线性代数

xianxing daishu

◆ 主编　刘金旺　朱惠延

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数

主　编　刘金旺　朱惠延
主　审　黄云清

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵理论、向量空间、线性方程组及二次型等，各节后配有适量习题。

本书结构严谨，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。

本书适用于高等院校各专业的线性代数教学用书，也可作为考研、自学人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘金旺，朱惠延主编. —北京：北京理工大学出版社，2009. 8 (2011. 8 重印)

ISBN 978-7-5640-2740-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①刘…②朱… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150299 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http: // www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京市通州富达印刷厂
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 13. 5
字　　数 / 254 千字
版　　次 / 2009 年 8 月第 1 版　　2011 年 8 月第 3 次印刷
印　　数 / 14001～16000 册　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 27. 00 元　　　　　　　责任印制 / 王美丽

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　言

线性代数是高等学校理工科各专业的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，已成为自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具。在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出，高等院校计算机、信息工程、自动控制等专业对线性代数的教学内容从广度和深度上的要求不断提高。本书参照教育部颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求，在总结多年的教学实践经验的基础上编写而成的。

线性代数是高校理工科和经济管理等专业的一门重要基础课程。随着互联网和计算机技术的迅速发展，科学计算在工程技术中的基础地位日益突出，用矩阵方法解决实际问题已渗透到众多领域，其中笔算根本没有用处。因此，提高大学生用计算机解决线性代数问题的实践能力，是后续现代化的迫切要求。但传统的线性代数教学内容和方法注重自身的理论体系，强调线性代数的的基本定义、定理及其证明，对线性代数的方法和应用重视不够，几乎不涉及数值计算，结果是后续课程中该用线性代数的地方都尽量避而不用，多数工科的学生在大学本科阶段没有任何一门课用过线性代数，基础课成了纯粹的“考研课”。

本书的编写着重突出以下特点：①难点问题从具体模型引入，便于学生接受，增强学生建立数学模型的意识；②淡化抽象的概念与定理，便于学生自学；③把数学实验作为一章，实验模型的建立与求解既突出线性代数的理论和方法，又提高了学生应用软件解决实际问题的能力，实现理论和应用的有机结合；④除每节后附有练习外，每章后配有相当数量的综合习题，便于学生复习巩固，提高学习质量，书末附有答案，以便检查练习效果。

书中难免有不妥之处，欢迎广大师生及同行专家批评指正。

编　者

目　录

第一章　n 阶行列式

§1　全排列及逆序数

中学代数中，解线性方程组问题时引出了二阶和三阶行列式，知道它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1-2}$$

其中，元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数.

观察到(1-2)式的右端是一些项的代数和，其中，每一项是位于不同行不同列的三个数相乘，这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的，第二个下标有的则不按自然顺序排列. 我们不禁要问：这个代数和的项数、每一项前的符号与第二个下标的排列顺序有无关系？有什么关系？为此引入全排列与逆序数等概念.

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称排列).

有序数组 12 和 21，由两个数构成，称为二级排列，有序数组 213 则称为三级排列，三级排列的总数为 $3!=6$ 个，4231 为四级排列，四级排列的总数为 $4!=24$ 个，n 级排列的总数是 $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$，读为“$n$ 阶乘”，记为 $n!$；其值随着 n 的增大迅速地增大，例如，$10!=3628800$.

显然 $12\cdots n$ 也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的，其他的排列都或多或少地破坏自然顺序.

定义 2　在一个排列中，如果两个数(称为数对)的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么称这两个数构成一个逆序(反序). 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

排列 12 的逆序数为 0，排列 21 的逆序数为 1，排列 231 的数对 21、31 均构成逆序，而 23 不构成逆序，因此排列 231 的逆序数为 2. 同理排列 213 的逆序数是 1，

即 $\tau(213)=1$. 进一步我们有如下定义.

定义 3 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

二级排列 12 为偶排列,21 为奇排列;三级排列 231 为偶排列,213 为奇排列.

例 1 计算以下各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

(1) 42531;

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解 (1) 对于所给排列,4 排在首位,前面没有比它大的数,对于 4,逆序个数为 0;2 的前面有一个比它大的数,逆序个数为 1;5 的前面有 0 个比它大的数,逆序个数为 0;3 的前面有两个比它大的数,逆序个数为 2;1 的前面有四个比它大的数,逆序个数为 4. 把这些数加起来,即

$$0+1+0+2+4=7$$

故排列 42531 的逆序个数为 7,即 $\tau(42531)=7$,因而是奇排列.

(2) 同理可得:

$$\begin{aligned}\tau[135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]&=0+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

所给排列当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列,当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列.

把排列 231 中的 3 与 1 对换,得到排列 213,这两个排列的奇偶性是相反的,事实上对一般的排列也是如此.

定义 4 一个排列中,将某两个数对调,其余的数不动,这种对排列的变换叫做对换,将相邻两数对换,叫做相邻对换(邻换).

定理 1 一个排列中的任意两数对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$,对换 p_i 与 p_{i+1} 排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$,显然对于 $p_1,\cdots p_{i-1},p_{i+2},\cdots,p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变,仅 p_i 与 p_{i+1} 两数的逆序数改变:当 $p_i<p_{i+1}$ 时,经对换后,$p_{i+1}p_i$ 是逆序,新排列的逆序数增加 1,当 $p_i>p_{i+1}$ 时,$p_{i+1}p_i$ 不是逆序,新排列的逆序数减少 1,所以排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$ 的逆序数相差 1,奇偶性改变.

下面证一般对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_{i+m}p_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$,对换 p_i 与 p_{i+m+1},先把 p_i 往后连续作 m 次相邻对换,排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$,再把 p_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换,排列就变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+m+1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+2}\cdots p_n$,从而实现了 p_i 与 p_{i+m+1} 的对换,它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成,排

列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性，所以两个排列的奇偶性相反.

§2　行列式的定义

现在探讨第 1 节中(1-1)、(1-2)式右端各项的规律：

(1-1)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列，对它们第二个下标进行观察：第二个下标由两个自然数 1 和 2 组成，只能构成两个二级排列：12 和 21，排列个数等于(1-1)式右端的项数，且排列 12 的逆序数为 0，对应项的符号为“+”，而排列“21”的逆序数为 1，所对应项的符号为“−”.

(1-2)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列，第二个下标由自然数 1、2 和 3 组成，构成的三级排列共有 3！=6 个：123、231、312、321、132、213，这正好等于(1-2)式右端的项数，排列为 123、231、312 的逆序数分别为 0、2、2，它们均为偶排列，对应项的符号为“+”，排列 321、132、213 的逆序数分别为 3、1、1，它们都是奇排列，对应项的符号为“−”. 综上所述：(1-2)式右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 $j_1j_2j_3$ 是 1、2、3 的一个三级排列，当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正，当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负，各项所带符号均可表示为 $(-1)^J$，其中 $J=\tau(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数. 从而(1-2)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体三级排列求和.

定义 5　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-3}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项(1-3)式都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(1-3)式带有正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(1-3)式带有负号. 这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1-4}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

例 2 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 根据定义,D 是 $4!=24$ 项的代数和,但每一个乘积项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 中只要有一个元素为 0,乘积就等于 0,所以只需计算展开式中不明显为 0 的项. 由于第 1 行元素除 a_{11} 外全为 0,故只需考虑 $j_1=1$,第 2 行元素中只有 a_{21}、a_{22} 不为 0,现已取 $j_1=1$,故必须取 $j_2=2$,同理必须取 $j_3=3$、$j_4=4$,这就是说行列式展开式中不为 0 的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而列标排列 1234 的逆序数为 0,即此项符号为正,因此行列式 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

行列式中,从左上角到右下角的直线称为主对角线. 主对角线以上的元素全为零(即 $i<j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为下三角行列式,它等于主对角线上各元素的乘积. 主对角线以下的元素全为零(即 $i>j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为上三角行列式,同理可证它等于主对角线上各元素的乘积. 行列式中,除主对角线上的元素以外,其他元素全为零(即 $i \neq j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为对角行列式,由上面可知它等于主对角线上各元素的乘积,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}.$$

上面的行列式中,未写出的元素都是 0.

证　由于行列式的值为 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，只需对可能不为 0 的乘积项 $(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 求和，考虑第 n 行元素 a_{nj_n}，只需取 $j_n=1$，再考虑第 $n-1$ 行元素 a_{n-1}，知 $j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$，由于 $j_n=1$ 知 $j_{n-1}=2$，如此类推 $j_2=n-1$，$j_1=n$，排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$，它的逆序数为 $J=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

由此可见

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

例 4　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

证　记

$$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k+n,1} & \cdots & d_{k+n,k+n} \end{vmatrix},$$

其中

$$d_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,k);$$
$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n);$$
$$d_{i,k+j}=0(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n).$$

考查 D 的一般项，$(-1)^R d_{1r_1}d_{2r_2}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$，$R$ 是排列 $r_1r_2\cdots r_kr_{k+1}\cdots r_{k+n}$ 的逆序数，由于 $d_{i,k+j}=0(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,n)$，可见 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 均不

可能大于 k 值，否则该项为 0，故 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 只能在 $1,2,\cdots,k$ 中选取，从而 r_{k+1}，$r_{k+2},\cdots,r_{k+n}$ 只能在 $k+1,k+2,\cdots,k+n$ 中选取，于是 D 中不为 0 的项可以记作

$$(-1)^R a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n},$$

这里 $p_i = r_i, q_i = r_{k+i} - k, 1 \leqslant r_i \leqslant k, k+1 \leqslant r_{k+i} \leqslant k+n$，$R$ 也就是排列 $p_1 p_2 \cdots p_k (k+q_1) \cdots (k+q_n)$ 的逆序数，以 P、Q 分别表示排列 $p_1 p_2 \cdots p_k$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_k$ 的逆序数，则有 $R = P + Q$，于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1 \cdots p_k} \sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^{P+Q} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1 \cdots p_k} (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} \Big(\sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^Q b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n} \Big) \\ &= \sum_{p_1 \cdots p_k} (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} D_2 \\ &= D_1 D_2. \end{aligned}$$

由于数的乘法是可交换的，所以行列式各项中的元素的顺序也可任意交换，例如，四阶行列式中乘积 $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ 可以写成 $a_{22} a_{11} a_{44} a_{33}$，一般 n 阶行列式中乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$，其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 都是 n 级排列.

定理 2 n 阶行列式的项可以写成

$$(-1)^{S+T} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n},$$

其中 S 与 T 分别是 n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

证 该项中任意两元素互换，行下标与列下标同时对换，由定理 1 知 n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 同时改变奇偶性，于是 $S+T$ 的奇偶性不变，如果将排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12 \cdots n$（逆序数为 0），排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1 j_2 \cdots j_n$（逆序数为 J），则有

$$(-1)^{S+T} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n} = (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由定理 2 可知，当取定一个列下标的排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 时（当然也可以取定一个行下标的排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$），行列式的定义可写为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n) + \tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}. \end{aligned} \tag{1-5}$$

在四级行列式 D 中取定列下标的排列 2413，我们有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)+\tau(2413)}a_{p_12}a_{p_24}a_{p_31}a_{p_43}.$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列(相当于取定 $q_1q_2\cdots q_n=12\cdots n$),而相应行下标排列为 $i_1i_2\cdots i_n$,于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1-6}$$

§3　行列式的性质

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

的行换成同序数的列得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,按行列式定义

$$D'=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D.$$

性质 2 互换行列式两行(列)的位置,行列式反号.

证

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p、q 两列的位置得行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 与 D_1 按(1-6)式计算,对于 D 中任一项

$$(-1)^I a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n}$$

其中 I 为排列 $i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 的逆序数,在 D_1 中必有对应的项

$$(-1)^{I_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n}$$

(当 $j \neq p,q$ 时,第 j 列元素取 a_{ij},第 p 列元素取 $a_{i_q q}$,第 q 列元素取 $a_{i_p p}$),其中 I_1 为排列 $i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 的逆序数,而

$$i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$$

与

$$i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$$

只经过一次对换,由定理 1 知,$(-1)^I$ 与 $(-1)^{I_1}$ 相差一个符号,又因

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

所以对于 D 中任一项,D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等,又 D 与 D_1 的项数相同,所以 $D = -D_1$.

交换行列式 i、j 两行记作 $r(i,j)$,交换行列式 i、j 两列,记作 $c(i,j)$.

推论 若行列式有两行(列)元素对应相等,则行列式为零.

利用行列式的定义不难证明以下 4 条性质.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行(列)乘以数 k,记作 $r(i(k))[c(i(k))]$.

性质 4　行列式中若有两行(列)元素对应成比例,则此行列式为零.

性质 5　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和,例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式某一行(列)的元素乘以数 k,加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘以第 i 行(列)上的元素加到第 j 行(列)对应的元素上,记作 $r(j+i(k))[c(j+i(k))]$,放在等号的上面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r(j+i(k))} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

例 5　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}-4&3&1&-5\\2&-1&1&3\\-1&1&0&2\\-3&3&-5&1\end{vmatrix}\xlongequal{c(1,3)}-\begin{vmatrix}1&3&-4&-5\\1&-1&2&3\\0&1&-1&2\\-5&3&-3&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r(4+1(5))]{r(2+1(-1))}-\begin{vmatrix}1&3&-4&-5\\0&-4&6&8\\0&1&-1&2\\0&18&-23&-24\end{vmatrix}\xlongequal{r(2,3)}\begin{vmatrix}1&3&-4&-5\\0&1&-1&2\\0&-4&6&8\\0&18&-23&-24\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r(4+2(-18))]{r(3+2(4))}\begin{vmatrix}1&3&-4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&2&16\\0&0&-5&-60\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&3&-4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&1&8\\0&0&-5&-60\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r(4+3(5))}2\begin{vmatrix}1&3&-4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&1&8\\0&0&0&-20\end{vmatrix}=-40.$$

例 6 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&b&0&-b\\b&0&-b&0\\a&0&a&b\\0&a&b&a\end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}0&b&0&-b\\b&0&-b&0\\a&0&a&b\\0&a&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&b&0&0\\b&0&0&0\\a&0&2a&b\\0&a&b&2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&b\\b&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2a&b\\b&2a\end{vmatrix}$$

$$=-b^2(4a^2-b^2).$$

§ 4 行列式的计算

定义 6 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序排成一个 $n-1$ 级的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

由定义可知，A_{ij} 与行列式中第 i 行、第 j 列的元素无关.

引理　在 n 阶行列式 D 中，如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij} A_{ij}.$$

证　先证 $i=1, j=1$ 的情形，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} M_{11} = a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} = a_{11} A_{11}.$$

对一般情形，只要适当交换 D 的行与列的位置，即可得到结论.