

应用型本科理工类基础课程规划教材

概率论、随机过程 与数理统计学习指导



汪彩云 主编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用型本科理工类基础课程规划教材

概率论、随机过程与 数理统计学习指导

汪彩云 主 编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书共分3篇。第一篇为概率论,第二篇为随机过程,第三篇为数理统计。第一篇共4章,第三篇共3章,每一章内容有内容提要、基本要求、A类例题和习题、B类例题和习题、习题答案;第二篇共3章,每一章内容有内容提要、基本要求、例题和习题、习题答案。

本书适合学生学习概率论、随机过程与数理统计课程时同步使用,还可作为总复习的参考书以及准备考研的学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论、随机过程与数理统计学习指导 / 汪彩云主编. —北京:北京邮电大学出版社, 2011. 6
ISBN 978-7-5635-2608-6

I. ①概… II. ①汪… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料②随机过程—高等学校—教学参考资料③数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 048229 号

书 名: 概率论、随机过程与数理统计学习指导
主 编: 汪彩云
责任编辑: 王丹丹
出版发行: 北京邮电大学出版社
社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京源海印刷有限责任公司
开 本: 787 mm×960 mm 1/16
印 张: 15.25
字 数: 329 千字
印 数: 1—3 000 册
版 次: 2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2608-6

定 价: 28.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

本书是与北京邮电大学世纪学院基础教学部编《概率论、随机过程与数理统计》第2版(由北京邮电大学出版社出版)相配套的学习辅导书,主要面向使用该教材的学生和复习考研的学生,也可供教师作为教学参考书.

本书按照教材的各章顺序编排,以便与教学需求保持同步.各章按内容提要、基本要求、例题与习题、习题答案编写.核心部分是例题与习题,为适应不同层次学生的需求,第一篇概率论和第三篇数理统计的例题与习题分为A、B两类:A类例题和习题为基本题,B类例题和习题为综合提高题.具体如下:

一、内容提要

提纲挈领地归纳本章的主要内容,并列出了具体的概念、定理、性质、公式等供读者复习回顾.

二、基本要求

主要根据教育部高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会指定的工科类本科数学基础课程教学基本要求确定.应当指出,这个教学基本要求是所有本科生应达到的合格要求.读者应当根据本人及所在院校的具体情况确定自己的学习目标,但不能低于基本要求.

三、A类例题和习题

为帮助学生熟练掌握本章的内容,巩固基础知识,从而达到基本要求而配置的大量典型例题.例题种类丰富,涵盖了各种常见的概率模型,使学生扩大视野,提高解决问题的能力.习题的类型和难度与例题相似,以使学生通过练习掌握这些基本类型题目的求解方法,并检验自己掌握的程度.

四、B类例题和习题

为准备考研或准备进一步提高的学生熟练技巧,提高综合能力而配置的例题和习题.部分例题是教材综合练习题中的计算题或证明题,每一道例题都有详细的分析与解答过程.能启发学生的思路,使学生通过对解题思想、方法和技巧的思考与消化,把解决问题的能力提高到一个新的台阶.

五、习题答案

除证明题外,其余每一道习题都给出了答案,有些题还给出了提示.

本书的编写得到了北京邮电大学世纪学院领导的关心,北京邮电大学出版社领导和编辑的支持,在此表示诚挚的谢意.

参与本书编写工作的有汪彩云、王玉孝、柳金甫、姜炳麟.在编写过程中,力求把错误减到最少,但不妥之处难以避免,望读者指正.

编 者

目 录

第一篇 概率论

第 1 章 概率论的基本概念	3
1.1 内容提要	3
1.1.1 随机事件及其运算	3
1.1.2 事件的概率及其性质	5
1.1.3 条件概率及其性质	7
1.1.4 事件的独立性	8
1.2 要求	9
1.3 A 类例题和习题	10
1.3.1 例题	10
1.3.2 习题	24
1.4 B 类例题和习题	29
1.4.1 例题	29
1.4.2 习题	37
1.5 习题答案	38
1.5.1 A 类习题答案	38
1.5.2 B 类习题答案	39
第 2 章 随机变量及其分布	40
2.1 内容提要	40
2.1.1 随机变量及其分布函数	40
2.1.2 离散型随机变量	41

2.1.3	连续型随机变量	42
2.1.4	随机变量函数的分布	43
2.2	要求	44
2.3	A类例题和习题	44
2.3.1	例题	44
2.3.2	习题	54
2.4	B类例题和习题	59
2.4.1	例题	59
2.4.2	习题	65
2.5	习题答案	66
2.5.1	A类习题答案	66
2.5.2	B类习题答案	67
第3章	多维随机变量及其分布	68
3.1	内容提要	68
3.1.1	多维随机变量及其分布函数	68
3.1.2	多维离散型随机变量及其分布律	70
3.1.3	多维连续型随机变量及其概率密度	71
3.1.4	边缘分布和随机变量的独立性	72
3.1.5	条件分布简介	75
3.1.6	二维随机变量函数的分布	76
3.2	要求	78
3.3	A类例题和习题	79
3.3.1	例题	79
3.3.2	习题	92
3.4	B类例题和习题	97
3.4.1	例题	97
3.4.2	习题	106
3.5	习题答案	108
3.5.1	A类习题答案	108
3.5.2	B类习题答案	109
第4章	随机变量的数字特征	110
4.1	内容提要	110
4.1.1	数学期望	110

4.1.2	方差	111
4.1.3	常用分布的数学期望和方差	112
4.1.4	协方差	113
4.1.5	相关系数	113
4.1.6	随机变量的矩	114
4.1.7	多维随机变量的数字特征	115
4.1.8	多维正态分布	115
4.1.9	大数定律和中心极限定理	116
4.2	要求	117
4.3	A类例题和习题	117
4.3.1	例题	117
4.3.2	习题	128
4.4	B类例题和习题	131
4.4.1	例题	131
4.4.2	习题	141
4.5	习题答案	141
4.5.1	A类习题答案	141
4.5.2	B类习题答案	142

第二篇 随机过程

第5章	随机过程的概念	145
5.1	内容提要	145
5.2	例题与习题	147
5.2.1	例题	147
5.2.2	习题	147
5.3	习题答案	148
第6章	马尔可夫链	149
6.1	内容提要	149
6.2	基本要求	149
6.3	例题与习题	149
6.3.1	例题	149

6.3.2 习题	159
6.4 习题答案	162
第7章 平稳过程	163
7.1 内容提要	163
7.2 基本要求	163
7.3 例题与习题	163
7.3.1 例题	163
7.3.2 习题	172
7.4 习题答案	173

第三篇 数理统计

第8章 数理统计的基本概念与采样分布	177
8.1 内容提要	177
8.2 基本要求	178
8.3 A类例题与习题	179
8.3.1 例题	179
8.3.2 习题	182
8.4 B类例题与习题	184
8.4.1 例题	184
8.4.2 习题	189
8.5 习题答案	190
8.5.1 A类习题答案	190
8.5.2 B类习题答案	191
第9章 参数估计	192
9.1 内容提要	192
9.1.1 点估计	192
9.1.2 区间估计	193
9.2 基本要求	193
9.3 A类例题与习题	193
9.3.1 例题	193

9.3.2 习题	203
9.4 B类例题与习题	207
9.4.1 例题	207
9.4.2 习题	212
9.5 习题答案与提示	214
9.5.1 A类习题答案	214
9.5.2 B类习题答案	214
第10章 假设检验	216
10.1 内容提要	216
10.2 基本要求	218
10.3 A类例题与习题	218
10.3.1 例题	218
10.3.2 习题	221
10.4 B类例题与习题	224
10.4.1 例题	224
10.4.2 习题	229
10.5 习题答案	230
10.5.1 A类习题答案	230
10.5.2 B类习题答案	231

第一篇

概 率 论

第 1 章 概率论的基本概念

1.1 内容提要

1.1.1 随机事件及其运算

(1) 随机试验

随机试验具有如下特征：

- ① 可重复性——在相同的条件下,可以重复进行;
- ② 一次试验结果的随机性——在一次试验中可能出现这一结果,也可能出现那一结果,预先无法断定;
- ③ 所有结果的确定性——所有可能的结果预先是可知的.

通常用 E (可以带下标)表示随机试验.

(2) 样本点和样本空间

—随机试验 E 的每一个可能的(不可分解的)结果,称为 E 的样本点,记为 e .

—试验 E 的所有样本点组成的集合,称为 E 的样本空间,记为 S .

(3) 随机事件、基本事件、必然事件和不可能事件

对于一个随机试验,在一次试验中,可能发生也可能不发生的事件,称为该试验的随机事件,记为 A, B, \dots (可以带下标).

通常一随机试验的随机事件可以表示为它的一些样本点组成的集合. 对于一随机试验的一个随机事件,当且仅当它所包含的任一样本点在一次试验中出现,称它在这一次试验中出现.

只包含一个样本点的事件称为基本事件.

在任何一次试验中都出现的事件,称为必然事件,它就是 S 所表示的事件,因而用 S 表示必然事件.

在任何一次试验中都不出现的事件,称为不可能事件,它就是 \emptyset 所表示的事件,因而用 \emptyset 表示不可能事件.

下面在叙述事件的关系和运算时,常常省略了“在一次试验中”.例如,说“A发生必有B发生”,就是说“在一次试验中,A发生必有B发生”.说“A发生或B发生”,就是说“在一次试验中,A发生或B发生”,等.

(4) 事件之间的关系和运算

① 包含关系

设 A, B 为二事件,若“A发生必有B发生”,称“A包含在B中”或“B包含A”,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{任意 } e \in A, \text{ 必有 } e \in B.$$

包含关系的几何表示如图 1.1 所示.

② 相等关系

设 A, B 为二事件,若 $A \subset B, B \subset A$,称“A, B 相等”,记为 $A = B$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 且 } B \subset A.$$

相等关系的几何表示如图 1.2 所示.

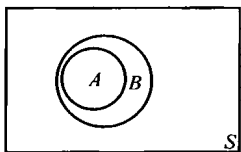


图 1.1

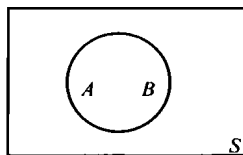


图 1.2

③ 事件的并

设 A, B 为二事件,称事件“A, B 至少一个发生”(“A发生或B发生”)为 A, B 的并,记为 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{e | e \in A \text{ 或 } e \in B\}.$$

事件的并的几何表示如图 1.3 所示.

④ 事件的交

设 A, B 为二事件,称事件“A, B 同时发生”(“A发生而且B发生”)为 A, B 的交,记为 $A \cap B$ 或 AB .

$$AB = \{e | e \in A \text{ 且 } e \in B\}.$$

事件的交的几何表示如图 1.4 所示.

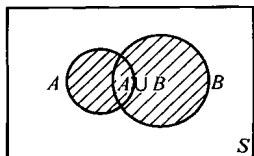


图 1.3

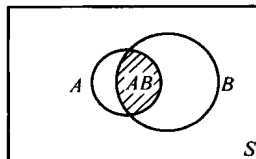


图 1.4

⑤ 事件的差

设 A, B 为二事件, 称事件“ A 发生而 B 不发生”为 A 减去 B 的差, 记为 $A - B$.

$$A - B = \{e | e \in A \text{ 而 } e \notin B\}.$$

事件的差的几何表示如图 1.5 所示.

⑥ 互不相容关系

设 A, B 为二事件, 若“ A, B 不能同时发生”, 称 A, B 互不相容或互斥, 记为 $AB = \emptyset$.

$$A, B \text{ 互不相容 } AB = \emptyset.$$

事件的互不相容关系的几何表示如图 1.6 所示.

⑦ 事件的余和对立事件

设 A 为一事件. 称事件“ A 不发生”为 A 的余事件或 A 的对立事件, 记为 \bar{A} .

$$\bar{A} = S - A.$$

事件的余和对立事件的几何表示如图 1.7 所示.

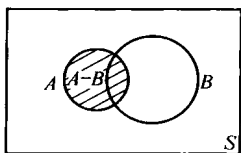


图 1.5

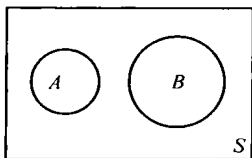


图 1.6

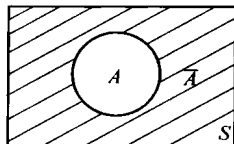


图 1.7

(5) 事件的运算法则

① 交换律 $A \cup B = B \cup A, AB = BA$.

② 结合律 $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), ABC = (AB)C = A(BC)$.

③ 分配律 $(A \cup B)C = AC \cup BC, (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

④ 对偶律 $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \bar{A}_k, \overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \bar{A}_k$.

下列关系和运算要熟记:

$\emptyset \subset A \subset S; A \subset A \cup B; B \subset A \cup B; A \subset B \Rightarrow A \cup B = B; AB \subset A; AB \subset B; A \subset B \Rightarrow AB = A; A - B \subset A; A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset; \emptyset A = \emptyset; \bar{\emptyset} = \emptyset; \bar{\emptyset} = S; A \subset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}; A - B = A \bar{B} = A - AB; A \cup B = A \cup \bar{A}B; A \cup B \cup C = A \cup \bar{A}B \cup \bar{A}BC$.

1.1.2 事件的概率及其性质

1. 事件概率的定义

(1) 古典概型

满足下列条件的随机试验, 称为古典概型:

- ① 有限性——样本点的总数是有限的;
- ② 等可能性——所有基本事件是等可能的.

概率的定义 设 E 为古典概型, 样本空间为 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, A 是 E 的一个事件,

$A = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}$, 定义事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{A \text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \quad (1.1)$$

概率的性质 对于古典概型, 事件的概率具有下列性质:

- ① $0 \leq P(A) \leq 1$;
- ② $P(S) = 1$;
- ③ 有限可加性: 若 A_1, \dots, A_m 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m P(A_k).$$

(2) 几何概型

满足下列条件的随机试验, 称为几何概型:

- ① 有限性——样本空间是直线、二维或三维空间中测度(长度、面积或体积)有限的区间或区域;
- ② 均匀性——样本点在样本空间上是均匀分布的(可通俗地称为是等可能的).

概率的定义 设 E 为几何概型, 样本空间为 S , A 是 E 的一个事件, 定义事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)}, \quad (1.2)$$

其中 $L(A)$, $L(S)$ 分别是 A , S 的测度.

概率的性质 对于几何概型, 事件的概率具有下列性质:

- ① $0 \leq P(A) \leq 1$;
- ② $P(S) = 1$;
- ③ 可列可加性: 若 A_1, \dots, A_n, \dots 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

(3) 事件的频率及性质

2. 概率的统计定义

事件的频率 将试验 E 重复独立地进行 n 次, 若其中事件 A 发生了 n_A 次, 则称 n_A 为 A 在这 n 次试验中出现的频数, 称比值 n_A/n 为 A 在这 n 次试验中出现的频率, 记为 $f_n(A)$, 即 $f_n(A) = n_A/n$.

频率的性质 事件的频率有下列性质:

- ① $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- ② $f_n(S) = 1$;
- ③ 若 A_1, \dots, A_m 互不相容, 则

$$f_n\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m f_n(A_k).$$

概率的统计定义 当 n 充分大, 频率 $f_n(A)$ 稳定在某个数 p 的附近摆动, 定义事件 A

的概率为 $P(A) = p$.

(4) 概率的公理化定义及性质

设随机试验 E 的样本空间为 S , 若对 E 的任一事件 A , 有一实数与之对应, 记为 $P(A)$, 且满足:

- ① $0 \leq P(A) \leq 1$;
- ② $P(S) = 1$;
- ③ 可列可加性: 若 A_1, \dots, A_n, \dots 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

称 $P(A)$ 为 A 的概率.

概率 P 具有下列性质:

- ① $P(\emptyset) = 0$.
- ② 有限可加性: 如果 $A_k, k=1, \dots, n$, 满足 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$, 则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

- ③ 可减性: 如果 A, B 满足 $A \subset B$, 则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$.
- ④ 逆事件的概率: 对任意的 A , 有 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- ⑤ 一般加法公式: 如果 $A_i, i=1, \dots, n$ 为事件, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

- ⑥ * 上、下连续性: 如果 $\{A_n\}$ 满足 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

如果 $\{A_n\}$ 满足 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

1.1.3 条件概率及其性质

1. 条件概率的定义和性质

(1) 条件概率的定义 设 A, B 为二事件, 且 $P(A) > 0$, 则称

$$P(B|A) \triangleq \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.3)$$

为在事件 A 发生的条件下 B 的条件概率.

(2) 条件概率的性质 条件概率满足:

- ① $0 \leq P(B|A) \leq 1$;