国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

基于循证科学的建设工程项目实施状态诊断理论与应用

Diagnosis Theory and its Application to Analyze Implement States of Construction Project Based on Evidenced Science

侯学良　著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

国家科学技术学术著作出版基金
电子信息科技专著出版专项资金 资助出版

基于循证科学的
建设工程项目实施状态诊断理论与应用

Diagnosis Theory and its Application to Analyze Implement States of Construction Project Based on Evidenced Science

侯学良 著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是为大学高年级本科生和硕士研究生开设数值计算方法或数值分析课程而专门编写的一本教科书. 全书共分 9 章，内容涉及数值分析基础、函数逼近、数值微积分、线性方程组数值解法、非线性方程数值解法、最优化方法、常微分方程初值问题数值解法、常微分方程边值问题数值解法及偏微分方程数值解法. 本书以介绍通用数值算法为基础，同时也引入了当代高性能计算的知识内容. 书中既注重算法理论的严谨性，又突出了算法的实际计算，并配备了所有常用算法的 Matlab 程序，从而使算法理论与算法实现形成一体化. 此外，本书还配备了一定量的习题，其中有些是理论分析题，有些是上机实验题. 学生通过认真学习本教材、完成其习题可以系统地掌握科学计算知识，并应用于相关专业领域.

本书取材适当，用语深入浅出，通俗易懂，除适合于学生作为教材外，也可作为科研工作者和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

科学计算引论/张诚坚，覃婷婷编. 一北京：科学出版社，2011. 5

普通高等教育“十二五”规划教材. 华中科技大学数学创新教材

ISBN 978-7-03-030970-9

Ⅰ. ①科… Ⅱ. ①张…②覃… Ⅲ. ①科学计算一高等学校一教材 Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 079693 号

责任编辑：曾　莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 5 月第　一　版　开本：B5(720×1000)

2011 年 5 月第一次印刷　印张：17 1/4

印数：1—3 000　字数：338 000

定价：29.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

科学计算是伴随着电子计算机的出现而迅速发展并获得广泛应用的交叉性学科，是数学与计算机科学应用于高科技领域所必不可少的纽带和工具．高效的计算方法与高速计算机的研究是同等重要的，科学计算作为认知世界、改造世界的一种重要手段，已与理论分析、科学实验共同成为当代进行科学探索活动的三大手段．《国家中长期科学和技术发展规划纲要》中指出：信息技术将继续向高性能、低成本、普适计算和智能化等主要方向发展，寻求新的计算与处理方式及其物理实现是未来信息技术领域面临的重大挑战．积极开展对科学计算领域的研究非常有利于诸工程学科的自主知识创新和人才培养．科学计算在当今众多高新科技领域已显示强大的技术支撑作用，并与其他学科结合形成了许多新兴交叉科学，如计算物理、计算力学、计算化学、计算材料学、计算分子生物学、计算弹道学、计量经济学等．科学计算应用于诸工程领域形成的数字仿真技术替代物理实验，既大大缩短了科学探索的时间，同时也为国民经济节省了大量的人力、物力和财力．鉴此，科学计算是每一位科研人员和工程技术人员所必备的知识，也是每一位理工科大学生必修的重要课程．本书正是为顺应这一知识需求而编写的．

科学计算包含十分丰富的内容，但是作为一门基础课教材，不可能也不必要面面俱到，重要的是使读者通过一些典型、通用的数值计算方法掌握其方法构造的基本思想及其实现技巧，从而达到触类旁通的功效．本书取材适当，用语深入浅出，通俗易懂，以介绍通用数值算法为基础，同时也引入了现代算法的知识内容．书中既注重算法理论的严谨性，又突出了算法的实际计算，并配备了所有常用算法的 Matlab 程序，从而使算法理论与算法实现形成一体化．

全书共分 9 章，内容涉及数值分析基础、函数逼近、数值微积分、线性方程组数值解法、非线性方程数值解法、最优化方法、常微分方程初值问题数值解法、常微分方程边值问题数值解法及偏微分方程数值解法．全书讲授约需 68 学时，前 5 章是科学计算知识内容中最基础的部分，其课堂教学可在 36 学时内完成；后 4 章则具有相对独立性，每章授课约需 8 学时，各学校可按其教学计划规定的学时选讲．

在编写本书过程中，华中科技大学博士生李东方、陈浩、邓定文等给予了大力

帮助，同时得到了本校教务处、数学与统计学院的支持与鼓励，编者对此深表感谢.

由于编者水平所限，仓促付梓，书中疏漏之处在所难免，诚望读者指正.

张诚坚　覃婷婷

2011 年 1 月于华中科技大学

前 言

建设工程项目管理是一项比其他管理约束性更强的工程实践活动。在其管理过程中，不仅需要其所需人员、材料、设备、资金等有形资源的保障，更需要与其紧密相关的政策法规、相关部门、周围环境、管理组织与技术等无形资源的大力支持与配合。这意味着，若要确保建设工程项目在其实施过程中始终处于健康状态，就需要项目管理者通过科学有效的管理方法，及时分析和识别那些可能给工程项目正常实施带来不利影响的因素并对其予以有效地处理。基于这一目的，本书以我国近年来建设工程项目中所出现的各种主要问题为研究对象，基于循证科学和医学诊断与建设工程项目管理对项目异常状态的识别与对比分析，提出了对建设工程项目实施状态进行科学诊断的新思想，并通过系统的理论分析和实证研究，得出了若干新的研究成果，为建设工程项目管理人员和有关工程项目管理研究者提供了又一新的参考资源。

本书为了便于读者在参阅的过程中对著者的研究思想、研究方法、研究过程和研究结果有个较为全面的了解和把握并能有所收获，全书以建设工程项目为例，按照具有普适性的思维模式和习惯性的知识汲取路线将此书分为 7 章，这 7 章所阐述的主要内容相互衔接，互为因果，最终的研究成果也是在理论与实际相结合的基础上逐步推证得出的；并且前一章是后一章的基础，后一章是前一章的深化。按照这 7 章的顺序阅读，读者即可了解和掌握本书所述的理论框架并获知相关知识。

本书新知识点主要呈现在 3 个方面。一是将循证科学思想首次引入到了建设工程项目管理领域，以探究这一方法解决建设工程项目管理问题的可行性和有效性。二是基于工程相似学和医学诊断理论，将其思想与分析问题的方法借鉴到了建设工程项目管理领域，为今后更广泛地利用这一其他领域的管理方法来分析和研究非医学领域的管理问题做了尝试。三是以工程项目管理学、粗集理论和知识工程等相关学科理论为工具，就如何有效地识别和诊断建设工程项目中存在的问题进行了深入系统地论述。在此论述中，不仅分别从产生项目病态表象的要素和过程两个角度出发，详细分析了诱发项目病症的 5 个要素及其使项目产生劣化的机理，而且利用 RS 最大泛化算法和约简规则在数据缩减与生成方面所具有的特殊作用，提出了特征变量及其参数与映射指标的推理模型，有

效地避免了目前工程项目管理中指标确定经验化的广泛性问题，为科学地建立工程项目实施状态诊断指标体系提供了新的方法和途径。同时在此基础上，根据失态判据分析的一般性原理，提出了对建设工程项目实施状态进行分级判定的新标准和诊断结果梯级集成的新方法。为了使读者更好地理解和掌握这一研究成果，本书最后一章以一个正在实施的建设工程项目为实际验证对象，就如何对工程项目分别进行微观诊断和宏观评判进行了详细阐述，为读者提供了更为直接且深刻的研究成果价值感受。

在本书出版之际，衷心期望此书能给从事建设工程项目管理研究的有关科技人员和研究生、从事建设工程项目管理的政府主管部门人员和从事建筑企业工程项目管理的领导者与管理者带来一定的益处。同时，囿于著者的研究水平，书中肯定存在不足甚至错误之处，欢迎读者批评指正，为提高我国的建设工程项目管理水平而共同努力。

本书中的相关理论和实证研究先后得到了原国家建设部、国家质检中心和有关省市建设主管部门，以及广州建设集团等多家建设工程企业的大力支持和帮助，特别是理论研究成果在第十六届亚运会主会场海心沙工程项目中进行了大量的实证并取得了有效的成果，并先后成为中国博士后科研基金资助项目、河北省自然科学基金项目、北京市优秀人才培养资助项目、华北电力大学（中央高校）科研基金项目和国家自然科学基金项目。在对调研结果进行统计分析和理论研究的过程中，西安建筑科技大学的卢梅博士也从始至终参与了本项目的研究，付出了艰辛的劳动。在本书的写作过程中，我国著名的项目管理专家、国家优秀教师、华北电力大学管理科学与工程博士后流动站博士生导师乌云娜教授也给予了极大的关怀，并在百忙之中为本书作序。在此书出版之际，电子工业出版社也给予了极大的支持和帮助，使本书得以顺利出版，在此向他们一并致以最崇高的敬意和最诚挚的感谢。

著　者

2011 年 3 月于北京

目　　录

第1章　数值分析基础

科学计算是伴随着电子计算机的出现而迅速发展并获得广泛应用的一种技术，是数学与计算机科学相结合并应用于高科技领域必不可少的桥梁和纽带. 高效的计算方法与高速计算机的研究是同等重要的，科学计算作为认知世界、改造世界的一种重要手段，已与理论分析、科学实验共同成为当代进行科学探索活动的三大手段. 从宏观天体运动学到微观纳米技术，从工程系统到非工程系统，无一能离开科学计算，它使各科学领域从定性分析走向定量分析，从粗糙走向精密. 科学计算的强大功能表明：它是当今从事科学研究与应用的人们必不可少的知识与技术. 本章将主要介绍研究数值算法必备的理论基础.

1.1　矩阵理论

数值算法与数值分析涉及大量的矩阵知识，其中大部分理论已在相关代数课程中给予了介绍，本节作为矩阵理论知识的一个补充，将重点叙述矩阵的 Kronecker 积及矩阵与向量的范数性质，其相关知识更详细的描述可参见文献[1]-[6].

1.1.1　Kronecker 积

设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times m}$，$B=(b_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则称下列分块矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

为矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积，记为 $A\otimes B$. 由 Kronecker 积的定义可直接推得它具有如下性质：

(1) $(\lambda A)\otimes(\mu B)=\lambda\mu(A\otimes B)$，$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$；

(2) $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$；

(3) $(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$；

(4) $A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$；

(5) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = [\mathrm{tr}(A)][\mathrm{tr}(B)]$;

(6) $(A \otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}}$;

(7) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$;

(8) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$,其中矩阵 A,B 均可逆.

Kronecker 积除了上述较为明显的性质,还具有下述重要性质:

定理 1.1 若 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$,$B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则存在排列阵 $P \in \mathbb{R}^{mn\times mn}$ 使得

$$P^{\mathrm{T}}(A \otimes B)P = B \otimes A.$$

证明 既然通过行列交换阵 $A \otimes I_n$ 与 $I_n \otimes A$ 可互相转换,因此存在排列阵 $P \in \mathbb{R}^{mn\times mn}$ 使得

$$P^{\mathrm{T}}(A \otimes I_n)P = I_n \otimes A.$$

同理,排列阵 P 也可使

$$P^{\mathrm{T}}(I_m \otimes B)P = B \otimes I_m.$$

故由 $P^{\mathrm{T}}P = I_{mn}$ 及性质(7) 有

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{T}}(A \otimes B)P &= P^{\mathrm{T}}[(A \otimes I_n)(I_m \otimes B)]P \\ &= [P^{\mathrm{T}}(A \otimes I_n)P][P^{\mathrm{T}}(I_m \otimes B)P] \\ &= (I_n \otimes A)(B \otimes I_m) \\ &= B \otimes A. \blacksquare \end{aligned}$$

记

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} c_{ij}x^i y^j, \quad x,y \in \mathbb{C},$$

$$P(A,B) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} c_{ij}(A^i \otimes B^j), \quad A \in \mathbb{C}^{m\times m}, B \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

定理 1.2 若$\{\lambda_i\}_{i=1}^m$,$\{\mu_i\}_{i=1}^n$ 分别为矩阵$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$及矩阵$B \in \mathbb{C}^{n\times n}$的特征值,则集

$$\{P(\lambda_i,\mu_j): i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n\}$$

中的元素为矩阵 $P(A,B)$ 的特征值.

证明 设有矩阵 $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$及 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$,使得

$$PAP^{-1} = J_A, \qquad QBQ^{-1} = J_B,$$

其中 J_A,J_B 分别为 A,B 的 Jordan 标准型. 而 J_A^k,J_B^l 分别为带主对角元$\{\lambda_i^k\}_{i=1}^m$,$\{\mu_j^l\}_{j=1}^n$ 的上三角阵,则 $J_A^k \otimes J_B^l$ 是带主对角元$\{\lambda_i^k\mu_j^l: i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n\}$ 的上三角阵. 进而 $P(J_A,J_B)$ 是带主对角元$\{P(\lambda_i,\mu_j): i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n\}$ 的上三角阵,故以下仅需证明 $P(A,B)$ 与 $P(J_A,J_B)$ 有相同特征值.

注意到

$$\begin{aligned} J_A^k \otimes J_B^l &= (PA^kP^{-1}) \otimes (QB^lQ^{-1}) \\ &= (P \otimes Q)(A^k \otimes B^l)(P^{-1} \otimes Q^{-1}) \end{aligned}$$

$$= (P \otimes Q)(A^k \otimes B^l)(P \otimes Q)^{-1},$$

则

$$P(J_A, J_B) = (P \otimes Q)P(A,B)(P \otimes Q)^{-1},$$

即 $P(J_A, J_B)$ 与 $P(A,B)$ 相似，故其有相同的特征值. ■

当分别取

$$P(x,y) = xy, \qquad P(x,y) = x + y,$$

$$f(x) := P(x,0) = \sum_{i=0}^{n} c_{i0} x^i,$$

并设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$，$B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值分别为 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$，$\{\mu_i\}_{i=1}^n$ 时，由定理 1.2 可直接推得

推论 1.1 矩阵 $A \otimes B$ 有特征值 $\{\lambda_i \mu_j : i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n\}$.

推论 1.2 矩阵 $(I_n \otimes A) + (B \otimes I_m)$ 有特征值

$$\{\lambda_i + \mu_j : i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n\}.$$

推论 1.3 矩阵 $f(A)$ 有特征值 $\{f(\lambda_i) : i = 1,2,\cdots,m\}$.

1.1.2 范数

在检测算法优劣的过程中，将涉及数值解的误差估计、敏度分析、稳定性及收敛性等，这些评价指标将主要用范数来描述，为此本小节引入向量范数、矩阵范数及其相关基础知识.

定义 1.1 称 n 维实空间 $\mathbb{R}^n$ 上的一个非负函数 $\|\cdot\|$ 为**范数**，若其满足

(1) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$，$\forall x \in \mathbb{R}^n$；

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$，$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 及 $\forall x \in \mathbb{R}^n$；

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

对一维实空间 $\mathbb{R}$ 而言，$\|x\|$ 即为绝对值 $|x|$. 下面主要讨论 $l_p (p = 1,2,\cdots)$ 范数：

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

特别地，l_∞ 范数即为

$$\|x\|_\infty := \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的任意两种范数有如下等价性定理：

定理 1.3 若 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的任意两种范数，则存在常数 α，β：$0 < \alpha \leqslant \beta$ 使得

$$\alpha \|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \beta \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

定义 1.2 设有向量序列 $\{x^{(k)} : x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n\}$，若

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

则称序列$\{x^{(k)}\}$收敛于向量$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

定理 1.4 在空间$\mathbb{R}^n$中,序列$\{x^{(k)}\}$收敛于向量x的充要条件是存在范数$\|\cdot\|$,使得

$$\lim_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x \| = 0.$$

证明 一方面,若序列$\{x^{(k)}\}$收敛于向量x,则

$$\lim_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x \|_\infty = 0.$$

另一方面,若存在范数$\|\cdot\|$使得

$$\lim_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x \| = 0,$$

则由定理 1.3,存在常数α,β:$0 < \alpha \leqslant \beta$,使得

$$\alpha \| x^{(k)} - x \| \leqslant \| x^{(k)} - x \|_\infty \leqslant \beta \| x^{(k)} - x \|.$$

因此,由夹逼定理知$\lim\limits_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x \|_\infty = 0$,故$\{x^{(k)}\}$收敛于$x$. ■

定义 1.3 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$\|\cdot\|$为$\mathbb{R}^n$中的某范数,$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$,则称

$$\max_{x\in S} \| Ax \|$$

为矩阵A的从属于该向量范数的范数,记为$\|A\|$.

利用定义 1.3 可直接推得n级单位矩阵满足$\|I\| = 1$,且其矩阵范数具有如下性质:

(1) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$有$\|A\| \geqslant 0$,且

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0;$$

(2) $\forall k \in \mathbb{R}$及$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,有

$$\|kA\| = |k| \, \|A\|;$$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^n$及$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,有

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \, \|x\|;$$

(4) $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,有

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \qquad \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|.$$

由矩阵范数的定义及其性质可知,矩阵范数与它从属的向量范数之间存在着一定的相互关系. 特别地,性质(3)称为两者之间的**相容性**.

定理 1.5 设矩阵$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$,则与$l_1, l_2, l_\infty$范数相容的矩阵范数分别为

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{1.1}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^{\mathrm{T}}A)}, \tag{1.2}$$

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |, \tag{1.3}$$

其中 $\rho(\cdot)$ 为矩阵的谱半径,满足

$$\rho(B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \lambda_i^B |;$$

λ_i^B 为方阵 B 的特征值.

证明 此处仅证式(1.2),其余两式类似可证. 由于 $A^{\mathrm{T}}A$ 为对称非负定阵,则其所有特征值 λ_i 非负,且存在 n 级正交方阵 H,使得

$$A^{\mathrm{T}}A = H^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_i)H,$$

其中

$$\mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$\forall x \in \{x: \| x \|_2 = 1\}$,若记 $y = Hx = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$,则有

$$\| y \|_2^2 = x^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}Hx = \| x \|_2^2 = 1$$

及

$$\| Ax \|_2^2 = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = (Hx)^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_i)(Hx) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i.$$

从而

$$\| A \|_2 \leqslant \sqrt{\rho(A^{\mathrm{T}}A)}.$$

另一方面,若设 $\tilde{\lambda}$ 为矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的任一特征值,其单位特征向量为$\tilde{x}$,则

$$\| A \|_2^2 \geqslant \| A\tilde{x} \|_2^2 = \tilde{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\tilde{x} = \tilde{\lambda} \| \tilde{x} \|_2^2 = \tilde{\lambda} \geqslant 0.$$

因此,$\| A \|_2 \geqslant \sqrt{\rho(A^{\mathrm{T}}A)}$. 故式(1.2) 得证. ■

定理 1.6 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,则对任意矩阵范数 $\| \cdot \|$ 有 $\rho(A) \leqslant \| A \|$.

证明 设 λ 为矩阵 A 的任一特征值,x 为其相应的特征向量,则

$$| \lambda | \, \| x \| = \| \lambda x \| = \| Ax \| \leqslant \| A \| \, \| x \|,$$

即 $| \lambda | \leqslant \| A \|$. 故 $\rho(A) \leqslant \| A \|$. ■

此外,矩阵范数与谱半径之间还存在如下关系:

定理 1.7 $\forall \varepsilon > 0$,必存在$\mathbb{R}^{n\times n}$中的某范数 $\| \cdot \|$,使得

$$\| A \| \leqslant \rho(A) + \varepsilon, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

定义 1.4 设有矩阵序列$\{A^{(k)}: A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n\times m}\}$,若

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m,$$

则称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于矩阵 $A = (a_{ij})$,记为$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$.

矩阵序列有类似于向量序列的收敛性结果.

定理 1.8 设有矩阵序列$\{A^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$,则$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)} = A$的充要条件是存在矩阵范数 $\|\cdot\|$,使得

$$\lim_{k\to\infty}\|A^{(k)} - A\| = 0.$$

进一步有如下定理:

定理 1.9 $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$\lim\limits_{m\to\infty}A^m = 0$的充要条件是$\rho(A) < 1$.

证明 根据定理 1.8,本定理仅需证明:对某矩阵范数 $\|\cdot\|$,$\lim\limits_{m\to\infty}\|A^m\| = 0$的充要条件是$\rho(A) < 1$. 事实上,一方面由定理 1.6,有

$$[\rho(A)]^m = \rho(A^m) \leqslant \|A^m\| \to 0 \quad (m\to\infty),$$

从而$\rho(A) < 1$. 另一方面,由于$\rho(A) < 1$,则存在$\varepsilon > 0$,使得

$$\rho(A) + \varepsilon < 1.$$

进一步,由定理 1.5 存在$\mathbb{R}^{n\times n}$中某范数 $\|\cdot\|$ 使得

$$\|A^m\| \leqslant \|A\|^m \leqslant (\rho(A)+\varepsilon)^m \to 0 \quad (m\to\infty).$$

由此得

$$\lim_{m\to\infty}\|A^m\| = 0.$$

定理 1.10 设矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,若存在矩阵范数 $\|\cdot\|$,使得 $\|A\| < 1$,则$I - A$非奇异,且有

$$\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|},$$

其中I为n级单位阵.

证明 由于

$$\rho(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i^A| \leqslant \|A\| < 1,$$

则$I - A$非奇异,且$\lim\limits_{m\to\infty}A^m = 0$. 又

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^k) = I - A^{k+1},$$

即

$$I+A+A^2+\cdots+A^k = (I-A)^{-1}(I-A^{k+1}),$$

令$k\to\infty$,即得

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}A^k.$$

由此得

$$\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}. \blacksquare$$

1.2 差分方程

差分方程是微分方程的离散形式,微分方程数值方法主要用差分方程描述.

因此,本节将介绍差分方程的部分理论,为进一步学习微分方程数值方法奠定一个良好的知识基础. 差分方程理论更详尽的知识可参见文献[5]-[8]等.

1.2.1　差分

下面引入差分概念及其相关性质.

定义 1.5　设 $x:[a,b]\to\mathbb{C}^d$ 为给定函数,记

$$t_i=a+ih,\qquad t_{i\pm\frac{1}{2}}=t_i\pm\frac{1}{2}h\in[a,b],$$

$$x_i=x(t_i),\qquad x_{i\pm\frac{1}{2}}=x(t_{i\pm\frac{1}{2}}),\quad i=0,1,2,\cdots,$$

则分别称

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\qquad \nabla x_i=x_i-x_{i-1},\qquad \delta x_i=x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}$$

为 $x(t)$ 在节点 t_i 处以 h 为步长的**一阶向前差分**、**一阶向后差分**和**一阶中心差分**. 符号 Δ,∇,δ 分别称为**向前差分算子**,**向后差分算子**和**中心差分算子**.

在相继分析中,也将用到**恒等算子** I 及**位移算子** E:

$$Ix_i=x_i,\qquad Ex_i=x_{i+1}.$$

由其定义易验证,算子 Δ,∇,δ,I,E 均是线性算子,可两两交换,且任意两个算子和的幂可按二项式展开. 此外,各算子之间还存在着一些相互关系,例如,由

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=Ex_i-Ix_i=(E-I)x_i,$$

有

$$\Delta=E-I. \tag{1.4}$$

类似地,可导出

$$\nabla=I-E^{-1},\qquad \delta=E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

自一阶差分出发,可依次定义高阶差分,一般有

$$\Delta^m x_i=\Delta(\Delta^{m-1}x_i),\qquad \nabla^m x_i=\nabla(\nabla^{m-1}x_i),\qquad \delta^m x_i=\delta(\delta^{m-1}x_i).$$

根据该定义及算子关系(1.4)和(1.5),进一步有

$$\Delta^m x_i=(E-I)^m x_i=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}E^{m-j}x_i=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}x_{m+i-j}, \tag{1.6}$$

$$\nabla^m x_i=(I-E^{-1})^m x_i=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}E^{-m+j}x_i=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}x_{i+j-m}, \tag{1.7}$$

$$\delta^m x_i=(E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}})^m x_i=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}E^{j-\frac{m}{2}}x_i=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}x_{i+j-\frac{m}{2}}, \tag{1.8}$$

其中

$$\binom{m}{j}=\frac{m!}{j!(m-j)!}.$$

1.2.2 线性差分方程

形如

$$F(n;x_n,\Delta x_n,\cdots,\Delta^k x_n)=0,\quad x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k}\in\mathbb{C}^d \tag{1.9}$$

且 x_n,x_{n+k} 均显含于式(1.9)中的方程称为 k **阶差分方程**. 由式(1.6)可知,方程(1.9)也可等价地化为如下方程:

$$G(n;x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k})=0,\quad x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k}\in\mathbb{C}^d. \tag{1.10}$$

为简单见,以下重点介绍标量线性差分方程:

$$\sum_{j=0}^{k}a_j(n)x_{n+j}=b_n,\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{1.11}$$

其中系数 $a_j(n),b_n\in\mathbb{C}$,且 $a_k(n)a_0(n)\neq 0$. 若给定其 k 个初始值 $x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}$,则由式(1.11)即可求出其解序列 $\{x_n\}$. 特别地,若 $b_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,则称之为**齐次的**,否则称为**非齐次的**.

线性差分方程具有与线性常微分方程相类似的下列性质,其可由差分方程解的定义直接获证.

定理 1.11 若方程(1.11)为齐次差分方程,$x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(m)}$ 为该方程的一组特解,则其任意线性组合 $\sum_{i=1}^{m}c_ix_n^{(i)}$ 仍为该方程的解,其中诸 c_i 为任意常数.

定理 1.12 若方程(1.11)为齐次差分方程,$x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(k)}$ 为该方程的一组线性无关解(即**基本解组**),则该方程有通解 $\sum_{i=1}^{k}c_ix_n^{(i)}$,其中诸 c_i 为任意常数.

定理 1.13 $x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(k)}$ 为齐次差分方程的基本解组的充要条件是相应的 Wronski 行列式 $\det(W)\neq 0$,其中

$$W=\begin{bmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \cdots & x_0^{(k)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k-1}^{(1)} & x_{k-1}^{(2)} & \cdots & x_{k-1}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

定理 1.14 非齐次差分方程(1.11)的通解可表示为它的任一特解与相应的齐次方程的通解之和.

考虑 k 阶常系数差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}a_jx_{n+j}=b_n,\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{1.12}$$