章 综合题 /160

61 运动、面积与函数 /160

62 运动、相遇及图象 /163

63 直线、双曲线和三角形 /165

64 面积、相似与函数 /167

65 对称、抛物线和平行四边形 /170

66 二次函数、二次方程和三角形 /172

67 直线、圆和抛物线 /175

68 运动、直线和圆 /178

69 抛物线、直线和比例线段 /181

70 三角形、动点和轨迹 /183

参考答案 /186

1

平方根的概念

如果一个数的平方等于数 a , 那么这个数就称为 a 的一个平方根. 很明显, 这里的 a 必须是非负数. 若 $a > 0$, 则 a 有两个平方根, 记作 $\pm\sqrt{a}$, 其中正的平方根 $\sqrt{a}$, 称为 a 的算术平方根. 数 0 只有一个平方根, 就是 0.



经典例题

若 $3a-1$ 与 $2a-4$ 是同一个数的平方根, 求这个数.



解题策略

记所求的数为 x . 有两种情况:

若 $3a-1 = 2a-4$, 则 $a = -3$, 从而 $3a-1 = -10$. 故由平方根的定义知,

$$x = (-10)^2 = 100.$$

若 $3a-1$ 与 $2a-4$ 不相等, 即这两个数是 x 的两个不同的平方根, 则 $3a-1$ 与 $2a-4$ 为相反数, 故有

$$(3a-1) + (2a-4) = 0,$$

解得 $a = 1$, 所以 $3a-1 = 2$, 故 $x = 2^2 = 4$.

因此所求的数是 4 或 100.



画龙点睛

1. 若一个数有平方根, 则要么平方根是零, 要么有两个平方根, 且互为相反数.

2. 本题中不要忽略了 $3a-1$ 与 $2a-4$ 相等这一情况.



举一反三

1. 对于任何数 a , 下面的数中必定有平方根的是().

(A) $a+1$

(B) a^2+5a

(C) a^2+6a+1

(D) a^2+4a+6

2. 若 $\sqrt{2}-1$ 是 $a-2\sqrt{2}$ 的一个平方根, 则 $a=$ _____.

3. 已知 $2x-1$ 的平方根为 ± 3 , $3x+y-1$ 的平方根为 ± 4 , 求 $x+2y$ 的算术平方根.



融会贯通

4. 已知 $\sqrt{a-2} + \sqrt{b^2-9} = 0$, 求 $a+b$ 的值.



解决涉及二次根式的问题,必须紧紧抓住二次根式的概念和基本性质.



经典例题

若 a 满足 $(\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(a-1)^2} = 4$, 求 a .



解题策略

$\sqrt{a-1}$ 是 $a-1$ 的算术平方根,故必有 $a-1 \geq 0$,即 $a \geq 1$. 由定义知

$$(\sqrt{a-1})^2 = a-1 \quad (a \geq 1).$$

注意 $(a-1)^2 \geq 0$, $\sqrt{(a-1)^2}$ 是 $(a-1)^2$ 的算术平方根,它是非负的,故 $\sqrt{(a-1)^2} = |a-1| = a-1$ (因上面已得到了 $a \geq 1$).

因此问题中的等式即为

$$(a-1) + (a-1) = 4 \quad (a \geq 1),$$

解得 $a = 3$. 因 $3 > 1$,故 $a = 3$ 是所求的解.



画龙点睛

所涉及的二次根式必须有意义,是很多此类问题中的“隐含条件”,切莫忽视.



举一反三

1. 要使得 $\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}$ 有意义,则 x 的取值范围是_____.

2. 设 x, y 满足 $y = \frac{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-4} + 1}{x+2}$, 求 $\sqrt{x+y}$.

3. 设 a 和 x 满足

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 3(\sqrt{1-x})^2 - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2 = a,$$

试确定 a 的取值范围.



融会贯通

4. 设 a, b, c 满足 $a+b+c+3 = 2(\sqrt{a} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c+1})$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值.



3

分母有理化

分母有理化,是化简根式及根式运算中最为基本的一步.



经典例题

将 $\frac{a+1}{1-a\sqrt{-\frac{1}{a}}}$ 分母有理化.



解题策略

问题中的二次根式隐含着 $-\frac{1}{a} > 0$, 即 $a < 0$.

首先将 $\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 分母有理化, 我们有

$$\sqrt{-\frac{1}{a}} = \sqrt{-\frac{a}{a^2}} = \frac{1}{|a|} \sqrt{-a} = -\frac{\sqrt{-a}}{a} \quad (\text{注意 } a < 0),$$

因此问题中的分式化为 $\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}}$. 为了将此分式分母有理化, 我们注意, $1+\sqrt{-a}$

$\sqrt{-a}$ 的有理化因子是 $1-\sqrt{-a}$. 当 $1-\sqrt{-a} \neq 0$ 时, 我们用 $1-\sqrt{-a}$ 同乘上述分式的分子、分母得

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{1+\sqrt{-a}} &= \frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{(1+\sqrt{-a})(1-\sqrt{-a})} \\ &= \frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{1-(\sqrt{-a})^2} \\ &= \frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{1+a} \\ &= 1-\sqrt{-a}, \end{aligned}$$

当 $1 - \sqrt{-a} = 0$ 即 $a = -1$ 时, $\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}} = \frac{-1+1}{2} = 0$, 这也等于 $1 - \sqrt{-a}$.

合并上面两种情况的结果可知

$$\frac{a+1}{1-a\sqrt{-\frac{1}{a}}} = 1 - \sqrt{-a}.$$

也可采用下面的方法: 将 $\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}}$ 的分子用平方差公式拆开(避免了分两种情况处理), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{1+\sqrt{-a}} &= \frac{1-(-a)}{1+\sqrt{-a}} = \frac{1^2 - (\sqrt{-a})^2}{1+\sqrt{-a}} \\ &= \frac{(1-\sqrt{-a})(1+\sqrt{-a})}{1+\sqrt{-a}} \\ &= 1 - \sqrt{-a}. \end{aligned}$$



画龙点睛

1. 将形如 $\sqrt{\frac{u}{v}}$ (这里 $uv \geq 0, v \neq 0$) 的根式分母有理化, 应注意算术平方根的意义: $\sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{\frac{uv}{v^2}} = \frac{1}{|v|} \sqrt{uv}$.

2. 将形如 $\frac{1}{u+\sqrt{v}}$ (这里 $u \neq 0, v \geq 0$) 的根式分母有理化, 应注意(分母的)有理化因子 $u-\sqrt{v}$ 是否可能为零, 必要时需分情况分别处理.

3. 有时, 利用 $u \geq 0$ 时有 $u = (\sqrt{u})^2$, 及平方差公式, 处理更为直接.



举一反三

1. 化简 $ab\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$.

2. 化简 $\frac{x^2 - xy}{x + \sqrt{xy}}$.

3. 化简 $\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$.



融会贯通

4. 设 $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$, 化简 $\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$.