



21st CENTURY
实用规划教材

全国本科计算机应用创新型人才培养规划教材

计算方法

主 编 尹景本 石东伟

- 8个数值方法实验有效加深对知识的理解
- 87个应用实例使经典数值分析更通俗易懂
- 多样化习题反复强化计算方法理论的掌握



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

全国本科计算机应用创新型人才培养规划教材

计 算 方 法

主 编 尹景本 石东伟
副主编 周家全 许 超 张万琴 焦红伟



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是根据教育部对高等院校计算方法课程的基本要求,依据理工科《计算方法教学大纲》,结合本学科的发展趋势,在积累多年教学实践的基础上编写而成的。本书介绍了现代科学与工程中常用的数值计算方法以及有关的基本概念与理论,涵盖了经典数值分析的所有内容,涉及插值与函数最佳逼近、数值微积分、线性方程组的直接方法和迭代法、一元非线性代数方程的数值解法、矩阵特征值与特征向量的数值解法、常微分方程初值问题数值解法等,着重阐述构造算法的基本思想与原理,既注重理论的严谨性,又注重方法的实用性。所有的数值方法均配有实验,供学生上机实习。每章均配有相当数量的习题,书末附有 MATLAB 软件应用简介,便于读者参考。

本书阐述严谨、脉络分明、深入浅出、循序渐进、富有启发性,适于教学使用。

本书适合作为高等院校理工科本科生教材,也可供从事科学与工程计算的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/尹景本,石东伟主编. —北京:北京大学出版社,2011.9

(全国本科计算机应用创新型人才培养规划教材)

ISBN 978-7-301-19435-5

I. ①计… II. ①尹…②石… III. ①计算方法—高等学校—教材 IV. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 172228 号

书 名: 计算方法

著作责任者: 尹景本 石东伟 主编

策 划 编 辑: 郑 双

责 任 编 辑: 程志强

标 准 书 号: ISBN 978-7-301-19435-5/O · 0851

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> <http://www.pup6.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

电 子 邮 箱: pup_6@163.com

印 刷 者: 北京鑫海金澳胶印有限公司

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 mm×1092 mm 16 开本 12 印张 267 千字

2011 年 9 月第 1 版 2011 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 28.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有 侵权必究

举报电话: 010-62752024

电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

序

本套教材经过全国几十所高等学校老师一年多的努力，终于与广大读者见面了。我相信，它一定会受到全国高等学校计算机界老师和同学们的热烈欢迎。

随着信息技术的飞速发展，单一培养模式已经不能满足社会对计算机专业人才多样化的需求。应对这一变化的最佳办法，就是采用多种模式的培养方式。当前，高等学校的计算机教育正处于从过去的单一培养模式向多种培养模式的转变过程中，多种模式的培养方式将是必然的发展方向。

多种模式的培养方式包括：培养人才的类型不同(研究型，应用型)；专业方向不同(计算机软件，计算机网络，信息安全，信息系统，计算机应用技术等)；课程设置的多样性等。

同时，高等教育对科技人才培养的要求是：不但要培养研究型科技人才，还要为国家培养更多的应用型科技人才(或称工程型科技人才)。也就是说，培养应用型科技人才是百分之九十以上的普通高等学校的主要任务。

本套教材正是为适应多种模式培养方式的要求，并且着重于培养计算机领域高级应用型科技人才的需求，而组织编写的。

本套教材具有如下特点。

1. 基础理论够用

计算机专业所需的基础理论知识以够用为准，不是盲目扩张。如数字系统的基础知识，计算机的基本组成原理和体系结构的基础知识，离散数学的基础知识，数据结构和算法的基础知识，操作系统的基础知识，程序设计的基础知识等，都进行了必要的讲解介绍。

2. 强调理论联系实际，学以致用

每本教材的编写都将“理论联系实际，学以致用”的原则贯彻始终。例如，《计算机组成原理和体系结构》结合现代的计算机讲解，使学生学完之后，确切掌握现代计算机的组成、结构和工作原理；又如，《程序设计》结合实例讲解，使学生学完之后，真正能够动手编写程序。

3. 强调教材的配套性

根据多年组织教材的经验，只有配套性好的教材才最受教师和学生们的欢迎。我们这套教材，尽量做到了课堂教材、实训教材和教学课件完全配套，以方便教学使用。

另外，本套教材提供的是一套应用创新型计算机教育系列教材，可供不同类型学校依照自己的教学计划，根据自身的需要进行选用。

现在把这套教材奉献给全国计算机界的朋友们，真诚希望大家能够喜欢。本套教材难免会有诸多缺点或不到之处，还希望得到大家的批评和指正。

全国高等学校计算机教育研究会课程与教材建设委员会主任

李大友

2009年3月

前 言

数值计算历来都是数学研究的重要内容之一。随着计算机的迅速发展,无论是高科技领域还是一些传统的学科,数值计算都是一个不可缺少的环节。

本书介绍了常用的数值计算方法,涵盖了经典数值分析的全部内容,涉及插值与函数最佳逼近、数值微积分、线性方程组的直接方法和迭代法、一元非线性代数方程的数值解法、矩阵特征值与特征向量的数值解法、常微分方程初值问题数值解法等。

本书在编写过程中,参考了国内已出版的同类教材(参考文献[1]~[12]),吸收了其中许多精华,力求体现以下几个特点。

(1) 计算方法是一门应用性较强的数学基础课。本书注重基本概念叙述的清晰性,重点讲述数值分析方法的思想和原理,在知识体系完整的基础上尽可能避免过深的理论证明,侧重从几何意义直观地说明问题,便于学生理解与接受。在学生获得知识的同时培养学生的推理、归纳、演绎和创新能力。

(2) 第1章讲解基本概念,实验报告书写格式;后面各章知识既相互独立,又呈阶梯上升趋势,每章均配有实验。每种数值解法均按照引出问题、启发思路、重点分析的思维过程进行编排,遵循人们的认知规律,符合课程设计与学习指南的要求。

(3) 本书重点突出,注重算法的构思过程,用典型的数值例子说明算法的正确性,并通过上机实验进行验证。本书例题、习题丰富,可供读者进一步理解内容,提高分析问题、解决问题的能力。

本书第4章和第7章由河南科技学院尹景本编写,第5章和第8章由河南科技学院石东伟编写,第1章和第9章由洛阳理工学院周家全编写,第2章、第3章和第6章由洛阳理工学院许超编写,河南科技学院张万琴将书中实验在计算机上实现并编写了习题答案(可从www.pup6.cn下载),河南科技学院焦红伟编写了附录并对书中数值例子进行了检验。

本书由尹景本主持编写。本书的出版得到了河南科技学院教务处、数学系领导的大力支持;郑州大学石东洋教授认真阅读了本书,并提出了许多宝贵的修改意见;河南科技学院陈付贵教授给予了悉心指导。在这里向他们和本书所列参考文献的作者以及为本书出版给予热心支持和帮助的朋友表示衷心的感谢!

本书可作为理工科本科生计算方法课程的教材或参考书,也可供从事科学与工程计算的科技工作者参考。

由于编者水平有限,恳请广大读者对书中的缺点和疏漏给予批评指正。

编 者

2011年6月

北京大学出版社本科计算机系列实用规划教材

序号	标准书号	书 名	主 编	定价	序号	标准书号	书 名	主 编	定价
1	7-301-10511-5	离散数学	段禅伦	28	37	7-301-13585-3	计算机专业英语	张 勇	30
2	7-301-10457-X	线性代数	陈付贵	20	38	7-301-13684-3	单片机原理及应用	王新颀	25
3	7-301-10510-X	概率论与数理统计	陈荣江	26	39	7-301-14505-0	Visual C++程序设计案例教程	张荣梅	30
4	7-301-10503-0	Visual Basic 程序设计	闵联营	22	40	7-301-14259-2	多媒体技术应用案例教程	李 建	30
5	7-301-10456-9	多媒体技术及其应用	张正兰	30	41	7-301-14503-6	ASP .NET 动态网页设计案例教程(Visual Basic .NET 版)	江 红	35
6	7-301-10466-8	C++程序设计	刘天印	33	42	7-301-14504-3	C++面向对象与 Visual C++程序设计案例教程	黄贤英	35
7	7-301-10467-5	C++程序设计实验指导与习题解答	李 兰	20	43	7-301-14506-7	Photoshop CS3 案例教程	李建芳	34
8	7-301-10505-4	Visual C++程序设计教程与上机指导	高志伟	25	44	7-301-14510-4	C++程序设计基础案例教程	于永彦	33
9	7-301-10462-0	XML 实用教程	丁跃潮	26	45	7-301-14942-3	ASP .NET 网络应用案例教程(C# .NET 版)	张登辉	33
10	7-301-10463-7	计算机网络系统集成	斯桃枝	22	46	7-301-12377-5	计算机硬件技术基础	石 磊	26
11	7-301-10465-1	单片机原理及应用教程	范立南	30	47	7-301-15208-9	计算机组成原理	娄国焕	24
12	7-5038-4421-3	ASP .NET 网络编程实用教程(C#版)	崔良海	31	48	7-301-15463-2	网页设计与制作案例教程	房爱莲	36
13	7-5038-4427-2	C 语言程序设计	赵建锋	25	49	7-301-04852-8	线性代数	姚喜妍	22
14	7-5038-4420-5	Delphi 程序设计基础教程	张世明	37	50	7-301-15461-8	计算机网络技术	陈代武	33
15	7-5038-4417-5	SQL Server 数据库设计与应用	姜 力	31	51	7-301-15697-1	计算机辅助设计二次开发案例教程	谢安俊	26
16	7-5038-4424-9	大学计算机基础	贾丽娟	34	52	7-301-15740-4	Visual C# 程序开发案例教程	韩朝阳	30
17	7-5038-4430-0	计算机科学与技术导论	王昆仑	30	53	7-301-16597-3	Visual C++程序设计实用案例教程	于永彦	32
18	7-5038-4418-3	计算机网络应用实例教程	魏 峥	25	54	7-301-16850-9	Java 程序设计案例教程	胡巧多	32
19	7-5038-4415-9	面向对象程序设计	冷英男	28	55	7-301-16842-4	数据库原理与应用(SQL Server 版)	毛一梅	36
20	7-5038-4429-4	软件工程	赵春刚	22	56	7-301-16910-0	计算机网络技术基础与应用	马秀峰	33
21	7-5038-4431-0	数据结构(C++版)	秦 锋	28	57	7-301-15063-4	计算机网络基础与应用	刘远生	32
22	7-5038-4423-2	微机应用基础	吕晓燕	33	58	7-301-15250-8	汇编语言程序设计	张光长	28
23	7-5038-4426-4	微型计算机原理与接口技术	刘彦文	26	59	7-301-15064-1	网络安全技术	骆耀祖	30
24	7-5038-4425-6	办公自动化教程	钱 俊	30	60	7-301-15584-4	数据结构与算法	佟伟光	32
25	7-5038-4419-1	Java 语言程序设计实用教程	董迎红	33	61	7-301-17087-8	操作系统实用教程	范立南	36
26	7-5038-4428-0	计算机图形技术	龚声蓉	28	62	7-301-16631-4	Visual Basic 2008 程序设计教程	隋晓红	34
27	7-301-11501-5	计算机软件技术基础	高 巍	25	63	7-301-17537-8	C 语言基础案例教程	汪新民	31
28	7-301-11500-8	计算机组装与维护实用教程	崔明远	33	64	7-301-17397-8	C++程序设计基础教程	郝亚辉	30
29	7-301-12174-0	Visual FoxPro 实用教程	马秀峰	29	65	7-301-17578-1	图论算法理论、实现及应用	王桂平	54
30	7-301-11500-8	管理信息系统实用教程	杨月江	27	66	7-301-17964-2	PHP 动态网页设计与制作案例教程	房爱莲	42
31	7-301-11445-2	Photoshop CS 实用教程	张 瑾	28	67	7-301-18514-8	多媒体开发与编程	于永彦	35
32	7-301-12378-2	ASP .NET 课程设计指导	潘志红	35	68	7-301-18538-4	实用计算方法	徐亚平	24
33	7-301-12394-2	C# .NET 课程设计指导	龚自霞	32	69	7-301-18539-1	Visual FoxPro 数据库设计案例教程	谭红杨	35
34	7-301-13259-3	Visual Basic .NET 课程设计指导	潘志红	30	70	7-301-19313-6	Java 程序设计案例教程与实训	董迎红	45
35	7-301-12371-3	网络工程实用教程	汪新民	34	71	7-301-19389-1	Visual FoxPro 实用教程与上机指导(第2版)	马秀峰	40
36	7-301-14132-8	J2EE 课程设计指导	王立丰	32	72	7-301-19435-5	计算方法	尹景本	28

北京大学出版社电气信息类教材书目(已出版)

欢迎选订

序号	标准书号	书 名	主 编	定价	序号	标准书号	书 名	主 编	定价
1	7-301-10759-1	DSP 技术及应用	吴冬梅	26	38	7-5038-4400-3	工厂供配电	王玉华	34
2	7-301-10760-7	单片机原理与应用技术	魏立峰	25	39	7-5038-4410-2	控制系统仿真	郑恩让	26
3	7-301-10765-2	电工学	蒋 中	29	40	7-5038-4398-3	数字电子技术	李 元	27
4	7-301-19183-5	电工与电子技术(上册)(第2版)	吴舒辞	30	41	7-5038-4412-6	现代控制理论	刘永信	22
5	7-301-19229-0	电工与电子技术(下册)(第2版)	徐卓农	32	42	7-5038-4401-0	自动化仪表	齐志才	27
6	7-301-10699-0	电子工艺实习	周春阳	19	43	7-5038-4408-9	自动化专业英语	李国厚	32
7	7-301-10744-7	电子工艺学教程	张立毅	32	44	7-5038-4406-5	集散控制系统	刘翠玲	25
8	7-301-10915-6	电子线路 CAD	吕建平	34	45	7-301-19174-3	传感器基础(第2版)	赵玉刚	30
9	7-301-10764-1	数据通信技术教程	吴延海	29	46	7-5038-4396-9	自动控制原理	潘 丰	32
10	7-301-18784-5	数字信号处理(第2版)	阎 毅	32	47	7-301-10512-2	现代控制理论基础(国家级十一 五规划教材)	侯媛彬	20
11	7-301-18889-7	现代交换技术(第2版)	姚 军	36	48	7-301-11151-2	电路基础学习指导与典型题解	公茂法	32
12	7-301-10761-4	信号与系统	华 容	33	49	7-301-12326-3	过程控制与自动化仪表	张井岗	36
13	7-301-10762-5	信息与通信工程专业英语	韩定定	24	50	7-301-12327-0	计算机控制系统	徐文尚	28
14	7-301-10757-7	自动控制原理	袁德成	29	51	7-5038-4414-0	微机原理及接口技术	赵志诚	38
15	7-301-16520-1	高频电子线路(第2版)	宋树祥	35	52	7-301-10465-1	单片机原理及应用教程	范立南	30
16	7-301-11507-7	微机原理与接口技术	陈光军	34	53	7-5038-4426-4	微型计算机原理与接口技术	刘彦文	26
17	7-301-11442-1	MATLAB 基础及其应用教程	周开利	24	54	7-301-12562-5	嵌入式基础实践教程	杨 刚	30
18	7-301-11508-4	计算机网络	郭银景	31	55	7-301-12530-4	嵌入式 ARM 系统原理与实例 开发	杨宗德	25
19	7-301-12178-8	通信原理	隋晓红	32	56	7-301-13676-8	单片机原理及应用及 C51 程 序设计	唐 颖	30
20	7-301-12175-7	电子系统综合设计	郭 勇	25	57	7-301-13577-8	电力电子技术及应用	张润和	38
21	7-301-11503-9	EDA 技术基础	赵明富	22	58	7-301-12393-5	电磁场与电磁波	王善进	25
22	7-301-12176-4	数字图像处理	曹茂永	23	59	7-301-12179-5	电路分析	王艳红	38
23	7-301-12177-1	现代通信系统	李白萍	27	60	7-301-12380-5	电子测量与传感技术	杨 雷	35
24	7-301-12340-9	模拟电子技术	陆秀令	28	61	7-301-14461-9	高电压技术	马永翔	28
25	7-301-13121-3	模拟电子技术实验教程	谭海曙	24	62	7-301-14472-5	生物医学数据分析及其 MATLAB 实现	尚志刚	25
26	7-301-11502-2	移动通信	郭俊强	22	63	7-301-14460-2	电力系统分析	曹 娜	35
27	7-301-11504-6	数字电子技术	梅开乡	30	64	7-301-14459-6	DSP 技术与应用基础	俞一彪	34
28	7-301-18860-6	运筹学(第2版)	吴亚丽	28	65	7-301-14994-2	综合布线系统基础教程	吴达金	24
29	7-5038-4407-2	传感器与检测技术	祝诗平	30	66	7-301-15168-6	信号处理 MATLAB 实验教程	李 杰	20
30	7-5038-4413-3	单片机原理及应用	刘 刚	24	67	7-301-15440-3	电工电子实验教程	魏 伟	26
31	7-5038-4409-6	电机与拖动	杨天明	27	68	7-301-15445-8	检测与控制实验教程	魏 伟	24
32	7-5038-4411-9	电力电子技术	樊立萍	25	69	7-301-04595-4	电路与模拟电子技术	张绪光	35
33	7-5038-4399-0	电力市场原理与实践	邹 斌	24	70	7-301-15458-8	信号、系统与控制理论(上、 下册)	邱德润	70
34	7-5038-4405-8	电力系统继电保护	马永翔	27	71	7-301-15786-2	通信网的信令系统	张云麟	24
35	7-5038-4397-6	电力系统自动化	孟祥忠	25	72	7-301-16493-8	发电厂变电所电气部分	马永翔	35
36	7-5038-4404-1	电气控制技术	韩顺杰	22	73	7-301-16076-3	数字信号处理	王震宇	32
37	7-5038-4403-4	电器与 PLC 控制技术	陈志新	38	74	7-301-16931-5	微机原理及接口技术	肖洪兵	32

序号	标准书号	书 名	主 编	定价	序号	标准书号	书 名	主 编	定价
75	7-301-16932-2	数字电子技术	刘金华	30	87	7-301-18131-7	集散控制系统	周荣富	36
76	7-301-16933-9	自动控制原理	丁 红	32	88	7-301-18285-7	电子线路 CAD	周荣富	41
77	7-301-17540-8	单片机原理及应用教程	周广兴	40	89	7-301-16739-7	MATLAB 基础及应用	李国朝	39
78	7-301-17614-6	微机原理及接口技术实验指导书	李干林	22	90	7-301-18352-6	信息论与编码	隋晓红	24
79	7-301-12379-9	光纤通信	卢志茂	28	91	7-301-18260-4	控制电机与特种电机及其控制系统	孙冠群	42
80	7-301-17382-4	离散信息论基础	范九伦	25	92	7-301-18493-6	电工技术	张 莉	26
81	7-301-17677-1	新能源与分布式发电技术	朱永强	32	93	7-301-18496-7	现代电子系统设计教程	宋晓梅	36
82	7-301-17683-2	光纤通信	李丽君	26	94	7-301-18672-5	太阳能电池原理与应用	靳瑞敏	25
83	7-301-17700-6	模拟电子技术	张绪光	36	95	7-301-18314-4	通信电子线路及仿真设计	王鲜芳	29
84	7-301-17318-3	ARM 嵌入式系统基础与开发教程	丁文龙	36	96	7-301-19175-0	单片机原理与接口技术	李 升	46
85	7-301-17797-6	PLC 原理及应用	缪志农	26	97	7-301-19320-4	移动通信	刘维超	39
86	7-301-17986-4	数字信号处理	王玉德	32					

请登录 www.pup6.cn 免费下载本系列教材的电子书(PDF 版)、电子课件和相关教学资源。

欢迎免费索取样书, 并欢迎到北京大学出版社来出版您的著作, 可在 www.pup6.cn 在线申请样书和进行选题登记, 也可下载相关表格填写后发到我们的邮箱, 我们将及时与您取得联系并做好全方位的服务。

联系方式: 010-62750667, pup6_czq@163.com, szheng_pup6@163.com, linzhangbo@126.com, 欢迎来电来信咨询。

目 录

第 1 章 误差	1	3.3.2 正交多项式	40
1.1 数值分析研究对象	1	3.4 最小二乘的数值实验	42
1.2 误差的基本概念	2	3.5 习题	43
1.2.1 误差的来源与分类	2	第 4 章 数值积分与数值微分	44
1.2.2 绝对误差和相对误差	3	4.1 数值积分概述	44
1.2.3 有效数字	5	4.2 牛顿-柯特斯公式	47
1.2.4 数值运算的误差估计	7	4.2.1 构造数值积分公式的 基本方法	47
1.3 数值计算中的原则	9	4.2.2 牛顿-柯特斯公式的数值 稳定性和收敛性	51
1.3.1 算法的数值稳定性概念	9	4.3 复化求积公式	52
1.3.2 设计算法的若干原则	9	4.3.1 复化求积公式的原理	52
1.4 数值实验报告的格式	14	4.3.2 复化求积公式的误差	53
1.5 习题	14	4.4 高斯求积公式	55
第 2 章 插值法	16	4.4.1 高斯型求积公式的原理	55
2.1 插值法的概念	16	4.4.2 几种常见的高斯型数值积分 公式	58
2.1.1 问题的提出	16	4.5 数值微分	61
2.1.2 多项式插值的误差	17	4.5.1 利用插值公式构造数值微分 公式	61
2.2 拉格朗日插值	18	4.5.2 利用三次样条插值函数构造 数值微分公式	64
2.3 牛顿插值多项式	20	4.6 数值微积分实验	64
2.4 埃尔米特插值	24	4.7 习题	65
2.4.1 三次埃尔米特插值	24	第 5 章 解线性方程组的直接方法	66
2.4.2 一般埃尔米特插值	26	5.1 高斯消去法	67
2.5 样条插值	26	5.1.1 高斯消去法的基本方法	67
2.5.1 龙格现象和分段线性 插值	26	5.1.2 顺序高斯消去法	69
2.5.2 样条插值	28	5.2 矩阵的 LU 分解	71
2.6 插值法的数值实验	32	5.3 解三对角线方程组的追赶法	74
2.7 习题	33	5.4 线性方程组的直接解法实验	76
第 3 章 数据拟合与函数逼近	34	5.5 习题	77
3.1 直线拟合	34	第 6 章 解线性方程组的迭代法	78
3.2 离散数据的最小二乘逼近	35	6.1 迭代法的基本概念	78
3.2.1 最小二乘原理的一般 理论	35	6.1.1 迭代法的思想	78
3.2.2 代数多项式拟合	36	6.1.2 迭代法及其收敛性	80
3.2.3 非线性曲线拟合	37	6.2 矩阵范数及性质	81
3.3 连续函数的最佳平方逼近	39	6.2.1 向量的范数	81
3.3.1 连续函数的最佳平方 逼近	39		

6.2.2 矩阵的范数	82	8.1.1 乘幂法	117
6.2.3 A 的范数 $\ A\ $ 与 A 的特征值之间的关系	83	8.1.2 加速方法	120
6.3 线性方程组的性态	83	8.1.3 反幂法	122
6.4 雅克比迭代和高斯-塞德尔迭代	84	8.2 矩阵的 QR 分解及其应用	124
6.4.1 雅克比迭代法	85	8.2.1 豪斯荷尔德变换	124
6.4.2 高斯-塞德尔迭代法	86	8.2.2 QR 方法	125
6.5 松弛迭代法	87	8.3 矩阵特征值的计算实验	128
6.6 迭代法的收敛性及误差估计	88	8.4 习题	128
6.7 线性方程组的迭代法实验	91	第 9 章 常微分方程数值解法	130
6.8 习题	92	9.1 单步法	131
第 7 章 一元非线性方程的数值解法	94	9.1.1 欧拉法	131
7.1 二分法	95	9.1.2 单步法的局部截断误差和阶	134
7.1.1 初始近似根的确定	95	9.1.3 Runge-Kutta 方法	135
7.1.2 二分法	96	9.2 单步法的收敛性和稳定性	140
7.2 迭代法及其收敛性	99	9.2.1 单步法的收敛性	140
7.2.1 迭代法简介	99	9.2.2 单步法的稳定性	141
7.2.2 迭代法的构造及其收敛性	100	9.3 线性多步法	145
7.2.3 局部收敛性及收敛阶	104	9.3.1 线性多步法的一般形式	145
7.2.4 不动点迭代的加速	106	9.3.2 常用的线性多步法	146
7.3 牛顿迭代法	110	9.3.3 预估-校正方法和外推技巧	150
7.3.1 牛顿迭代法及其收敛性	110	9.3.4 线性多步法的收敛性与稳定性	152
7.3.2 重根时牛顿迭代法的改善	112	9.4 常微分方程初值问题数值解实验	155
7.4 弦截法	113	9.5 习题	155
7.5 一元非线性代数方程求解实验	115	附录 MATLAB 软件应用简介	157
7.6 习题	116	参考文献	177
第 8 章 矩阵特征值计算	117		
8.1 乘幂法和反幂法	117		

第 1 章 误 差



教学提示

本章主要介绍数值分析研究对象、误差的来源与分类、绝对误差和相对误差的概念、有效数字与误差的关系、数值运算中误差估计的传播以及避免误差危害的若干原则。在教学中，希望能够理论联系实际，结合 MATLAB 软件加强学生的动手能力。



教学目标

通过本章的学习，使学生了解数值分析研究对象、数值计算中误差的来源与分类以及误差与有效数字的关系；掌握绝对误差、相对误差、有效数字之间的关系，并会求解有关问题；掌握函数值的误差估计及在数值计算中应注意的几个原则。

1.1 数值分析研究对象

计算方法又称数值分析，是寻求数学问题近似解的方法、过程及其理论的一个数学分支。它以数学理论为基础，但不完全像纯数学理论那样只研究数学理论本身，而是着重研究数学问题求解的数值计算方法以及与此有关的理论，包括方法的收敛性、稳定性及误差分析；并根据计算机的特点研究计算时间最省（或计算费用最省）的计算方法。因此计算方法既有纯数学的高度抽象性与严密科学性的特点，又有应用数学的广泛性与实际试验的高度技术性的特点，是一门与计算机紧密结合的实用性很强的数学课程。

计算方法的主要任务就是研究数学模型适合于在计算机上使用的数值计算方法及与此相关的理论，并根据计算机的特点研究计算时间最短、需要计算机内存最少等计算方法问题。

本书主要介绍一些常用的、基本的计算方法，也就是求解科学研究和工程技术领域中常见的各种数学问题的数值计算方法，如非线性方程、线性方程组、微分方程的数值解法，函数的数值逼近，矩阵特征值计算问题等，还包括解的存在性、唯一性、收敛性和误差分析等理论问题。

学习本课程应注意以下问题。

首先，要带着实用的欲望学习本课程。本课程所介绍的一些计算方法，是关于高等数学和线性代数课程中的基本数学问题数值化处理的方法，每一类问题都有广泛的应用背景，既有算法又有具体实现过程，因此学习时应带着分析问题、解决问题和实际应用的目的来学习本课程。

其次，要注重算法思想。本课程在将某一类数学问题转化为数值算法的过程中，综合使

用了多种基础知识,具体算法看起来较繁杂,要注意掌握算法的基本原理和思想,要注意算法处理的技巧及其误差分析、收敛性和稳定性的基本理论.只有注重算法思想的学习,才能真正地掌握算法和相应的计算公式,进而培养分析问题和解决实际问题的能力.

最后,要注重实践性环节.每种算法都有相应的软件,无须对每个算法上机编程,学习阶段的实践仅需要调用这些程序去解决一个简单问题,观察其解决的效果,了解具体的计算过程,以加深对各种算法优缺点和最佳适应范围的理解.此外,为了掌握本课程的内容,还应做一定数量的理论分析与计算练习.

本章简要介绍误差的基本理论以及算法的数值稳定性概念,作为学习之后各章的准备.

1.2 误差的基本概念

1.2.1 误差的来源与分类

利用数学方法解决实际问题通常包括分析实际问题,建立数学模型,建立近似计算方法(数值方法)、进行数值计算以及验证结果的正确性等主要环节(图 1.1).由此可知,在实际计算中误差的来源有模型误差、观测误差、截断误差和舍入误差 4 类.

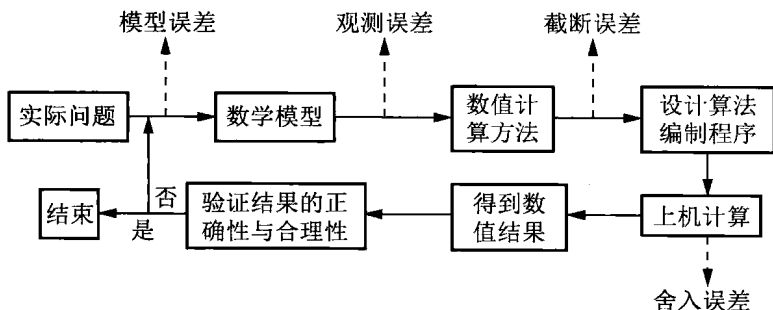


图 1.1 数值计算过程及误差的产生

1. 模型误差

用数值计算方法解决实际问题时,首先必须建立数学模型.由于实际问题的复杂性,通常为了抓住主要因素而忽略一些次要因素,需要对实际问题进行抽象与简化,这样就会使得建立起来的数学模型只是复杂客观现象的一种近似描述,它与实际问题之间总会存在一定的误差,这类误差称为模型误差.模型误差是由实际问题抽象、简化为数学问题(数学模型)时所引起的误差.例如,计算地球的表面积可以用近似公式: $A = 4\pi r^2$,把地球表面近似地看成一个球,这就是地球的简单模型,它与地球的实际情况有很大的差别.由于这类误差难于做定量分析,所以在数值计算方法中总是假定所研究的数学模型是合理的,对模型误差不做深入讨论.

2. 观测误差

根据实际问题建立的数学模型中包含一些物理参数,如温度、时间、距离、电流、电压等,这些参数往往是通过观测和实验得到的,由于测量工具精度和测量手段的限制,测得的数据与实际量之间必然存在误差,这类误差称为观测误差.通常根据测量工具或仪器本身的

精度，可以知道这类误差的上限值，所以无须在计算方法中做过多研究。

3. 截断误差

由实际问题建立起来的数学模型在很多情况下要得到准确解是困难的，通常要用数值方法求出它的近似解。例如，常用有限过程逼近无限过程，用能计算的问题代替不能计算的问题。这种数学模型的精确解与由数值方法求出的近似解之间的误差称为截断误差，由于截断误差是数值计算方法固有的，故又称为方法误差。例如，用函数 $f(x)$ 的泰勒展开式的部分 $S_n(x)$ 去近似代替 $f(x)$ ，其余项 R_n 就是准确值 $f(x)$ 的截断误差。如

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

当 $|x|$ 很小时，可以取前两项来近似代替 e^x ，即 $e^x \approx 1 + x$ ，由泰勒中值定理可知，在数值计算中被抛弃了

$$e^x - E(x) = \frac{e^\xi}{2}x^2, (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

产生了截断误差，其大小直接影响数值计算的精度，所以它是数值计算中必须十分重视的一类误差。

4. 舍入误差

无论用计算机、计算器计算还是笔算，都只能用有限位小数来代替无穷小数或用位数较少的小数来代替位数较多的有限小数，对超过位数的数字通常用四舍五入的方法取近似值，由此产生的误差称为舍入误差。例如，用 2.718 28 作为无理数 e 的近似值产生的误差就是舍入误差。应注意的是，虽然少量的舍入误差是微不足道的，但在计算机上进行百万次运算之后，舍入误差的积累可能是非常惊人的。

在数值计算中，往往要进行成千上万次四则运算，因而就会有成千上万个舍入误差产生，这些误差一经叠加或传递，对计算精度可能有较大的影响。所以，进行数值计算时对舍入误差应予以足够的重视。

综上所述，模型误差、观测误差、截断误差和舍入误差在数值计算中都是难以回避的，并且都会影响数值计算结果的准确性。通过对这 4 种误差来源的分析可知，前两种误差是客观存在的，是计算工作者不能独立解决的，是需要与各有关学科的科学工作者共同研究的问题；后两种误差是由计算方法所引起的，是数值计算方法的主要研究对象。因此，在本课程中，主要研究截断误差和舍入误差(包括初始数据的误差)对计算结果的影响，讨论它们在计算过程中的传播和对计算结果的影响。

1.2.2 绝对误差和相对误差

定义 1.1 假设某一量的准确值为 x ，近似值为 x^* ，则 x 与 x^* 之差叫做近似值 x^* 的绝对误差(误差)，记为 $\epsilon(x^*)$ ，即

$$\epsilon(x^*) = x - x^* \quad (1.1)$$

应当注意的是，绝对误差 $\epsilon(x^*)$ 不是误差的绝对值，它是可正可负的。而 $|\epsilon(x^*)|$ 的大小在一定程度上标志着 x^* 的精确度。一般地，在同一量的不同近似值中， $|\epsilon(x^*)|$ 越小， x^* 的精确度越高。

一般来说，由于精确值 x 一般不能得到，于是误差 $\epsilon(x^*)$ 的准确值也无法求得，但在实

际测量计算时, 可以根据具体情况估计出 $|\epsilon(x^*)|$ 的某个上界, 即存在一个适当的正数 δ , 使得可根据具体情况估计出它的大小范围. 也就是指定一个适当小的正数 δ , 使

$$|\epsilon(x^*)| = |x - x^*| \leq \delta \quad (1.2)$$

称 δ 为近似值 x^* 的绝对误差限, 简称误差限或精度. 在工程应用上, 常常采用

$$x = x^* \pm \delta \quad (1.3)$$

表示近似值的精度或准确值的所在范围.

例 1.1 设 $x = \frac{2}{3} = 0.666\ 6\cdots$, 取 $x^* = 0.667$, 则

$$|\epsilon(x^*)| = |x - x^*| = 0.000\ 333\cdots < 0.000\ 5$$

可以估计 x^* 的绝对误差限为 0.000 5.

在实际问题中, 绝对误差一般是有量纲的. 例如, 测得某一物体的长度为 100mm, 其误差限为 0.5mm, 通常将准确长度 s 记为

$$s = 100 \pm 0.5$$

即准确值在 100mm 左右, 但不超过 0.5mm 的误差限.

用绝对误差来刻画一个近似值的精确程度是有局限性的, 对不同大小的量仅凭近似数绝对误差的大小还不能确定近似数的精确程度. 例如, 测量飞机机翼长度时发生 1mm 的误差与测量机翼厚度时发生 1mm 的误差大不一样. 要决定一个近似值的精确程度, 除了绝对误差以外, 还必须考虑此数本身的大小, 这就需要引入相对误差的概念.

定义 1.2 设 x^* 是准确值, x 是近似值, 绝对误差与准确值之比

$$\epsilon_r(x^*) = \frac{\epsilon(x)}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*}, \quad x^* \neq 0 \quad (1.4)$$

称为 x^* 的相对误差.

由于精确值 x 往往是不知道的, 因此在实际问题中, 当 $|\epsilon_r(x^*)|$ 较小时, 常取

$$\epsilon_r(x^*) = \frac{\epsilon(x^*)}{x}$$

一般地, 在同一量或不同量的几个近似值中, $|\epsilon_r(x^*)|$ 越小, x 精确度越高. 相对误差是一个无量纲量.

在实际计算中, 由于 $\epsilon(x^*)$ 与 x 都不能准确地求得, 因此相对误差 $\epsilon_r(x^*)$ 也不可能准确地得到, 只能估计它的大小范围. 类似于绝对误差的情况, 即指定一个适当小的正数 δ_r , 使

$$|\epsilon_r(x^*)| = \frac{|\epsilon(x^*)|}{|x|} \leq \delta_r \quad (1.5)$$

称 δ_r 为近似值 x^* 的相对误差限. 当 $|\epsilon_r(x^*)|$ 较小时, 可以用下式来计算 δ_r .

$$\delta_r = \frac{\delta}{|x^*|} \quad (1.6)$$

例 1.2 月球到地球的平均距离 $D = D^* \pm \delta_D = 384\ 401 \pm 0.5\text{km}$; 某公共汽车站到下一站的距离 $d = d^* \pm \delta_d = 1.5 \pm 0.03\text{km}$. 则 D^* 的绝对误差限是 0.5km; d^* 的绝对误差限是 0.03km, 根据绝对误差限的概念, 第一个数据 D^* 的精确度比第二个数据 d^* 的精确度差, 但由于

$$\epsilon_r(D^*) \leq \left| \frac{0.5}{384\ 401} \right| \leq \frac{1}{1\ 000\ 000}, \quad \epsilon_r(d^*) \leq \left| \frac{0.03}{1.5} \right| \leq \frac{1}{50}$$

根据相对误差限的概念, 第一个数据 D^* 的精确度比第二个数据 d^* 的精确度越高, 这个结果比较合理, 与人们的常识一致, 所以在误差分析时相对误差更能刻画误差的特性.

1.2.3 有效数字

为了给出一种近似数的表示方法, 使之既能表示其大小, 又能表示其精确程度, 引入有效数字的概念. 在实际计算中, 当准确值 x 有很多位数时, 常按四舍五入的原则得到 x 的近似值 x^* .

定义 1.3 设 x^* 是 x 的近似值, 如果 x^* 的误差限是它的某一位的半个单位, 那么称 x 准确到这一位, 并且从这一位起直到左边第一个非零数字为止的所有数字称为 x^* 的有效数字. 具体来说, 就是先将 x^* 写成如下标准形式

$$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m \quad (1.7)$$

其中, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 0 到 9 之间的自然数且 $a_1 \neq 0$, m 为整数. 如果 x 的误差限不超过末位的半个单位, 即

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-l}, \quad 1 \leq l \leq n \quad (1.8)$$

那么称近似值 x^* 具有 l 位有效数字.

例 1.3 设 $x = 3.200\,169$, 确定其近似值 $x_1^* = 3.200\,1$, $x_2^* = 3.200\,2$, $x_3^* = 3.200$, $x_4^* = 3.2$ 分别具有几位有效数字?

解 因为 $x_1^* = 0.320\,01 \times 10^1$, $m = 1$, 则

$$|x - x_1^*| = 0.069 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$$

即 x_1^* 的误差限 $0.000\,069$ 不超过 $x_1^* = 3.200\,1$ 的小数点后第 3 位的半个单位 0.5×10^{-3} , 所以 $m - l = -3$, 得 $l = 4$. 故 $x_1^* = 3.200\,1$ 具有 4 位有效数字, 即从 $x_1^* = 3.200\,1$ 的小数点后第 3 位数 0 起直到左边第一个非零数字 3 为止的 4 个数字都是有效数字, 而最后一位数字 1 不是有效数字.

因为 $x_2^* = 0.320\,02 \times 10^1$, $m = 1$, 则

$$|x - x_2^*| = 0.31 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$$

即 x_2^* 的误差限 $0.000\,031$ 不超过 $x_2^* = 3.200\,2$ 的小数点后第 4 位的半个单位 0.5×10^{-4} , 所以 $m - l = -4$, 得 $l = 5$. 故 $x_2^* = 3.200\,2$ 具有 5 位有效数字, 即从 $x_2^* = 3.200\,2$ 的小数点后第 4 位数 2 起直到左边第一个非零数字 3 为止的 5 个数字都是有效数字.

因为 $x_3^* = 0.320\,0 \times 10^1$, $m = 1$, 则

$$|x - x_3^*| = 0.169 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$$

即 x_3^* 的误差限 $0.000\,169$ 不超过 $x_3^* = 3.200$ 的小数点后第 3 位的半个单位 0.5×10^{-3} , 所以 $m - l = -3$, 得 $l = 4$. 故 $x_3^* = 3.200$ 具有 4 位有效数字, 即从 $x_3^* = 3.200$ 的小数点后第 3 位数 0 起直到左边第一个非零数字 3 为止的 4 个数字都是有效数字.

因为 $x_4^* = 0.32 \times 10^1$, $m = 1$, 则

$$|x - x_4^*| = 0.00\,169 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}$$

即 x_4^* 的误差限 $0.000\,169$ 不超过 $x_4^* = 3.2$ 最后一位数字 2 的半个单位 0.5×10^{-1} , 所以 $m - l = -1$, 得 $l = 2$. 故 $x_4^* = 3.2$ 具有 2 位有效数字, 即 $x_4^* = 3.2$ 的所有数字都是有效数字.

特别要指出的是, $x_3^* = 3.200$ 有 4 位有效数字, 精确到 10^{-3} ; 而 $x_4^* = 3.2$ 只有 2 位有效数字, 精确到 10^{-1} . 由此可见, 有效数字尾部的零不能随意省去, 以免损失精度.

从上面的讨论可以看出,有效数字位数越多,绝对误差限就越小.同样,有效数字位数越多,相对误差限也就越小.下面给出有效数字与相对误差限的关系.

定理 1.1 设 x^* 是 x 的近似值,且

$$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$$

其中, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 0 到 9 之间的自然数且 $a_1 \neq 0, m$ 为整数.

(1) 如果 x^* 具有 $l (1 \leq l \leq n)$ 位有效数字,那么 x^* 的相对误差限为 $\frac{1}{2a_1} \times 10^{-l+1}$;

(2) 如果 x^* 的相对误差限为 $\frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-l+1}$,那么 x^* 至少具有 l 位有效数字.

证明 (1) 因为 x 具有 l 位有效数字,所以由定义 1.3 知

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-l}$$

又因为 $|x^*| \geq a_1 \times 10^{m-1}$, 所以

$$\frac{|x - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-l}}{a_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-l+1}$$

(2) 因为 $|x^*| \leq (a_1+1) \times 10^{m-1}$, 所以

$$\begin{aligned} |x - x^*| &= \frac{|x - x^*|}{|x^*|} \cdot |x^*| \leq \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-l+1} \times (a_1+1) \times 10^{m-1} \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{m-l} \end{aligned}$$

故由定义 1.3 知 x 至少具有 l 位有效数字.

例 1.4 已知 $\pi = 3.141\,592\,653\,589\,79\cdots$, 分别取 $\pi_1^* = 3$ 、 $\pi_2^* = 3.14$ 、 $\pi_3^* = 3.141\,6$ 作为 π 的近似值,试求它们各有多少位有效数字?

解 由于 $\pi_1^* = 3 = 0.3 \times 10^1$, 绝对误差限为

$$|\varepsilon(\pi_1^*)| = 0.141\,5\cdots \leq 0.5 \times 10^{-1+1}$$

则 π_1^* 精确到个位,从这一位到左面第一位非零数字 3 只有 1 位数字, π_1^* 有 1 位有效数字.

由于 $\pi_2^* = 3.14 = 0.314 \times 10^1$, 绝对误差限为

$$|\varepsilon(\pi_2^*)| = 0.001\,59\cdots \leq 0.5 \times 10^{-3+1}$$

则 π_2^* 精确到 10^{-2} ,从这一位到左面第一位非零数字 3 一共有 3 位数字,因此 π_2^* 有 3 位有效数字.

由于 $\pi_3^* = 3.141\,6 = 0.314\,16 \times 10^1$, 绝对误差限是

$$|\varepsilon(\pi_3^*)| = 0.000\,007\,4\cdots \leq 0.5 \times 10^{-5+1}$$

则 π_3^* 精确到 10^{-4} ,从这一位到左面第一位非零数字 3 一共有 5 位数字,所以 π_3^* 有 5 位有效数字.

例 1.5 设 $\sqrt{5}$ 的近似值 x^* 的相对误差不超过 0.1%,问 x^* 至少具有几位有效数字?

解 设 x^* 至少具有 l 位有效数字,因为 $\sqrt{5}$ 的第一个非零数字是 2,即 x^* 的第一位有效数字 $a_1 = 2$,根据题意及定理 1.1 知

$$\frac{|\sqrt{5} - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-l+1} = \frac{1}{2 \times 2} \times 10^{-l+1} \leq 10^{-3}$$

得 $l \geq 3.398$,故取 $l = 4$,即 x^* 至少具有 4 位有效数字,即 $x = 2.236$,其相对误差不超过 0.1%.

例 1.6 已知 $x = \sqrt{50}$ 的近似值 x^* 的相对误差限为 0.5%，试问 x^* 至少几位有效数字？

解 由于 $\sqrt{50}$ 的第一位数字是 7，所以 x^* 的第一位数字是 $d_1 = 7$ ，根据定理 1.1 可知，当 x^* 的相对误差限满足

$$\epsilon_r^*(x) \leq \frac{5}{d_1 + 1} \times 10^{-n}$$

时， x^* 至少有 n 位有效数字。而当 $n=2$ 时，

$$\epsilon_r^*(x) = 0.5\% = \frac{5}{1\,000} = \frac{5}{9+1} \times 10^{-2} \leq \frac{5}{7+1} \times 10^{-2}$$

所以 x^* 至少两位有效数字时，其相对误差限为 0.5%。

由定义 1.3 和定理 1.1 可知，具有 l 位有效数字的近似数 x^* 的绝对误差限为 $0.5 \times 10^{m-l}$ ，在 m 相同的情况下， l 越大则 10^{m-l} 的值越小。所以，对同一个量的不同近似值，有效数字位越多，则绝对误差限越小，并且有效数字位数可刻画近似数的精确度，相对误差限与有效数字的位数有关，有效数字位越多，相对误差限也越小；有效数字位越少，则相对误差限越大。

1.2.4 数值运算的误差估计

数值计算中误差产生与传播的情况非常复杂，参与运算的数据往往都是些近似数，它们都带有误差。而这些数据的误差在多次运算中又会进行传播，使计算结果产生一定的误差，这就是误差的传播问题。下面介绍利用函数的泰勒公式来估计误差的传播，这也是误差估计常用的一种方法。

1. 函数计算的误差估计

设一元函数 $y = f(x)$ ， x^* 为自变量 x 的近似值， $\epsilon(x^*)$ 为 x^* 的绝对误差， $y^* = f(x^*)$ 为函数的近似值， $\epsilon(y^*)$ 为 $y^* = f(x^*)$ 的绝对误差，利用泰勒展开式可得

$$f(x) - f(x^*) = f'(x^*) \cdot (x - x^*) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x^*)^2$$

其中 ξ 介于 x 与 x^* 之间。取绝对值得

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x^*)| &\leq |f'(x^*)| |x - x^*| + \frac{|f''(\xi)|}{2} (x - x^*)^2 \\ &\leq |f'(x^*)| \epsilon^*(x) + \frac{|f''(\xi)|}{2} (\epsilon^*(x))^2 \end{aligned}$$

假定 $f'(x^*) \neq 0$ ， $|f''(\xi)|$ 与 $|f'(x^*)|$ 相差不太大，可忽略 $\epsilon(x^*)$ 的二阶项，即得 y^* 的绝对误差和相对误差分别为

$$\epsilon(y^*) \approx f'(x^*) \epsilon(x^*) \quad (1.9)$$

$$\epsilon_r(y^*) \approx \frac{f'(x^*)}{y^*} \epsilon_r^*(x) \quad (1.10)$$

以上两式中 $f'(x^*)$ 和 $\frac{f'(x^*)}{y^*}$ 分别为 x^* 对 y^* 的绝对误差和相对误差的增长因子，分别表示绝对误差限 $\epsilon(x^*)$ 和相对误差限 $\epsilon_r(x^*)$ 经传播后增大或缩小的倍数。

若 $f'(x^*) = 0$ 或 $|f'(x^*)|$ 很小，则需要考虑泰勒展开式中后面的项。特别地，若

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0$$