应用型本科理工类基础课程规划教材

概率论、随机过程与数理统计学习指导

汪彩云　主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用型本科理工类基础课程规划教材

概率论、随机过程与数理统计学习指导

汪彩云　主　编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书共分3篇．第一篇为概率论，第二篇为随机过程，第三篇为数理统计．第一篇共4章，第三篇共3章，每一章内容有内容提要、基本要求、A类例题和习题、B类例题和习题、习题答案；第二篇共3章，每一章内容有内容提要、基本要求、例题和习题、习题答案．

本书适合学生学习概率论、随机过程与数理统计课程时同步使用，还可作为总复习的参考书以及准备考研的学生使用．

图书在版编目(CIP)数据

概率论、随机过程与数理统计学习指导 /汪彩云主编．--北京：北京邮电大学出版社，2011．6

ISBN 978-7-5635-2608-6

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①汪…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教学参考资料②随机过程—高等学校—教学参考资料③数理统计—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第048229号

书　　名：概率论、随机过程与数理统计学习指导
主　　编：汪彩云
责任编辑：王丹丹
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京源海印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：15.25
字　　数：329千字
印　　数：1—3 000册
版　　次：2011年6月第1版　2011年6月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2608-6　　定　价：28.00元

前　　言

本书是与北京邮电大学世纪学院基础教学部编《概率论、随机过程与数理统计》第2版(由北京邮电大学出版社出版)相配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生和复习考研的学生，也可供教师作为教学参考书.

本书按照教材的各章顺序编排，以便与教学需求保持同步. 各章按内容提要、基本要求、例题与习题、习题答案编写. 核心部分是例题与习题，为适应不同层次学生的需求，第一篇概率论和第三篇数理统计的例题与习题分为A,B两类：A类例题和习题为基本题，B类例题和习题为综合提高题. 具体如下：

一、内容提要

提纲挈领地归纳本章的主要内容，并列出了具体的概念、定理、性质、公式等供读者复习回顾.

二、基本要求

主要根据教育部高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会指定的工科类本科数学基础课程教学基本要求确定. 应当指出，这个教学基本要求是所有本科生应达到的合格要求. 读者应当根据本人及所在院校的具体情况确定自己的学习目标，但不能低于基本要求.

三、A类例题和习题

为帮助学生熟练掌握本章的内容，巩固基础知识，从而达到基本要求而配置的大量典型例题. 例题种类丰富，涵盖了各种常见的概率模型，使学生扩大视野，提高解决问题的能力. 习题的类型和难度与例题相似，以使学生通过练习掌握这些基本类型题目的求解方法，并检验自己掌握的程度.

四、B类例题和习题

为准备考研或准备进一步提高的学生熟练技巧，提高综合能力而配置的例题和习题. 部分例题是教材综合练习题中的计算题或证明题，每一道例题都有详细的分析与解答过程. 能启发学生的思路，使学生通过对解题思想、方法和技巧的思考与消化，把解决问题的能力提高到一个新的台阶.

五、习题答案

除证明题外，其余每一道习题都给出了答案，有些题还给出了提示.

本书的编写得到了北京邮电大学世纪学院领导的关心，北京邮电大学出版社领导和编辑的支持，在此表示诚挚的谢意.

参与本书编写工作的有汪彩云、王玉孝、柳金甫、姜炳麟. 在编写过程中，力求把错误减到最少，但不妥之处难以避免，望读者指正.

编　者

目　　录

第一篇　概率论

第二篇 随机过程

第三篇 数理统计

第一篇

概 率 论

第1章　概率论的基本概念

1.1　内容提要

1.1.1　随机事件及其运算

（1）随机试验

随机试验具有如下特征：

① 可重复性——在相同的条件下，可以重复进行；

② 一次试验结果的随机性——在一次试验中可能出现这一结果，也可能出现那一结果，预先无法断定；

③ 所有结果的确定性——所有可能的结果预先是可知的.

通常用 E(可以带下标)表示随机试验.

（2）样本点和样本空间

一随机试验 E 的每一个可能的(不可分解的)结果，称为 E 的样本点，记为 e.

一试验 E 的所有样本点组成的集合，称为 E 的样本空间，记为 S.

（3）随机事件、基本事件、必然事件和不可能事件

对于一个随机试验，在一次试验中，可能发生也可能不发生的事件，称为该试验的随机事件，记为 $A,B,\cdots$(可以带下标).

通常一随机试验的随机事件可以表示为它的一些样本点组成的集合. 对于一随机试验的一个随机事件，当且仅当它所包含的任一样本点在一次试验中出现，称它在这一次试验中出现.

只包含一个样本点的事件称为基本事件.

在任何一次试验中都出现的事件，称为必然事件，它就是 S 所表示的事件，因而用 S 表示必然事件.

在任何一次试验中都不出现的事件，称为不可能事件，它就是 $\varnothing$ 所表示的事件，因而用 $\varnothing$ 表示不可能事件.

下面在叙述事件的关系和运算时，常常省略了“在一次试验中”．例如，说“A 发生必有 B 发生”，就是说“在一次试验中，A 发生必有 B 发生”．说“A 发生或 B 发生”，就是说“在一次试验中，A 发生或 B 发生”，等．

（4）事件之间的关系和运算

① 包含关系

设 A,B 为二事件，若“A 发生必有 B 发生”，称“A 包含在 B 中”或“B 包含 A”，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．

$$A\subset B\Leftrightarrow \text{任意 } e\in A,\text{必有 } e\in B.$$

包含关系的几何表示如图 1.1 所示．

② 相等关系

设 A,B 为二事件，若 $A\subset B,B\subset A$，称“A,B 相等”，记为 $A=B$．

$$A=B\Leftrightarrow A\subset B \text{ 且 } B\subset A.$$

相等关系的几何表示如图 1.2 所示．

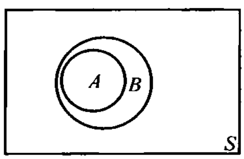

图 1.1

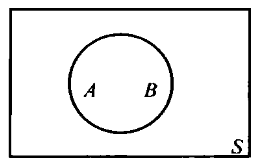

图 1.2

③ 事件的并

设 A,B 为二事件，称事件“A,B 至少一个发生”（“A 发生或 B 发生”）为 A,B 的并，记为 $A\cup B$．

$$A\cup B=\{e|e\in A \text{ 或 } e\in B\}.$$

事件的并的几何表示如图 1.3 所示．

④ 事件的交

设 A,B 为二事件，称事件“A,B 同时发生”（“A 发生而且 B 发生”）为 A,B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB．

$$AB=\{e|e\in A \text{ 且 } e\in B\}.$$

事件的交的几何表示如图 1.4 所示．

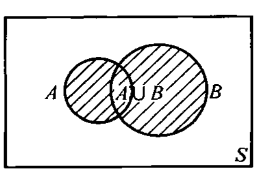

图 1.3

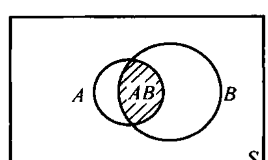

图 1.4

⑤ 事件的差

设 A,B 为二事件，称事件“A 发生而 B 不发生”为 A 减去 B 的差，记为 $A-B$.

$$A-B=\{e \mid e\in A \text{ 而 } e\notin B\}.$$

事件的差的几何表示如图 1.5 所示.

⑥ 互不相容关系

设 A,B 为二事件，若“A,B 不能同时发生”，称 A,B 互不相容或互斥，记为 $AB=\varnothing$.

$$A,B \text{ 互不相容 } AB=\varnothing.$$

事件的互不相容关系的几何表示如图 1.6 所示.

⑦ 事件的余和对立事件

设 A 为一事件. 称事件“A 不发生”为 A 的余事件或 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$.

$$\overline{A}=S-A.$$

事件的余和对立事件的几何表示如图 1.7 所示.

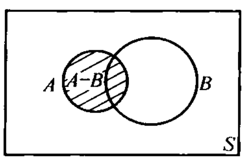

图 1.5

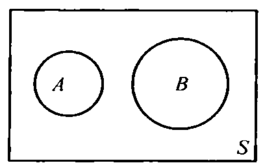

图 1.6

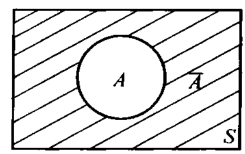

图 1.7

(5) 事件的运算法则

① 交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

② 结合律　$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $ABC=(AB)C=A(BC)$.

③ 分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC, (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

④ 对偶律　$\overline{\bigcup\limits_k A_k}=\bigcap\limits_k \overline{A}_k, \overline{\bigcap\limits_k A_k}=\bigcup\limits_k \overline{A}_k$.

下列关系和运算要熟记：

$\varnothing\subset A\subset S$; $A\subset A\cup B$; $B\subset A\cup B$; $A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$; $AB\subset A$; $AB\subset B$; $A\subset B\Rightarrow AB=A$; $A-B\subset A$; $A\subset B\Rightarrow A-B=\varnothing$; $\varnothing A=\varnothing$; $\overline{S}=\varnothing$; $\overline{\varnothing}=S$; $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\supset\overline{B}$; $A-B=A\overline{B}=A-AB$; $A\cup B=A\cup\overline{A}B$; $A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}C$.

1.1.2　事件的概率及其性质

1. 事件概率的定义

(1) 古典概型

满足下列条件的随机试验，称为古典概型：

① 有限性——样本点的总数是有限的；

② 等可能性——所有基本事件是等可能的.

概率的定义　设 E 为古典概型，样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，A 是 E 的一个事件，

$A=\{e_{i_1},\cdots,e_{i_r}\}$，定义事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.1}$$

概率的性质 对于古典概型，事件的概率具有下列性质：

① $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

② $P(S)=1$；

③ 有限可加性：若 $A_1,\cdots,A_m$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m}A_k\right)=\sum_{k=1}^{m}P(A_k).$$

（2）几何概型

满足下列条件的随机试验，称为几何概型：

① 有限性——样本空间是直线、二维或三维空间中测度（长度、面积或体积）有限的区间或区域；

② 均匀性——样本点在样本空间上是均匀分布的（可通俗地称为是等可能的）.

概率的定义 设 E 为几何概型，样本空间为 S，A 是 E 的一个事件，定义事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}, \tag{1.2}$$

其中 $L(A)$，$L(S)$ 分别是 A，S 的测度.

概率的性质 对于几何概型，事件的概率具有下列性质：

① $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

② $P(S)=1$；

③ 可列可加性：若 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

（3）事件的频率及性质

2. 概率的统计定义

事件的频率 将试验 E 重复独立地进行 n 次，若其中事件 A 发生了 n_A 次，则称 n_A 为 A 在这 n 次试验中出现的频数，称比值 n_A/n 为 A 在这 n 次试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=n_A/n$.

频率的性质 事件的频率有下列性质：

① $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

② $f_n(S)=1$；

③ 若 $A_1,\cdots,A_m$ 互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{k=1}^{m}A_k\right)=\sum_{k=1}^{m}f_n(A_k).$$

概率的统计定义 当 n 充分大，频率 $f_n(A)$ 稳定在某个数 p 的附近摆动，定义事件 A

的概率为 $P(A)=p$.

(4) 概率的公理化定义及性质

设随机试验 E 的样本空间为 S,若对 E 的任一事件 A,有一实数与之对应,记为 $P(A)$,且满足:

① $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

② $P(S)=1$;

③ 可列可加性:若 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

称 $P(A)$为 A 的概率.

概率 P 具有下列性质:

① $P(\varnothing)=0$.

② 有限可加性:如果 $A_k.k=1,\cdots,n$,满足 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$,则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

③ 可减性:如果 A,B 满足 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

④ 逆事件的概率:对任意的 A,有 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

⑤ 一般加法公式:如果 $A_i,i=1,\cdots,n$ 为事件,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

⑥* 上、下连续性:如果$\{A_n\}$满足 $A_1\supset A_2\supset\cdots$,则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

如果$\{A_n\}$满足 $A_1\subset A_2\subset\cdots$,则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

1.1.3 条件概率及其性质

1. 条件概率的定义和性质

(1) 条件概率的定义 设 A,B 为二事件,且 $P(A)>0$,则称

$$P(B|A)\triangleq\frac{P(AB)}{P(A)}\tag{1.3}$$

为在事件 A 发生的条件下 B 的条件概率.

(2) 条件概率的性质 条件概率满足:

① $0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$;