

‘SUPER’

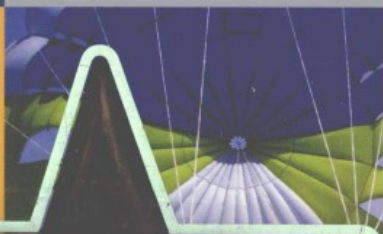
无敌®

精讲解题对策系列

(第3册)

学习解题对策，掌握应试窍门，
施展最佳实力，赢得大小考试！

应知应会 初中代数



■ 顾问 / 蔡上鹤
■ 总策划 / 郑学遐



外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

'SUPER'

精讲解题对策系列

(全13册)

重点中学资深名师金针度人之作，紧密配合新教材，清晰呈现经典知识模块应知应会要点，重点解析各类范题。

精讲解题对策



1. 应知应会·初中代数（第一册）
2. 应知应会·初中代数（第二册）
3. 应知应会·初中代数（第三册）
4. 应知应会·初中几何（第一册）
5. 应知应会·初中几何（第二册）
6. 应知应会·中考数学
7. 应知应会·初中物理（第一册）
8. 应知应会·初中物理（第二册）
9. 应知应会·初中物理实验
10. 应知应会·中考物理
11. 应知应会·初中化学（全一册）
12. 应知应会·初中化学实验
13. 应知应会·中考化学



元素1 应知应会知识要点

提纲挈领，内容凝练，逐条分列每节知识重点，明确每节应有的知识储备。

元素2 基础范题

巩固知识，夯实根基，将简捷的解题策略传授在典型例题的讲解过程中。

元素3 类比旁通

开阔眼界，启迪思维，培养做题的灵活度，提高应用知识解决问题的能力。

元素4 链接拓展

涵盖全面，构思巧妙，需纵横联系、融会贯通，从已知和结论找突破口。

初中代数（第三册）



本书作者：江鹏鹰

北京 101 中学实验班数学教师、班主任、数学备课组组长。“五羊杯”初中数学竞赛优秀指导老师，“希望杯”数学竞赛优秀辅导员，中国数学奥林匹克教练员。参与编写《2004 全国高考数学试题详析大全》、《题中提·2006 全国高考考点解析》等教辅参考书籍。独立编写《三点一测丛书随堂达标训练·八年级数学》等教辅参考书籍。

<http://www.super-wudi.com>

ISBN 978-7-119-04846-8



9 787119 048468 >

定价：23.00 元

‘SUPER’

无敌®

精讲解题对策系列

(第3册)

学习解题对策，掌握应试窍门，
施展最佳实力，赢得大小考试！

应知应会 初中代数



■ 顾问 / 蔡上鹤
■ 总策划 / 郑学遐



外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS



'SUPER'

精讲解题对策系列

(全13册)

重点中学资深名师金针度人之作，紧密配合新教材，清晰呈现经典知识模块应知应会要点，重点解析各类范题。

精讲解题对策



1. 应知应会·初中代数（第一册）

2. 应知应会·初中代数（第二册）

3. 应知应会·初中代数（第三册）

4. 应知应会·初中几何（第一册）

5. 应知应会·初中几何（第二册）

6. 应知应会·中考数学

7. 应知应会·初中物理（第一册）

8. 应知应会·初中物理（第二册）

9. 应知应会·初中物理实验

10. 应知应会·中考物理

11. 应知应会·初中化学（全一册）

12. 应知应会·初中化学实验

13. 应知应会·中考化学



本系列图书主结构四大元素

元素1 应知应会知识要点

提纲挈领，内容凝练，逐条分列每节知识重点，明确每节应有的知识储备。

元素2 基础范题

巩固知识，夯实根基，将简捷的解题策略传授在典型例题的讲解过程中。

元素3 类比旁通

开阔眼界，启迪思维，培养做题的灵活度，提高应用知识解决问题的能力。

元素4 链接拓展

涵盖全面，构思巧妙，需纵横联系、融会贯通，从已知和结论找突破口。

初中代数（第三册）



本书作者：江鹏鹰

北京101中学实验班数学教师、班主任、数学备课组组长。“五羊杯”初中数学竞赛优秀指导老师，“希望杯”数学竞赛优秀辅导员，中国数学奥林匹克教练员。参与编写《2004全国高考数学试题详析大全》、《题中提·2006全国高考考点解析》等教辅参考书籍。独立编写《三点一测丛书随堂达标训练·八年级数学》等教辅参考书籍。

<http://www.super-wudi.com>

ISBN 978-7-119-04846-8



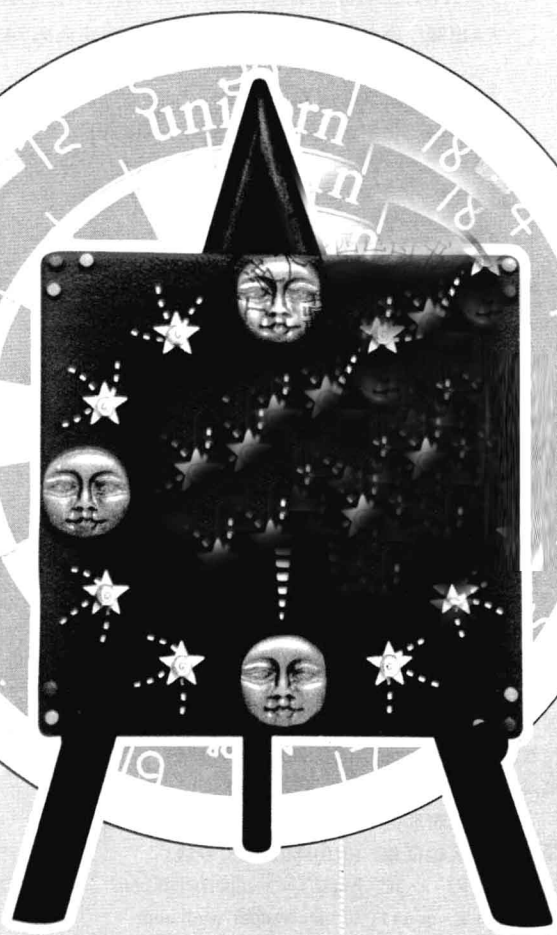
9 787119 048468 >

定价：23.00元

SUPER

应知应会·初中代数

第三册



外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS



精讲解题对策 ③

应知应会·初中代数(第三册)

图书在版编目(CIP)数据

应知应会·初中代数·第3册/江鹏鹰著. —北京:外文出版社, 2007
(精讲解题对策; 3)

ISBN 978-7-119-04846-8

I. 应... II. 江... III. 代数课—初中—解题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 092908 号

无敌精讲解题对策系列

2007 年 8 月第 1 版

2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

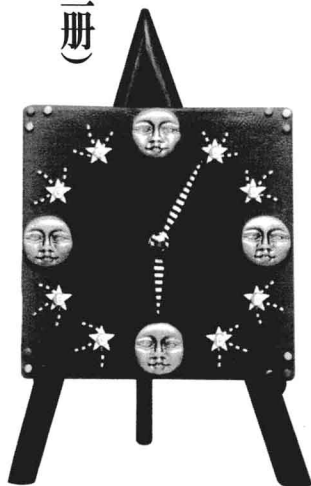
- 出版 外文出版社·北京市西城区百万庄大街 24 号
邮编: 100037
- 经销 新华书店/外文书店
- 印刷 北京盛兰兄弟印刷装订有限公司
- 印次 2007 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
- 开本 1/32, 889 × 1194mm, 10.5 印张
- 书号 ISBN 978-7-119-04846-8
- 定价 23.00 元

- 总 监 制 王华荣
- 创意制作 无敌编辑工作室
- 作 者 江鹏鹰
- 总 编 辑 吴锴鋈
- 编政管理 陈郁希
- 文字编辑 谢红月 金会芳 张文静
- 装帧设计 李子奇
- 美术编辑 郑智军 李可欣

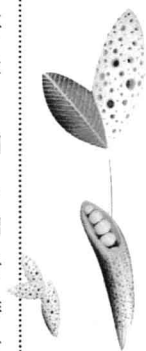
- 行销企划 北京光海文化用品有限公司
北京市海淀区车公庄西路乙 19 号
北塔六层 邮编: 100044

- 集团电话 (010)88018838(总机)
- 发 行 部 (010)88018956(专线)
- 订购传真 (010)88018952
- 读者服务 (010)88018838 转 53, 54(分机)
- 选题征集 (010)88018958(专线)
- 网 址 <http://www.super-wudi.com>
- E-mail service@super-wudi.com

- “无敌”商标专用权经国家
工商行政管理局商标局核准
由北京光海文化用品有限公
司享有。
- 本书图文与版型设计非经书
面授权不得使用; 版权所
有, 侵权必究。



抓住核心 感悟真谛



跨越世纪之交的本次课程改革已经进行了将近十年了。培养学生的创新能力，成为最受人们关注的焦点之一。就自然科学来说，类比、归纳、演绎和化归等等，都是创新的有效手段。它们都以一定的知识和技能为基础，并伴随着充分的观察、实验、比较、分析、综合、抽象和概括。学生要掌握以上这些学习和研究自然科学的思想和方法，需要花费相当的气力。因此，他们渴望有一套能抓住这些学科基础部分中的核心、能揭示其思想方法真谛，并且撰述得简明扼要、便于把握的丛书，来作为自己的良师益友，帮助自己克服学习中的困难，切切实实地培养自己的创新能力。

要创新，必须先达到“知”和“会”。“知”就是拥有必要的学问，其中还包括主事和管理的才识；“会”就是能够用已“知”的学问去解决实际问题，这也是“知”的来源和目的。由此可见，精选数学、物理、化学等学科中的典型问题作为范例，从解决这些范题入手，提炼出“应知应会知识要点”并加以精讲，不失为一种能够得到公认的、较好的入门方法。

入门以后怎么办呢？可以运用“类比”这一创新手段。“类比”就是用研究一类对象的知识和方法，去研究与其类似的另一类对象，将知识的“雪球”越滚越大，也就是人们常说的“举一反三”、“由此及彼”。通过类比，学生的知识和能力都得到了延伸。当然，类比也可以通过“解决问题”来进行，这些问题也应该精选精讲。

“类比”只是创新手段之一，因此学会“类比”之后，还要进一步从各个方面进行链接和拓展，把其他创新手段也网罗其中，从而同时达到各类选拔考试的多重要求，以满足学生不同的需要。这样的链接，必然要精选一些典型的试题，除了“分析”和“重要知识点”等，还要加上一段画龙点睛的“核心点评”，使学生能迅速领会有关问题的妙处和关键。

在我看过的众多书稿中，这套丛书特色突出，具有名副其实的独到之处。这套丛书及其作者融会了我国近半个世纪来初中教学改革的经验，抓住了数学、物理、化学三科教学目标和内容的核心，并突出“解决问题”这一基本理念和编写方式，做到了叙述简明、层次清晰，便于读者把握其中的真谛，因此它确是一套值得研读的丛书。另外，书稿的编排体例和印刷装帧也做到了美观生动、活泼大方。是为序，以推荐给各位读者。

蔡上鹤

2007年6月于北京

■ 本文作者为原人民教育出版社中学数学室主任，课程教材研究所教授

携手共进学好初中代数

什么是“代数”？“代数”，顾名思义就是用字母代替数字进行计算和研究。它是数学科学的重要组成部分。代数学的形成和发展体现了人类认识客观事物能力的飞跃。我们的祖先早在两千多年前的西汉时期重要数学著作《周髀算经》中，就运用了代数的思想方法作出了天文历法、开方运算以及勾股定理等不朽论述。

初中代数要逐步学习数、式、方程、函数、统计和概率等知识，这些知识是走进数学乐园的钥匙，是学习高层次数学的基础。

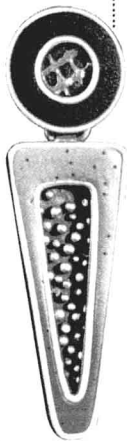
怎样才能学好初中代数？著名数学家华罗庚曾经说过“千古数学一大猜”。这就是说要学好数学就必须积极思考、善于分析，努力探索已知条件与需求结果的内在联系，进而寻求解决问题的方法，最后经过反复实践不断修正错误从而达到解决问题的目的。要学好初中代数也要经过类似的途径。为此，建议同学们在今后的学习中做好以下几点：

1. 尽快熟悉并掌握数学语言。任何学科都有本学科的专用语言，初中代数语言有文字、符号、式子和图形。同学们一开始学习时就要理解它们的意义，掌握它们之间的相互关系。
2. 学好基本概念。初中代数中有相当多的定义、定理、公式和法则，学习时务必理解它的内涵，掌握它的实质。
3. 相互联系，融会贯通，提高能力。平时学习时切忌死记硬背，而要理解消化吸收，发掘出学科知识的内在联系。课前要悉心预习，课上要专心听讲，课后要认真复习。要通过相当数量习题的演练，不断巩固所学的知识，逐步提高自己的计算能力、空间想像力、逻辑思维能力以及应用所学知识解决具体问题的能力。

我们相信，只要同学们坚定信心、持之以恒，一定能在学好初中代数的过程中不断取得优异的成绩。新知识的乐园已经向同学们敞开了大门，让我们携手同行，共创灿烂的明天。

作者

2007年6月于北京



目录

Contents

■ 精讲解题对策

■ 应知应会·初中代数(第三册)



■ 顾问推荐序——抓住核心 感悟真谛 005

■ 作者序——携手共进学好初中代数 006

第10章 一元二次方程 009

第1节 一元二次方程的定义 010

第2节 一元二次方程的解法——公式法 017

第3节 一元二次方程的解法——因式分解法 025

第4节 根的判别式 032

第5节 根与系数的关系 042

第6节 分式方程 053

第7节 无理方程 066

第8节 二元二次方程组 073

第9节 应用问题 086

第10节 综合问题 102

第11章 函数及其图象 119

第1节 平面直角坐标系 120

第2节	函数及其图象	132
第3节	一次函数	146
第4节	一次函数的应用	159
第5节	反比例函数	179
第6节	反比例函数的应用	196

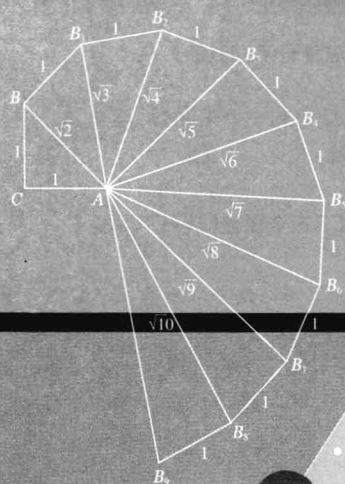
第12章 二次函数 213

第1节	二次函数的图象和性质	214
第2节	二次函数的解析式	229
第3节	二次函数的应用	248
第4节	方程与函数	267
第5节	与函数有关的综合问题	287

第13章 概率与统计 305

第1节	平均数、众数与中位数	306
第2节	方差与标准差	315
第3节	概率初步	324

■ 编后抒怀——无敌学习手把手 直面考试心贴心	333
-------------------------------	-----



第10章

一元二次方程

第1节	一元二次方程的定义	010
第2节	一元二次方程的解法——公式法	017
第3节	一元二次方程的解法——因式分解法	025
第4节	根的判别式	032
第5节	根与系数的关系	042
第6节	分式方程	053
第7节	无理方程	066
第8节	二元二次方程组	073
第9节	应用问题	086
第10节	综合问题	102

一元二次方程的定义

应知应会知识要点

● 整式方程

指两边都是整式,且至少一边含有未知数的方程.

● 一元二次方程

指将一个方程化简整理后,只含有一个未知数,且未知数的最高次数是2的整式方程.

● 一元二次方程的定义包含的要点

一元二次方程的定义包含以下三个要点(缺一不可):

- ① 是一个整式方程;
- ② 只含有一个未知数;
- ③ 未知数的最高次数是 2.

● 一元二次方程的一般形式

$$ax^2+bx+c=0(a \neq 0).$$

step 1

基础范题

例 1

判断下列等式是否为一元二次方程(其中字母为未知数):

$$(1) 3x-1=3x+\sqrt{3}; \quad (2) 2y^2=-\frac{3}{\sqrt{2}}; \quad (3) 2x-3y^2=2y+1;$$

$$(4) x-\frac{2}{3x}+1=3; \quad (5) x^2+2=0; \quad (6) x(x-1)=3x-2+x^2.$$

解答

(1) 将 $3x-1=3x+\sqrt{3}$ 移项、合并同类项整理得: $\sqrt{3}+1=0$, 该等式不含未知数, 不是方程, 所以不是一元二次方程.

(2) 将 $2y^2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ 移项整理得: $2y^2-\frac{3}{\sqrt{2}}=0$, 该等式是一个整式方程, 方程中只含有一个未知数 y , 且 y 的最高次数是 2, 它符合一元二次方程定义的三个要点, 所以是一元二次方程.

(3) 将 $2x-3y^2=2y+1$ 移项整理得: $3y^2+2y+1-2x=0$, 该等式含有两个未知数, 属于二

元方程,不满足一元二次方程定义中的第(2)个要点,所以不是一元二次方程.

(4)将 $x - \frac{2}{3x} + 1 = 3$ 移项、合并同类项整理

得: $x - \frac{2}{3x} - 2 = 0$,该等式左边有分式,

不是整式方程,不满足一元二次方程定义的第(1)个要点,

所以不是一元二次方程.

(5)方程 $x^2 + 2 = 0$ 是一个整式方程,只含有一个未知数 x ,且该未知数 x 的最高次数是2,它符合一元二次方程定义的两个要点,所以是一元二次方程.

(6)将 $x(x-1) = 3x - 2 + x^2$ 去括号得: $x^2 - x = 3x - 2 + x^2$,移项得: $x^2 - x - 3x + 2 - x^2 = 0$,合并同类项得: $-4x + 2 = 0$,该方程的最高次数是1,不满足一元二次方程定义的第(3)个要点,所以不是一元二次方程.

分析

这是对一元二次方程定义的直接考查,我们的对策是:利用一元二次方程定义中的三个要点:

(1)是一个整式方程;

(2)只含有一个未知数;

(3)未知数的最高次数是2.

要特别关注定义中的三个要点是在对原方程进行化简,并整理成一般形式后而言的.所以,我们在作出判断前必须要做一些辅助性工作,比如:去括号、移项、合并同类项等,目的就是将其化成一般形式后再利用定义进行判断.

例 2

关于 x 的方程 $(m^2 - 4)x^3 + mx^2 - mx + 2x^2 + m - 5 = 0$,请回答下列问题:

(1)当 m 为何值时,该方程是一元一次方程?

(2)当 m 为何值时,该方程是一元二次方程?

(3)当 m 为何值时,该方程是一元三次方程?

解答

将原方程化简整理后得:

$$(m^2 - 4)x^3 + (m + 2)x^2 - mx + m - 5 = 0.$$

(1)要使该方程为一元一次方程,只需满足下列条件:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0, \\ m + 2 = 0, \text{ 由此解得} \\ -m \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} m = \pm 2, \\ m = -2, \\ m \neq 0. \end{cases}$$

从而 $m = -2$.

故当 $m = -2$ 时,原方程是一元一次方程.

(2)要使该方程为一元二次方程,只需满足下列条件:

$$\begin{cases} m^2-4=0, \\ m+2 \neq 0, \end{cases} \text{ 由此解得 } \begin{cases} m=\pm 2, \\ m \neq -2, \end{cases}$$

从而 $m=2$.

故当 $m=2$ 时, 原方程是一元二次方程.

(3) 要使该方程为一元三次方程, 只需满足下列条件:

$$m^2-4 \neq 0, \text{ 由此解得: } m \neq \pm 2.$$

故当 $m \neq \pm 2$ 时, 原方程是一元三次方程.

► 分析 ◀

这个方程只含一个未知数 x , 且为整式方程, 已经符合一元一次方程、一元二次方程、一元三次方程定义中的第(1)、(2)两个要点. 要使其成为一元二次方程, 必须使未知数的最高次数为2, 这就要求 x^2 、 x 前的系数都必须为0, 且 x 前的系数不能为0; 要使其成为一元二次方程, 必须使未知数的最高次数为2, 这就要求 x^2 前的系数必须为0, 且 x^2 前的系数不能为0; 要使其成为一元三次方程, 必须使未知数的最高次数为3, 这就要求 x^3 前的系数不能为0.

例 3

已知关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2+3x+m^2-3m-4=0$ 的一个根为0, 求 m 的值.

► 解答 ◀

因为0是一元二次方程 $(m+1)x^2+3x+m^2-3m-4=0$ 的一个根, 所以有:

$$\begin{cases} m+1 \neq 0, \\ (m+1) \times 0^2 + 3 \times 0 + m^2 - 3m - 4 = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} m \neq -1, \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ m^2 - 3m - 4 = 0. \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

将②式左边因式分解得: $(m-4)(m+1)=0$,

解得: $m=4$ 或 $m=-1$.

注意到①式对 m 取值范围的限制, 所以符合题意的结论是: $m=4$.

► 分析 ◀

因为0是该方程的根, 也就是当 $x=0$ 时原方程成立, 所以用0替换方程中的 x 以后得到一个关于 m 的新的方程: $m^2-3m-4=0$, 解此方程即可求出 m 的值. 最后, 还要考虑到“二次方程”这一前提条件的制约.

重要知识点

“元”是方程中未知数的个数. “次”是方程中未知数的最高次项的次数.

仅求出 m 的值而忽略“二次方程”的前提条件是同学们解题时常犯的错误.

重要公式

$$\begin{aligned} x^2 - (a+b)x + ab &= (x-a)(x-b), \\ x^2 + (a+b)x + ab &= (x+a)(x+b). \end{aligned}$$

例 4

求关于 x 的一元二次方程 $(ax-18)ax=x^2-6(x+13)$ 中 a 的取值范围.

解答

将原式去括号得: $a^2x^2-18ax=x^2-6x-78$,

移项得: $a^2x^2-x^2-18ax+6x+78=0$,

合并同类项得: $(a^2-1)x^2-(18a-6)x+78=0$,

因为题设限定该方程是一元二次方程,所以

$a^2-1 \neq 0$,解得: $a \neq \pm 1$.

故: a 的取值范围是除 ± 1 之外的一切实数.

分析

凡是解一元二次方程的问题,必须先把原方程整理为一元二次方程的标准形式,然后再根据题目要求解题.

step 2

类比旁通

例 1

已知 $x=1$ 是一元二次方程 $(m+1)x^2-m^2x-2m-1=0$ 的一个根,求 m 的值.

解答

由题意知: $\begin{cases} m+1 \neq 0, \\ (m+1) \times 1^2 - m^2 \times 1 - 2m - 1 = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} m \neq -1, \dots\dots\dots ① \\ m^2+m=0. \dots\dots\dots ② \end{cases}$

将②式分解因式得:

$m(m+1)=0$,从而有 $m=0$ 或 $m=-1$,

因为有①式的限制,所以只有 $m=0$ 成为可能.

故: m 的值为0.

分析

解答本题时可参考前面例3.关键要注意题设中所给定的前提条件“方程是一元二次方程”,所以首先必须满足 $m+1 \neq 0$ 的条件.

例 2

求方程 $\sqrt{5}x^2+2x+2\ 006=(2x-\sqrt{5})x-2$ 的二次项系数、一次项系数和常数项的积.

解答

将原式去括号得: $\sqrt{5}x^2+2x+2\ 006=2x^2-\sqrt{5}x-2$,

移项、合并同类项得:

$(\sqrt{5}-2)x^2+(2+\sqrt{5})x+2\ 008=0$.

所以其二次项系数为 $\sqrt{5}-2$,一次项系数是 $2+\sqrt{5}$,常数项是2 008,从而二次项系数、一次项系数和常数项的积为:

$$(\sqrt{5}-2) \times (2+\sqrt{5}) \times 2\,008 = 2\,008.$$

►分析◀

对一个方程的“项”进行界定时,首先需要做一些铺垫:将原方程移项、合并整理成一般形式,然后才能对“二次项”、“一次项”、“常数项”等进行区分界定.本题主要考查我们对一元二次方程中的一些基本术语如“项”、“系数”、“常数项”等的理解.

step 3

链接拓展

例 1

解关于 x 的一元二次方程: $(m-2)x^{m^2-5m+8}+(m-3)x+5=0$.

解答

因为 $(m-2)x^{m^2-5m+8}+(m-3)x+5=0$ 是关于 x 的一元二次方程,所以有:

$$\begin{cases} m-2 \neq 0, \\ m^2-5m+8=2, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} m \neq 2, \dots\dots\dots ① \\ m^2-5m+6=0, \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

将②式左边因式分解得:

$$(m-2)(m-3)=0,$$

由此得 $m=2$ 或 $m=3$,

注意到①式对 m 的取值范围的限制,

从而 $m=3$.

所以原方程中所有 m 的值都应等于3.

即原方程可以化简为: $x^2+5=0$.

求该方程的解,其实质就是要求我们找出那些能使该等式成立的未知数的值.

由于 $x^2 \geq 0$,又 $5 > 0$,所以在实数范围内,不存在一个实数使得一个非负数与一个正数的和为0.

故原方程无实数解.

分析

本题的突破口在于已知条件中的“一元二次方程”所传递的信息:未知数是 x ,且 x 的最高次数应是2,即 $m^2-5m+8=2$.同时,我们观察方程的结构可知:常数项是5,一次项系数是 $m-3$,除此之外剩下的部分只有 $(m-2)x^{m^2-5m+8}$,故要想满足题设条件,只有 $(m-2)x^{m^2-5m+8}$ 是 x 的二次项.又因为 x 的最高次数是2,所以必须要求二次项系数 $m-2 \neq 0$.

核心点评

本题的解答过程既训练了我们代数式变形的能力,又告诉我们并不是每个一元二次方程都有实数解.这方面的知识我们今后还会深入学习.

例 2

已知首项系数不相等的两个关于 x 的一元二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0, \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0, \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(其中 a, b 为正整数)有一个公共根,求 $\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

解答

解法一:用十字相乘法将 $\textcircled{1}$ 式左边因式分解得:

$$[(a-1)x-(a+2)] \cdot (x-a)=0,$$

因为题设限定该方程为一元二次方程,

$$\text{所以二次项系数 } a-1 \neq 0, \text{ 由此解得: } x=a \text{ 或 } x=\frac{a+2}{a-1};$$

同理,用十字相乘法将 $\textcircled{2}$ 式左边因式分解得:

$$[(b-1)x-(b+2)] \cdot (x-b)=0,$$

因为题设限定该方程为一元二次方程,

所以二次项系数 $b-1 \neq 0$,

$$\text{由此解得: } x=b \text{ 或 } x=\frac{b+2}{b-1}.$$

又因为 $a \neq b$ 且有一个公共根,

$$\text{所以有 } a=\frac{b+2}{b-1} \cdots \cdots \textcircled{3} \text{ 或 } b=\frac{a+2}{a-1} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

由 $\textcircled{3}$ 和 $\textcircled{4}$ 均能得到 $ab-a-b-2=0$,再将此式两边同时加3,得 $ab-a-b+1=3$,此式左边可进行因式分解,从而得到 $(b-1)(a-1)=3$.因为 a, b 均为正整数,且 $a-1 \neq 0, b-1 \neq 0$,从而 $a-1 \geq 1, b-1 \geq 1$,且 $a-1, b-1$ 均为整数,

$$\text{所以必有 } \begin{cases} a-1=1, \\ b-1=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a-1=3, \\ b-1=1, \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} a=2, \\ b=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=4, \\ b=2. \end{cases}$$

$$\text{故 } \frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}} = \frac{a^b \cdot b^a (a^b+b^a)}{a^b \cdot b^a (a^{-b}+b^{-a})} = \frac{a^b \cdot b^a (a^b+b^a)}{b^a+a^b} = a^b \cdot b^a = 4^2 \times 2^4 = 256.$$

分析

注意到题设中的几个要点:

“关于 x 的一元二次方程”说明 x 是未知数,且 x 的二次项系数不能为0,也就是说 $a \neq 1$ 且 $b \neq 1$;“首项系数”指一元二次方程一般式中的第一项的系数,也就是二次项系数;“首项系数不相等”说明 $a-1 \neq b-1$,其实质是要告诉我们 $a \neq b$;“公共根”是本题的第一个突破口,“ a, b 为正整数”是本题的第二个突破口.