高等学校教学用书

初等代数教程

曹才翰　沈伯英　编著

北京师范大学出版社

初等代数教程

曹才翰　沈伯英　编著

北京师范大学出版社

初 等 代 數 教 程

曹才翰　沈伯英　编著

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京通县燕山印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：16.75　字数：356千

1986年4月第1版　1988年5月第3次印刷

印数：24 501—34 500

ISBN 7—303—00096—8/O·19

定　价：2.55 元

编 者 的 话

本书除包括师范专科学校初等代数大纲的全部内容外，还补充与加深了某些内容，因而不仅可作为师范专科学校初等代数课的试用教材，也可作为高师本科初等代数选讲的参考教材。

本书编写的指导思想是用高等数学的某些内容、观点、方法去解决并指导相应的初等代数问题。并对中学代数的一些重点内容给予必要的加深与拓广。特别注意中学代数课本中，不能或不能彻底解决的某些内容。本书力求读者读了本书以后，对今后的教学有所指导与帮助。

北京师范大学数学系余炯沛同志详细地审阅了本书，并提出了许多宝贵的意见，在此表示深切的感谢。

由于初等代数的选材、编排目前尚未定论，本书仅仅是一种尝试，再加上编者水平有限，因此本书的缺点错误在所难免，恳切盼望读者不吝予以批评指正。

曹才翰
沈伯英

目　　录

绪　言

一、关于代数的几个历史观点

“代数学”一词，来自拉丁文 algebra，它又是从阿拉伯文变来的。

公元 820 年左右，阿尔·花拉子模著了一本《代数学》，1140 年左右罗伯特把它译成拉丁文。书名是“ilm al–jabr wa′l muquabalah”．al–jabr 的意思是“还原”或“移项”．意思是说，在方程的一边去掉一项就必须在另一边加上这一项的负项使之恢复平衡．例如，若从 $x^2-7=3$ 把 -7 去掉，就必须写成 $x^2=7+3$ 才能恢复平衡．wa′l muquabalah 的意思是“对消”或“化简”．例如把 $3x$ 与 $4x$ 合并成 $7x$．或从方程两边消掉相同的项．后来第二个字渐渐被人遗忘，而 Al－jabr 这个字变成了 algebra，这就是拉丁文的代数学．

阿尔·花拉子模引入“移项、对消”算法之后，方程的概念才逐渐明确起来．因此，阿尔·花拉子模的《代数学》也可以看成是“方程的科学”．不过在这本《代数学》中，还完全没有代数符号，一切算法都用文字语言来表达．例如，我们现在写成 $x^2+10x=39$，而在他的书中是这样描述的：“根的平方和 10 个根等于 39 个单位”．

作为研究方程理论的代数的进一步发展，按其需要首先应该研究数的概念的扩充．因为如果没有负数，一次方程的

理论就不完备；解二、三次方程，不可避免要引导到无理数和虚数的产生。其次对于解方程所做的必要的计算，自然希望能够比较简便，比较直观以及容易描述，这样就导致代数符号的产生：不仅用文字来表示未知数，而且也用它来表示已知数值；逐渐地引入表示各种数学运算和关系的各种符号。

代数上的进步是引用了较好的符号体系。事实上，采取了这一步，才使代数有可能成为一门科学。韦达是第一个有意识地、系统地使用字母的人，他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂，而且用来表示一般的系数。韦达认为，代数是施行于事物的类或形式的运算方法。算术只是同数打交道的。这样，代数就一下子成为研究一般类型的形式和方程的学问了。所以，当时人们把代数看成是关于字母的计算、关于由字母表示的公式的变换、以及关于解代数方程等的科学。

继韦达之后，数学家笛卡儿关于代数学提出了一个深远的观点。他把代数看成是进行推理——特别是对抽象的和未知的量进行推理——的有力方法.他认为代数使数学机械化，因而使思考和运算步骤变得简单,而无需化很大的脑力.笛卡儿认为代数是逻辑的引伸，是处理量的一门有用的学科。这使他想到有可能创立一门范围较广的代数科学，能概括量及其他概念，并能用于研讨一切问题，甚至逻辑上的原理和方法也可能用符号来表达，而整个体系则可用之于使一切推理过程机械化。笛卡儿虽然没有创造出这样的代数学，但他毕竟是第一个提出科学的代数学的含义的人，以后的历史事实完全证实了这一点。

17 世纪以来，数学家们对一元 n 次代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的研究几乎没有中断过。他们想获得解任意次方程的较好的方法；要得到求方程近似根的较好的方法；要完成方程的理论——特别要证明每一个一元 n 次方程有 n 个根。

19 世纪初，一般代数方程的根式求解问题导致群的结构的研究。群论的出现，对于整个数学有着重要的意义。随后，代数这门科学开始在力学、物理学以及数学本身找到越来越多的象向量、矩阵、张量等等的研究对象，对于这些对象很自然地要考虑它们的运算以及运算所满足的一些性质。与此相应，诸如环、域、格、布尔代数、线性空间等多种代数系统被建立起来了。这时，代数学呈现出崭新的面貌。它的对象扩大为向量、矩阵等等。代数学从古典代数以方程为中心转变为以研究各种代数结构的性质为中心。

二、作为教学科目的中学代数

作为教学科目的中学代数与作为科学的近代代数，就其性质和内容来说，有着显著的差别。中学代数其主要特点是：

1. 内容庞杂、交错安排

中学的代数内容很庞杂，涉及到数学的许多分支。它的主要内容是：

（1）数的概念的发展

在算术数的基础上，逐步引入负数、无理数、虚数，把数集逐步从算术数集扩展到有理数集、实数集、复数集。学习在各个数集里的各种代数运算，以及在正实数里对正实数的对数运算。

除了以上四部分内容以外，还要学习等差数列与等比数列，数学归纳法，排列与组合，二项式定理，概率初步，统计初步等内容。

上面四部分内容，数的概念是基础，因为研究方程和函数都离不开它。恒等变形是工具。中学代数重点研究方程和函数，从某种意义上来说，初中是以方程为主，高中是以函数为主。如果我们把方程看作求函数零点，或看作自变量取何值时，两个函数相等，换句话说，如果我们用函数的观点来看待方程的话，那么中学的代数名曰代数，实质是属于分析的范畴。

总之，中学代数内容庞杂而繁多，很难给中学代数一个确切的定义。在内容上它偏重于分析；在要求上它偏重于计算；在结构上交叉编排。

2．严谨与量力的高度结合

作为教学科目的中学代数，它的选材、深广度、编排都要根据数学科学、中学数学教学目的、以及中学生的接受能力。这样，中学代数就要处理好严谨与量力的关系。根据这一特点，我们就不难理解课本的某些处理：如为什么有理数的加法、乘法本来是可不作任何解释的定义，但课本却用实例解释。为什么有些内容如正实数的方根的存在与唯一；正实数的对数的存在与唯一等课本避而不谈。为什么指数概念推广后，理应对指数律要逐条加以证明，但课本却用实例验证。为什么对初等函数的研究本来可用微积分的工具，但课本却只限于初等的方法。为什么课本对无理指数幂的概念只用具体的例子引入。为什么方程的同解理论课本却很少反映。为什么课本对“复数无大小”无法作出精确的解释等

等.

《初等代数教程》的任务之一，就是要加深、加宽中学代数内容，对中学代数无法回答或无法彻底回答的某些问题，从理论上给予必要的论述.

第一章　数　系

§1　数的概念的扩展

数的概念是现代数学的基本概念之一，它是人类由于生产和生活的实际需要而逐步形成并加于扩展的。首先，由于计数的需要，希腊人已经知道了自然数 1，2，… 的集N和正有理数 $\frac{p}{q}$ $(p,q\in N)$．公元六世纪，印度数学家运用了“0”．我国古代也在筹算中利用空位来表示“0”．阿拉伯人受印度的影响而发明了代数之后，提出了求解象 $3x+2=0$ 一类的方程，“负数”也就出现了，以后，笛卡儿把正负数用有向线段来表示。我国古代数学巨著《九章算术》（公元一世纪）已提出了正负数的不同表示法和正负数的加减法则，这是数学史上一大成就。

公元六世纪，希腊数学家毕达哥拉斯为了得到不可公度线段的比的精确数值而导致无理数概念的产生，但这时对实数系统 R 还仅停留在直观的理解上．直到十九世纪七十年代才由代德金、康托、维尔斯托拉斯建立了严格的实数理论（代德金用“分划”来定义无理数；康托用有理“基本序列”来定义无理数；维尔斯托拉斯则用递增有界数列来定义无理数）．由此，在这个时期数学得到了一些重大的发展，

尤其集合论很快形成一个独立的分支，并渗透到所有的数学领域中去。对数系来说，由于运用集合论，使它的理论更趋完备。其结果是：从系统 Q 构造出系统 R，从 Z 构造出 Q，从 N 构造出 Z。以及发现：从皮亚诺的著名公理可以推出 N 的所有性质（这里 N 是自然数集，Z 是整数集，Q 是有理数集，R 是实数集）。

数的概念进一步扩展——虚数的引进，它不是首先由于量的度量的需要，而是为了解决数学本身所提出的问题。数学家们发现了比 Q 更大的数系对于二次、三次和四次方程的解法是必要的。1545 年，数学家卡丹引入了新的数——虚数 $i=\sqrt{-1}$。1572 年意大利数学家邦别利第一次在代数里给复数的运算以正式的论据后，对这些数才有了进一步的认识。十九世纪，数学家高斯用他的代数基本定理，说明了复数系为一切多项式方程提供了足够的解后，复数得到了广泛的应用。

数系的扩展一般采用两种形式：

一种是把新元素加到已建立的数系中而扩展。这种扩展和数系的历史发展很相近，也与中小学数学课程关于数的扩展过程相当。

中小学数学课程关于数的扩展过程如下：

自然数集 $\xrightarrow{\text{(添零)}}$ 扩大的自然数集 $\xrightarrow{\text{(添分数)}}$ 算术数集 $\xrightarrow{\text{(添负数)}}$ 有理数集 $\xrightarrow{\text{(添无理数)}}$ 实数集 $\xrightarrow{\text{(添虚数)}}$ 复数集。

另一种是科学的数系的扩展。从理论上构造一个集合，即通过定义和等价类来建立新数系，然后指出新数系的某一个子集是和以前数集是同构的。

作为科学的数系建立过程一般采用如下的扩展过程：

自然数集（N）$\longrightarrow$整数集（Z）$\longrightarrow$有理数集（Q）$\longrightarrow$实数集（R）$\longrightarrow$复数集（C）。

数系扩展的这两种形式，本章都准备采用。这是因为，一方面让我们的扩展形式尽可能与中学数学课本中的扩展形式相接近，另一方面，也让读者熟悉用代数结构的观点和用严格公理系统处理数的概念的扩展的方法。

不论采取那一种扩展方法，都应遵循下面的原则（设集合 A 扩展后得到集合 B）：

(1) $A \subset B$。

(2) A 的元间所定义的一些基本关系或运算，在 B 的元间也是有定义的，且 B 的元间的这些运算和关系，对于 B 中 A 的元来说，与原来 A 的元的运算和关系是相同的。

(3) A 中不是永远可行的某种运算，在 B 中永远可行。

(4) B 应当是在 A 的所有具有上述三个性质的扩展中，在同构的观点下，是唯一的最小的扩展（如把自然数集扩展到整数集，而不是立即扩展到实数集）。

有一点必需指出的：数集的每一次扩展，解决了原数集的某些矛盾，从而应用范围扩大了，但每次扩展也失去了一些性质，如实数域中有顺序性，但在复数域中失去了。

§2 自然数集

建立自然数的理论，要根据一些原始概念和公理来引进其他的概念（定义）和定理，由于所选的原始概念和公理的不同，自然数的理论也不同，一般认为有两种：基数理论和序

数理论。

2.1 基数理论

基数理论是以原始概念“集合”为基础的。

定义 1.2.1 一切等价（非空）集合的共同特征的标志叫做基数。有限集合的基数叫做自然数。

只含一个元素的集合$\{a\}$是有限集，它的基数记作1；

在$\{a\}$中添加一个元素b，得$\{a,b\}$，也是有限集，它的基数记作2；

在$\{a,b\}$中添加一个元素c，得$\{a,b,c\}$，也是有限集，它的基数记作3；

……

从而得到自然数为

$$1,2,3,\cdots.$$

定义 1.2.2 如果有限集A和B的基数分别是a和b，则

(1) 当$A\sim B$时，就说a等于b，记作$a=b$。

(2) 当$A'\subset A$，$A'\sim B$时，就说a大于b，记作$a>b$。

(3) 当$B'\subset B$，$A\sim B'$时，就说a小于b，记作$a<b$。

由于对于有限集A,B来说，A与B等价、A的真子集与B等价、B的真子集与A等价，这三种情况必有且仅有一种成立，所以a，b之间有且仅有下面三种关系之一成立：

$a=b$；　$a>b$；　$a<b$。（三分律）

因为等价集合具有自反性、对称性以及传递性，所以关于自然数的“等于”关系也有：

自反性：$a=a$；

对称性：如果 $a=b$，那么 $b=a$；

传递性：如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$。

关于自然数的不等有以下重要结论：

(1) 对逆性：如果 $a>b$，那么 $b<a$；
如果 $a<b$，那么 $b>a$。

(2) 传递性：如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$；
如果 $a<b$，$b<c$，那么 $a<c$。

(3) 如果 $a>b$，$b=c$，那么 $a>c$。

(4) 如果 $a<b$，$b=c$，那么 $a<c$。

这些结论可直接由定义证出，也可由前者来证后者。例如证（1），由 $a>b$，有 $A'\sim B$，从而有 $B\sim A'$，所以有 $b<a$。

又如证（4），如果 $a\nless c$，由三分律或者 $a=c$ 或 $a>c$。如果 $a=c$，这时由 $b=c$，有 $c=b$，于是有 $a=b$，这与 $a<b$ 矛盾。如果 $a>c$，且 $c=b$，这时由（3）则有 $a>b$，也与 $a<b$ 矛盾，所以 $a<c$。

我们把自然数按从小到大的次序排列出来就得到自然数列：

$$1,2,3,\cdots。$$

自然数的运算法则

1. 自然数的加法

定义 1.2.3 设 $A\cap B=\phi$，有限集 A，B，C 的基数分别是 a，b，c。如果 $C=A\cup B$，那么 c 叫做 a 与 b 的和，记作 $a+b=c$。a 和 b 叫做加数。求和的运算叫做加法。

自然数的加法满足交换律与结合律：

加法交换律：$a+b=b+a$ （$\because A\cup B=B\cup A$）。

加法结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$ （$\because A\cup(B\cup C)=$