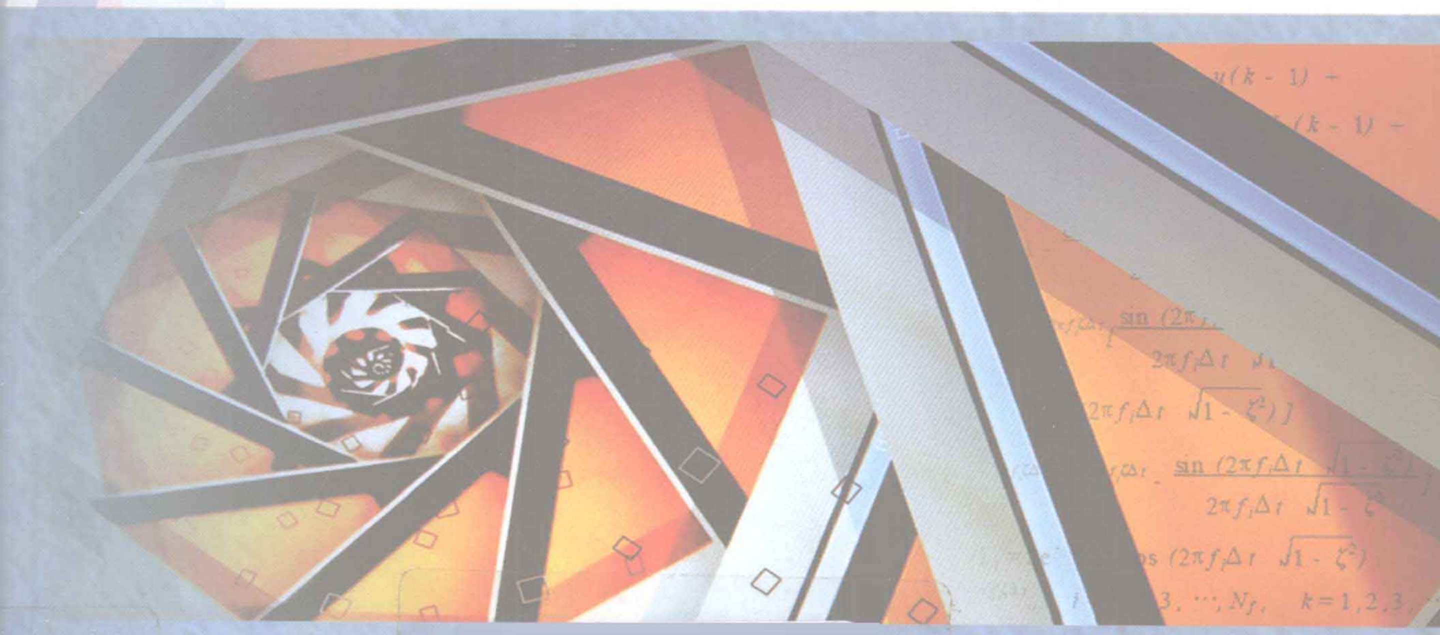
面向"十二五"高职高专规划教材·基础系列

高职高专数学学习指导

主　编　柳　毅　李晓春

副主编　赵珈琦　田丽霞　郑　琦



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

面向"十二五"高职高专规划教材·基础系列

高职高专数学学习指导

柳 毅 李晓春 主 编

赵珈崎 田丽霞 郑 琦 副主编

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高职高专数学学习指导/柳毅,李晓春主编. —北京:北京理工大学出版社,2010.7

ISBN 978-7-5640-3234-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①柳… ②李… Ⅲ.①高等数学-高等学校:技术学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第100613号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/涿州市新华印刷有限公司
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/10.25
字　　数/237千字
版　　次/2010年7月第1版　2010年7月第1次印刷
印　　数/1~4000册　　责任校对/陈玉梅
定　　价/22.00元　　责任印制/边心超

前　　言

《高职高专数学学习指导》是普通高等教育“十五”国家级规划教材《高等数学（第三版）》的配套辅助教材。

《高职高专数学学习指导》是为了适应高职高专教育培养生产、建设、管理、服务需要的应用型人才要求，在认真总结各相关高职高专院校教学教改经验，积累了多年教学实践经验基础上完成的，是一部能较好地满足高职高专数学教学需要的配套辅助教材。

本书由吉林铁道职业技术学院的柳毅、李晓春老师任主编，吉林铁道职业技术学院的赵珈崎、田丽霞以及吉化实验学校郑琦老师为副主编。在编写过程中，作者始终以教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”为依据，根据课程内容，按章节提出基本要求，归纳出重点、难点。同时对于初学者学习过程中容易出现的共性问题做出回答。

我们认为，在高职高专数学教学过程中培养学生动手实践能力的有效方法之一是锻炼学生做题的能力。对于大部分初学者来说，在较短的时间内形成这种能力困难很大。在本书中，作者对高职高专教材中的典型问题均做出了解答，答案详细、准确，为学生的学习和教师的教学提供了很好的思路、线索和方法，可以帮助读者少走弯路，更快、更好地掌握这门课程。解题的思路和方法是多样的，建议读者不要因为提示而束缚了自己的思路。我们赞成刻苦钻研，独立思考，方法不拘一格，这样才能起到对课程内容加深理解和灵活运用的作用。

尽管我们在编写及选题方面做出了许多努力，但由于时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请谅解！本书在编写过程中得到了许多同行的支持和协助，在此表示衷心的感谢！

编　者

目　　录

第一章 函 数

一、基本要求

1. 理解函数的概念，了解分段函数、复合函数的概念．
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性．
3. 熟悉基本初等函数的定义与图形．
4. 会建立简单实际问题的数学模型．

二、重点

函数的定义、基本初等函数和初等函数的概念．

三、难点

分段函数的概念，建立应用问题的函数模型．

四、问题解答

1. 函数定义的主要特征是什么?

答: 如果自变量 x 在允许范围 X 内任取一个数值时，变量 y 按一定的规则总有确定的数值与它对应时，则称 y 是 x 的函数，常记为 $y=f(x)$．这个定义的关键特征是: ① x 的取值范围，即函数的定义域．② 对应规则，即函数的依赖关系．可以说函数概念有两个基本要素: 定义域、对应规则．

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才能认为它们是同一个函数．

2. 函数对应规则的形式有几种?

答: 有 5 种．

(1) 如果函数对应规则形式是解析表达式 $y=f(x)$,

可称函数为显式表示，又称 y 为 x 的显函数．

(2) 如果函数对应规则形式是方程 $F(x, y)=0$,

则可称 y 为 x 的隐函数．

(3) 如果函数对应规则是由几个解析表达式表示的，如

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$$ 则称$f(x)$为分段函数．它是定义域为$\mathbf{R}$的一个函数，是由三个解析式来表达的．

（4）如果x与y通过第三个变量而联系起来，如

$$\begin{cases}x=\varphi(x)\\ y=f(x)\end{cases}$$ 则这种函数关系为参数方程表示的函数．

（5）如果对应规则是由表格或图形表示出来，那么常称这种表示为函数的表格表示法或图形表示法．

3. 研究函数的单调性、有界性是否能离开自变量的范围？

答：不能，例如$y=x^2$在$x<0$时为单调减少函数；在$x>0$时为单调增加函数，在$(-\infty,+\infty)$内为非单调函数．

同样，$y=x^2$在开区间$(0,1)$内为有界函数；而在定义域$(-\infty,+\infty)$内为无界函数．

如果函数$y=f(x)$为单调函数或者有界函数，而没有指明其自变量x的取值范围时，通常理解该函数在定义域内是单调函数，或者在定义域内是有界函数．

第一章 习题解答

第4页习题

1. 设 $A=\{-1, 2, 4, 9, 10\}$, $B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 求: $A\cap B$, $A\cup B$.

解: $A\cap B=\{-1, 2, 4\}$, $A\cup B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 9, 10\}$.

2. 设 $A=\{x|x\geqslant 0\}$, $B=\{x|x<5\}$, 求: $A\cap B$, $A\cup B$.

解: $A\cap B=\{x|0\leqslant x<5\}=[0, 5)$;

$A\cup B=\{x|x$ 是实数$\}=(-\infty, +\infty)$.

3. 设全集 $\mathbf{Z}$ 为所有整数的集合, $\mathbf{N}$ 为所有自然数的集合, 即

$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$, 求 $\mathbf{N}$ 的补集, 即$\overline{\mathbf{N}}$.

解: $\overline{\mathbf{N}}=\{-1, -2, -3, \cdots\}$.

4. 写出集合 $A=\{1, 2, 0\}$ 的所有子集.

解: ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0\}$, $\{2, 0\}$, $\{1, 0\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 0\}$共计8个.

5. 解不等式$|x|>|x+1|$.

解: 令$|x|=0\Rightarrow x=0$; 令$|x+1|=0\Rightarrow x=-1$.

$x<-1$ 时, $|x|=-x$; $|x+1|=-(x+1)=-x-1$.

于是, 由$|x|>|x+1|\Rightarrow -x>-(x+1)\Rightarrow x<x+1\Rightarrow 0<1$.

故 $x<-1$ 时, $|x|>|x+1|$的解集为 $x<-1$.

当 $-1\leqslant x<0$ 时, $|x|=-x$; $|x+1|=x+1$.

于是, 由$|x|>|x+1|\Rightarrow -x>x+1\Rightarrow 2x<-1\Rightarrow -1\leqslant x<-\frac{1}{2}$.

$x\geqslant 0$ 时, $|x|=x$; $|x+1|=x+1$.

于是, 由$|x|>|x+1|\Rightarrow x>x+1\Rightarrow 0>1$, 无解.

综上所述,不等式$|x|>|x+1|$的解集是: $x<-\frac{1}{2}$.

6. 解等式$|x+1|+|x-1|=4$.

解: $x<-1$ 时, $|x+1|+|x-1|=4\Rightarrow -(x+1)-(x-1)=4$,

$\Rightarrow -2x=4\Rightarrow x=-2$;

$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $|x+1|+|x-1|=4\Rightarrow (x+1)-(x-1)=4$ 无解;

$x>1$ 时, $|x+1|+|x-1|=4\Rightarrow (x+1)+(x-1)=4$,

$\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$;

综上所述,不等式$|x+1|+|x-1|=4$ 的解集是: $x=\pm 2$.

7. 把集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 3\}\cap B=\{x||x+1|<2\}$ 用区间记号表示.

解: $|x-2|\leqslant 3\Rightarrow -3\leqslant x-2\leqslant 3\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 5\Rightarrow A=[-1, 5]$;

$|x+1|<2\Rightarrow -2<x+1<2\Rightarrow -3<x<1\Rightarrow B=(-3, 1)$.

因此，$A \cap B = [-1, 1)$.

8. 把点 2 的$\frac{1}{3}$邻域用集合表示.

解：$A = \left\{x \mid |x-2| < \frac{1}{3}\right\}$为所求.

第 9 页习题

求 9 ~ 12 题的定义域.

9. $y = \sqrt{3-x}$.

解：$3 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3 \Rightarrow D = (-\infty, 3]$.

10. $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x-1}$.

解：$\begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant 4 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$，

$\Rightarrow D = [-2, 1) \cup (1, 2]$.

11. $y = \lg(1-x) + \sqrt{x+2}$.

解：$\begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow D = [-2, 1)$.

12. $y = \lg\sin x$.

解：$\sin x > 0 \Rightarrow 2k\pi + 0 < x < 2k\pi + \pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$\Rightarrow D = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$.

在 13 ~ 14 题中，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否相同，为什么？

13. $f(x) = x$ 与 $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.

解：$D_f = (-\infty, +\infty)$；$D_\varphi = (-\infty, +\infty)$.

$\varphi(x) = \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow x < 0$ 时，$\varphi(x) = |x| \neq x = f(x)$，

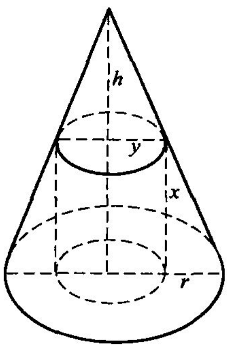
$\Rightarrow f(x) \neq \varphi(x)$.

14. $f(x) = \lg(x^2)$ 与 $\varphi(x) = 2\lg x$.

解：$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；$D_\varphi = (0, +\infty)$.

$\Rightarrow D_f \neq D_\varphi \Rightarrow f(x) \neq \varphi(x)$

15. 圆柱体内接于高为 h，底半径为 r 的圆锥体内，设圆柱体高为 x，试将圆柱体的底半径 y 和体积 V 分别表示为 x 的函数.



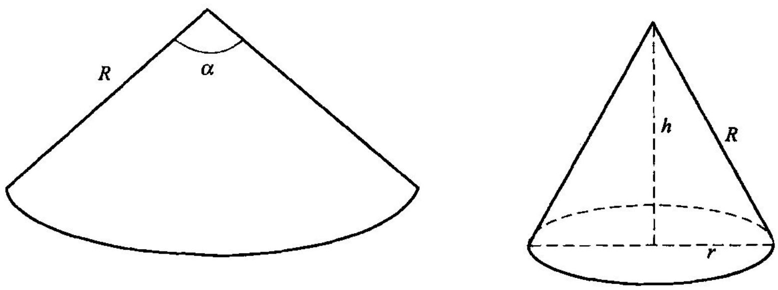
解：如图示，根据三角形相似关系

$$\Rightarrow \frac{l}{r}=\frac{x}{h}\Rightarrow l=\frac{x}{h}r(\text{其中 } l=r-y),$$

$$\Rightarrow y=r-l=r-\frac{x}{h}r=r\left(1-\frac{x}{h}\right),(0<x<h);$$

$$V=\pi y^2x=\pi r^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2x,(0<x<h).$$

16. 将半径为R，中心角为α的扇形做成一个无底的圆锥体，试将这将圆锥体的体积V表示为α的函数.



解：如图示：$2\pi r=R\alpha\Rightarrow r=\dfrac{R\alpha}{2\pi}$;

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2};$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}=\frac{R^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2},(0<\alpha<2\pi).$$

17. 设$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$ 求：$f(0),f\left(-\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{2}\right)$.

解：$f(0)=1;f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}+3=4.$

18. 设$f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$，求：$f(1),f(3),f\left(\frac{1}{x}\right),f\left(\frac{x+1}{x+5}\right)$.

解：$f(1)=\dfrac{1+1}{1+5}=\dfrac{1}{3};f(3)=\dfrac{3+1}{3+5}=\dfrac{1}{2};f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}+5}=\dfrac{1+x}{1+5x};$

$$f\left(\frac{x+1}{x+5}\right)=\frac{\frac{x+1}{x+5}+1}{\frac{x+1}{x+5}+5}=\frac{2x+6}{6x+26}=\frac{x+3}{3x+13}.$$

19. 设$H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求：$H(x-1),H(x)-H(x-1)$.

解：$H(x-1)=\begin{cases}0, & x-1<0,\\ 1, & x-1\geqslant 0.\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

$$H(x)-H(x-1)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ 2, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

20. 设$f(x+1)=x^2+3x+5$，求：$f(x)$，$f(x-1)$.

解：$f(x+1)=(x^2+2x+1)+(x+1)+3=(x+1)^2+(x+1)+3$

$\Rightarrow f(x)=x^2+x+3$；

$\Rightarrow f(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+3=x^2-x+3$.

第 12 页习题

21 ~ 24 题中是由哪些函数复合的？

21. $y=\sin(3x+1)$.

解：$y=\sin(3x+1)$ 是由 $y=\sin u$，$u=3x+1$ 复合的.

22. $y=\cos^3(1-2x)$.

解：$y=\cos^3(1-2x)$ 是由 $y=u^3$，$u=\cos v$，$v=1-2x$ 复合的.

23. $y=\sqrt{\tan\left(\dfrac{x}{2}+6\right)}$.

解：$y=\sqrt{\tan\left(\dfrac{x}{2}+6\right)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}+6$ 复合的.

24. $y=\lg(\arcsin x)$.

解：$y=\lg(\arcsin x)$ 是由 $y=\lg u$，$u=\arcsin x$ 复合的.

25. 设$f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\lg x$，求：$f(\varphi(x))$，$f(f(x))$，$\varphi(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$.

解：$f(\varphi(x))=(\varphi(x))^2=\lg^2 x$；

$f(f(x))=(f(x))^2=x^4$；

$\varphi(f(x))=\lg f(x)=\lg x^2$；

$\varphi(\varphi(x))=\lg\varphi(x)=\lg\lg x$.

第 14 页习题

26. 判断$f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$的奇偶性.

解：$f(-x)=\dfrac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x^3+x}{x^2+1}=-\dfrac{x^3-x}{x^2+1}=-f(x)$，

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$是奇函数.

27. 判断$f(x)=(1-x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{2}{3}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$的奇偶性.

解：$f(-x)=(1-(-x))^{\frac{2}{3}}+(1+(-x))^{\frac{2}{3}}=(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}=f(x)$，

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$是偶函数.

28. 判断$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\in(-1,1)$的奇偶性.

解: $f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,

$\Rightarrow f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数.

29. 求 $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\frac{1}{3}x$, $\tan 2x$ 的周期.

解: $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$是正弦型函数, $\omega=3\Rightarrow$ 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$;

$\sin\frac{1}{3}x$ 是正弦型函数, $\omega=\frac{1}{3}\Rightarrow$ 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$;

$\tan 2x$ 是正切型函数, $\omega=2\Rightarrow$ 周期 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$.

30. 求函数$f(x)=|\sin x|$的周期.

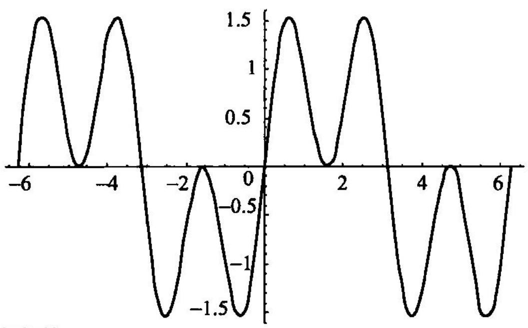
解: 令 $T=\pi$, $f(T+x)=f(\pi+x)=|\sin(\pi+x)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x)$,

$\Rightarrow$ 函数$f(x)=|\sin x|$的周期 $T=\pi$.

第 16 页习题

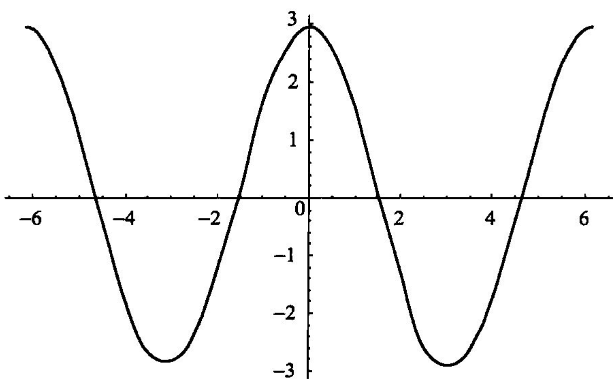
31. 作 $y=\sin x+\sin 3x$ 的图形.

解:



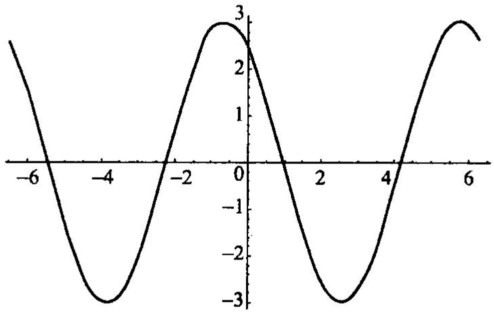
32. 作 $y=3\cos x$ 的图形.

解:



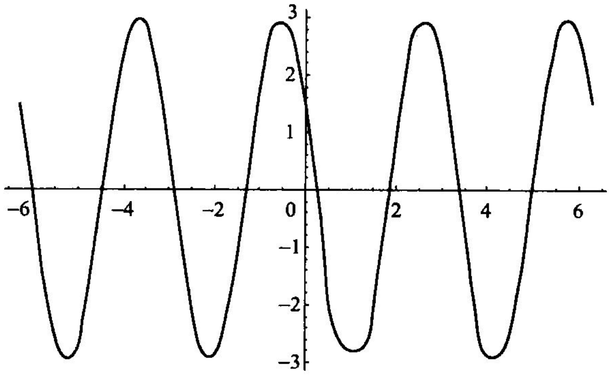
33. 作 $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图形.

解:



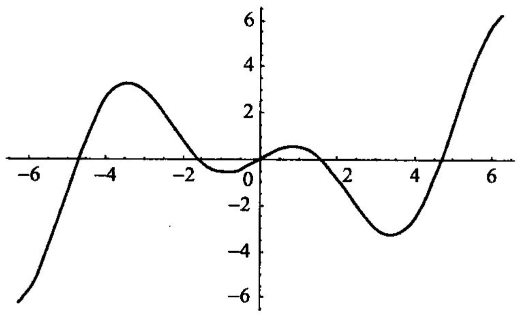
34. 作 $y=3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图形.

解:



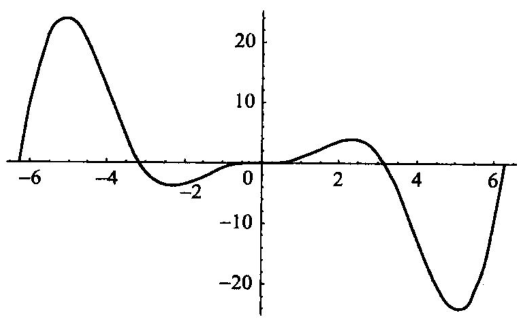
35. 作 $y=x\cos x$ 的图形.

解:



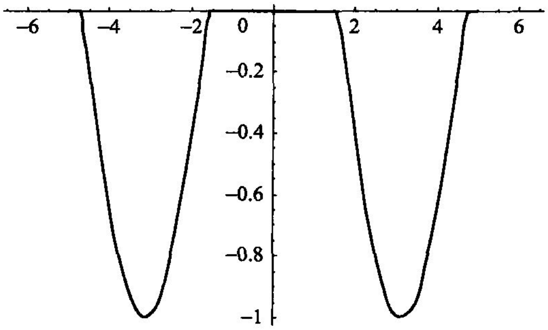
36. 作 $y=x^2\sin x$ 的图形.

解:



37. 作 $y=\frac{1}{2}(\cos x-|\cos x|)$ 的图形.

解:



第 16 页总习题

判断 38 ~40 题函数的奇偶性.

38. $f(x)=\tan|x|$.

解: $f(-x)=\tan|-x|=\tan|x|=f(x)$,

$\Rightarrow f(x)$ 是偶函数.

39. $f(x)=\sqrt{|x|}$.

解: $f(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f(x)$,

$\Rightarrow f(x)$ 是偶函数.

40. $f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$(a 为常数, 且 $a>0$, $a\neq 1$).

解: $f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{\frac{1}{a^x}+1}{\frac{1}{a^x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x)$,

$\Rightarrow f(x)$ 是奇函数.

41. 求函数 $y=\sqrt{\lg(x+4)}$ 的定义域.

解: $\lg(x+4)\geqslant 0\Rightarrow x+4\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant -3$,

$\Rightarrow D=[-3,+\infty)$.

42. 求函数 $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$ 的定义域.

解: $-1\leqslant\frac{x-3}{2}\leqslant 1\Rightarrow -2\leqslant x-3\leqslant 2\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant 5$,

$\Rightarrow D=[1,5]$.

43. 求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域.

解: $\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\16-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ (k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\\x^2\leqslant 16\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)\\-4\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$

$\Rightarrow -4 \leqslant x \leqslant -\pi$ 或 $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$\Rightarrow D = [-4, -\pi] \cup [0, \pi]$.

44. 设 $f(x) = \sin x$, 求 $f(x+h) - f(x)$.

解: $f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$.

45. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$, $f\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

解: $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$,

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2$; $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$.

46. 设 $\varphi(t) = \lg\frac{1-t}{1+t}$, 证明: $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

解: $\varphi(x) + \varphi(y) = \lg\frac{1-x}{1+x} + \lg\frac{1-y}{1+y} = \lg\left(\frac{1-x}{1+x} \times \frac{1-y}{1+y}\right)$

$$= \lg\frac{(1+xy)-(x+y)}{(1+xy)+(x+y)} = \lg\frac{(1+xy)\left[1 - \frac{(x+y)}{1+xy}\right]}{(1+xy)\left[1 + \frac{(x+y)}{1+xy}\right]}$$

$$= \lg\frac{1 - \frac{(x+y)}{1+xy}}{1 + \frac{(x+y)}{1+xy}} = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right),$$

$\Rightarrow \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

47. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$.

解: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$\Rightarrow f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$\Rightarrow f\{f(f(x))\} = \frac{f[f(x)]}{\sqrt{1+\{f[f(x)]\}^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

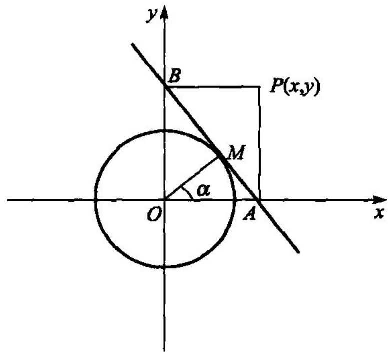
…

$$\Rightarrow \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

48. 设圆的半径为 R, 圆心在原点, M 是此圆周在第一象限上任一点, 过点 M 作圆的切线

交 x 轴与 y 轴分别于点 A, B. $\angle AOM=\alpha$，然后过点 A，点 B 作平行于坐标轴的直线交于点 P，试写出 x 和 y 与 α 之间的函数关系.

解：如图示，设 $M(x_0, y_0)$，



$\Rightarrow x_0 = R\cos\alpha$, $y_0 = R\sin\alpha$.

过 OM 的直线 l_{OM} 的斜率 $k_{OM} = \tan\alpha$.

$\Rightarrow$ 过 AB 的直线 l_{AB} 的斜率 $k_{AB} = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$,

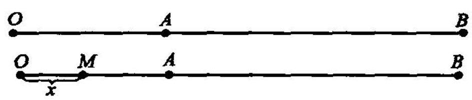
$\Rightarrow$ 直线 l_{AB} 的方程是：$y - R\sin\alpha = -\dfrac{1}{\tan\alpha}(x - R\cos\alpha)$,

令 $y=0 \Rightarrow R\sin\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}(x - R\cos\alpha) \Rightarrow x = \dfrac{R}{\cos\alpha}$;

令 $x=0 \Rightarrow y - R\sin\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}R\cos\alpha \Rightarrow y = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

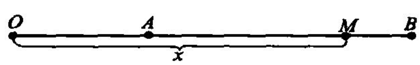
49. 直梁 OAB，由两种材料 OA 与 AB 接合而成，OA 长一个单位，其线密度为 2，AB 长 2 单位，其线密度为 3. 设 M 为直梁上任意一点. 试写出 OM 一段的质量 m 与 OM 的长 x 之间的函数关系.

解：如图示，



(1) $OM = x$，当 $0 \leqslant x < 1$ 时，$m = 2x$.

如图示，



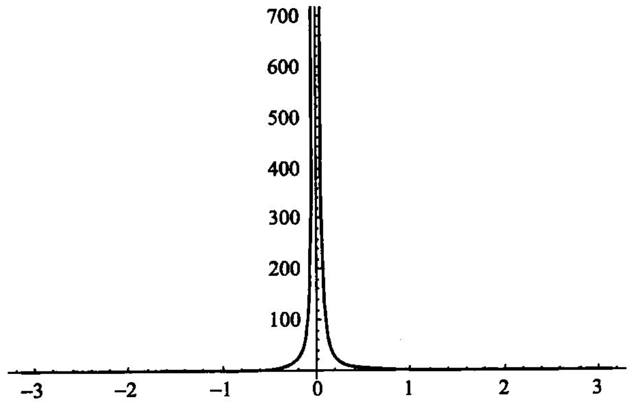
(2) $OM = x$，当 $1 < x \leqslant 3$ 时，$m = 2 + 3(x-1) = 3x - 1$,

于是 $m = m(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 3x-1, & 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$.

作 50 ~ 55 题的图形.

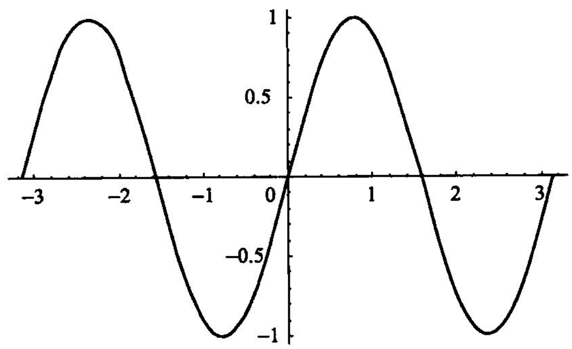
50. $y = x^{-2}$.

解：



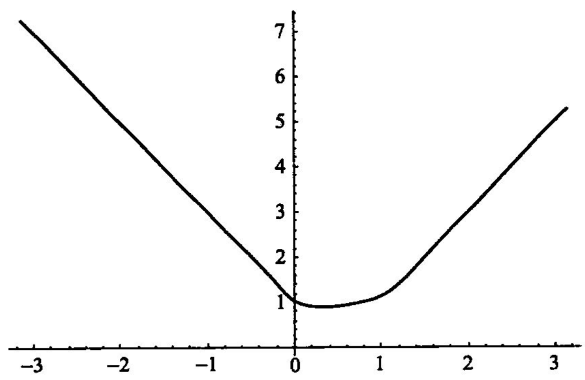
51. $y = \sin 2x$.

解：



52. $y = |x| + |x-1|$.

解：



53. $y = 2^{-x}\cos x$.

解：