萬有文庫
第二集七百種
王雲五主編

十九世紀歐洲思想史

（八）

木爾茲著
伍光建譯

商務印書館發行

十九世紀歐洲思想史

（八）

木爾茲著

伍光建譯

漢譯世界名著

第十三章　十九世紀算學思想之發展

作者至此，已到討論第十九世紀科學思想之最後最為抽象部分，久宜聲明此作是思想歷史，不是科學歷史。在以前之十餘章所討論者，是各種繁疊之新揭露，皆拉雜從各宗自然科學取材，不過是表明在此時期，科學家如何從各觀點研究自然事物，其運思闡理如何各有不同。此各項變態，大抵皆由於有新事實之揭露，然而只賴有新事實亦不能充分改變科學家之運思闡理也。自然物種之增加，化學元素及小行星之增加，並不能一定使學者改變其對於所增加之事物之運思觀點及學說或理想之改變，並不一定發生於其所思維之事物之改變，而由於觀者之狀態不同。試以山水風景而言，登臨者忽然見有山水之新方面，誠有驟然改觀，使人頓忘向來習慣觀念，而發生從前所無之種種意想；如是則新揭露者，雖屬細微，而有歷史的意味，雖或此項意味發生於觀者之思想之改變，故覺得其為

重要，不盡由於細微之揭露也。

二、思想與知識之別

可見科學知識與科學思想之分別，生於兩種因子——一方面是科學或自然事實，一方面是科學家之心境。讀者乍觀之，以爲一到抽象之算理科學，而此分別卽銷滅；因爲命數及計數，只與思想手續有關係，一若算學卽是思想科學，不然亦是其中之一部分。讀者不免發爲一問，試問算學科學與算學思想有何分別？試一考慮，或以爲並無分別。作者將於此章發明其有分別，將以第十九世紀算學之發展發明之。

三、流俗對於算學之成見

世人有能計算、能量度，而不致力於算學者，往往謂算學並無何種新事理，因爲以二加二，永遠是四，三角形內之三角之和，等於兩直角，所有算學手續，不過是繁複問題，有永無止境之繁複，雖有善算家，亦爲所窘。此類人以算學歷史比象棋或紙牌之歷史，有無窮盡之繁複變化。以爲淺近算學及高等算學之繁複細密，

〔一〕原註〕西薇士德教授之言曰：「有多數人讀歐幾里得幾何原本，第一卷第四十七題之後，以爲一切算學，不過是一種有病泌液，如蚌病生珠。」亦

有以爲是一種秉燭照路之人，或侍女之爲貴婦人捧拖地之長裙脚者。然近有人登一極聰明之著作於雜誌，以爲習算學，不過如研究象棋，或中國之七巧圖。且發爲問難，問算學之發明三角形之三角之和，等於兩直角，或每偶數是（或許是）兩個素數之和，或奇次方程式必有一實根，與吾人有何關係。謂如此諸宗發明，實在是陳腐，平淡，陰沉，無用，反不如讀報章登載某貴人與某貴人結婚，或某國與某國賽船之較有趣味。此種議論，直與賞鑒美術建築者之只觀其磚瓦木石，或賞鑒名畫者之只觀其顏色碟中之顏料，聽音樂者之只聽奏樂者偶然吹彈之聲。算學所發露之意想世界及在其中深思所引伸之種種美觀與秩序，各部分相連接之和翕，其管轄之廣及眞確之絕對證據等等，皆能令人起敬。假使展開一幅宇宙圖，假使吾人得有一覽宇宙創造之規模，亦不能駁倒或損害算學之眞理」（見西薇士德教授一八六九年在英國科學提倡會之演說，登於報告第七頁）。

有無窮盡之材料，以操練學生之心能，或供考員考生考試之用；此類人向不考慮算學思想（與算學問題有分別）是否亦能慮及已有根本上之變化，或根本上之發展。

四、算學之用

與此有密切關係者，尙有算學有何用處之問題。對於此問題，世人有兩種極端見解。

〔原註〕近代之兩位最大之算學家，有牛頓與高斯。牛頓屬於第一種，高斯屬於第二種，而不能絕對劃清界限。牛頓在純粹算學中之新創造，與高斯之在實用算學之新創造，大約相等。牛頓曾創造流算術（〔譯者註〕卽微分術），亦曾施於實用，而遲疑不欲刊布，大約因爲本人

以爲關於此術之邏輯根據，尚未能滿意。高斯亦因未得有物理根據，而拋棄其電動力理想（參觀上文，第六十七頁）。他人則不然，不爲如是之邏輯及應用之爲難所阻，悍然不顧，毅然爲之，而得成效，大有利益於科學進步。牛頓最大之著作「算理」，爲算學物理學建立基礎。高斯則有「數學論」，爲高等數學（與代數有區別）立基礎。此兩大著作，皆追隨古代算學派之組合法（「譯者註」與近代之分析或解析法不同），頗爲難知，往往令學著望而生畏。此兩大著作，皆無捷徑，能使學者易得效果，皆不爲巴黎學會所喜。刊行之後，閱二十餘年，始受學界承認。牛頓之所以能較早得名者，由於有各項研究及創造，而其所著之光學爲尤著。高斯之所以享大名者，由於其理想之重新發露小行星Ceres（可稱五穀星或嘉禾星）（參觀上文卷一第一八二頁）。產生牛頓之英國，至今仍以研究算學物理學聞於世。產生高斯之德國，至今仍以極抽象之算學研究顯名。作者不必舉生存之大算學之名，只舉其已故者，如英國之斯托克斯，馬克斯維耳，德國之格拉斯曼，外耳斯特拉斯(Weierstrass)，坎托耳(Cantor)是也。有以算學不過是計量之工具者，「原註」赫胥黎之言曰：「算學可比極精巧之磨礱機器，能磨物磨至極細微，然而所出全賴所入，世界上無論如何最好最大之磨機，絕不能以豆子入而麥麵出，亦如算學之以散漫定數，入於長篇累牘之公式中，而有一定之效果磨出」。又有一次赫胥黎又發議論曰：「算學全不知有瞻察，有歸納，有試驗，有原因」。其第一次議論，爲克爾文所承認（見「通俗演講」第二冊第一○二頁）。其第二次議論，則爲西薇士德教授所力駁，見於其著名之演說（一八六九年「英國科學提倡會報告」第一等頁）。迨一見算學討論之不能有利益於力學、天學、物理學、統計學、及其他科學者，則興致索然，不復注

意。亦有走其他極端者，則是酷嗜純粹科學之人。如是者則以算學（而以數目學說居首列）為惟一眞確科學，「原註」高斯以算學為「科學之王后」，以數學為算學之王后。算學王后，往往屈尊降格，為天學及其他科學出力，然而無論何處環境，王后皆應坐首位」（見窩爾式茲豪增(Waltershausen)所撰「高斯紀念錄」，一八五六年來比錫版，第七九頁）。一八八三年，撰力(Cayley)在科學提倡會之會長演說，常為著作家所引。其言曰：『算學在一方面則接連平常日用物理科學，在其他一面則接連於哲學，此則與吾人時間處間之意想有關係，及算學之普遍及必然之眞理所發生諸問題，及吾人關於此項知識之基礎。予且謂數學及代數，與時間意想之相連（倘若有之），則不若幾何與處間相連之顯著』（參觀其「算學論文集」第九冊，第一三〇頁）。高斯除建立高等數學之外，又致力於幾何之基礎，又因其對於數目學既，有極多之期望，因是亦有「大希望於幾何，因見其中有未開闢之區域，有非其時之算術所能征服者」（「高斯紀念錄」第八十八頁）。其所謂實用，只在其本有或能啓發純粹算學問題。此類學者大抵只致力於考查及鞏固算學闡理之基礎，及澄清其方法，創造謹嚴有力之證明，驗明通行意想之施用為堅實可靠與否，及其範圍。吾人可以謂前者重實用，後者注重哲學，其注重於哲學方面者，則注意於邏輯及玄學之抽象存在，「原註」在此兩者外，可加心理學。雷文·保羅教授，頗致力於此問題（參看以下諸書：「函數通論」一八八二年版第一部；「科學智識論」一八九〇年版，及其論文「數徵

積分學之逆理論」（載「算學年報」第九冊第一四九頁）。除所謂實用及哲學之外，近代則發生所謂純粹邏輯一方面。此方面提議關於毋論何項算學研究之發展，以有定與邏輯相接之繁複意想而處置之，對於用毋論如何偶然而得之巧妙方法以解決一定問題，不甘滿意。著名之大幾何學家斯泰涅(Steiner)，即是如此，絕不肯求助於分析法以解決幾何問題，以為幾何是一完全機體，應以其本有之法，解決此項問題。此項學說，有近日發展之羣算學說，以鞏固之。一羣運算，解作如是運算之結局之引歸同類之運算。篤守謹嚴家法之算學家之視用混雜方法，及運算不同羣者，則極不以為然，卽如吾人之批評英國文章家，不能以清淨英文達意，而借用外國文句者。其最好輸入外國文句者，莫如德國，惟對於算學，則篤守清淨主義。

五、對於算學有兩層注重

其視數目及形，以為是人類思想之最高等者，或以為是眞實元素。在上古時代，已有兩層注重，「原註」關於此問題之著作甚多，作者今舉其二。著名算學家韓克爾(Hankel)（本章後文將詳論之），不獨在高級算學中，發明多數創解，且極注意於算學之哲學根據，及其歷史的流源。一八七〇年，曾著有極有意味之小著作，名曰「古代中代算學史」。此外則有坎托耳教授之「算學史講義」，共三冊。此作起自上古，至一七五八年為止。關於兩層注意，韓克爾有言曰（見前第八十八頁）：「從希臘哲學家之算學研究，惹吾人留意時起，則見算學之方面，有根本之改變，在進化較早之民族中，吾人只見算學之歌訣，及實驗所得之規則，以應實用之需而已。其所用之方法，皆孤立而無聯貫。希臘哲學家之意想則不然，自其知有算學之時起，則知其中有超越於實用界之外之物存在，有應注意者，並知其有以普通公式代表之可能，卽謂算學是一科學。希臘算學家之所以過人者在此。雖吾人明知其取材於古代埃及，然而並不能滅希臘算學家之功也」

觀於畢達哥拉斯及柏拉圖兩算學派所用『幾何』名詞及算學討論，可知矣。有一古代殘編，數及希臘算學家者，〔原註〕此殘編即指蒲羅克魯(Proclus)所保存者，全載於坎托耳之「算學史」(第一冊第一二四等頁)。甘托稱為算學之古代目錄，以為是歐德謨(Eudemus)之作。此君是逍遙派哲學家，曾著有數種幾何學史，及天文學史(見坎托耳大作第一冊第一〇八頁)。其論畢達哥拉斯有言曰：『此君將算數變作一種實在科學，因為其研究算學基礎，從較高之觀點起首，且研究其中諸問題，從物質方面少，從知識方面多。』〔原註〕見坎托耳書第一冊第三七頁。其論柏拉圖曰：『此君之著作，極多算學討論，可見其毋論在何處，常以幾何學附於哲學。』〔原註〕坎托耳書第一冊第二一三頁。

算學與其他科學相接之兩層意想，經千百年後，又顯現於第十九世紀。在以前十數章中，作者曾經記載，因有多數受算學圍範之富於效果之意想，由是算學思想大為發展，今將使讀者注意於科學根基所受之哲學研究，及算學思想之侵入哲學思想。〔原註〕例如新近研究之「複摺處」間為坎托耳教授所發起者，此又是算學科學中別開生面，前此不過是哲學問題。參觀刻立(Kerry)所著之坎托耳學說論之末段，載阿份那留斯(Avenarius)之「科學哲學雜誌」(一八八五年)，第二三一頁。因是之故。此冊

之末後一章討論算學思想者，恰好爲本歷史第二部討論哲學思想之過渡。

六、算學之源頭

有人謂希臘之算學，發源於古代埃及之幾何，其時幾何專爲測量而用，因測量而發生最早之算學問題。近代算學思想，則有刻卜勒（或作克普洛）、牛頓、拉普拉斯之量天學：因量天及推算天象力學，於是有第十七第十八世紀所創新法，以解決天學各問題；第十九世紀算學家之事功之對於各項新說新法，亦如紀元前三百年歐幾里得之對待當時之算學。蒲羅克魯有言曰：『部署各項元素，有多數得自攸多克薩斯（Eudoxus）者，亦有得自提厄特塔斯（Theaetetus）者又將前人所忽略未經證明者，則以謹嚴方法證實之。』〔原註〕此是坎托耳所引者，見「算學史」第一册第二四七頁，又見「韓克爾「古代中代算學史」第三八一等頁。歐幾里得一人爲希臘科學所建之功，在第十九世紀則有多數大思想家，以之部署整齊第十七第十八兩世紀之新法新說，其功業尤爲顯著者，則有高斯、科犀、外耳斯特拉斯、克來因教授。克來因教授謂：『吾人所處之世代，爲一最要關鍵時代，與歐幾里得所處時代相似。』〔原註〕參觀一八九三年八月九月克來因教授之「算學演講」，最要

者爲第六次演講。在此演講中，克來因教授發表其純粹算學與實用科學之關係之見解（此在芝加哥算學會所演說者，刊於「美國算學會報告」第一册第一三三頁，一八九六年紐約版）。克來因之見解，則根據於「直接知覺文質」之分。：：「所謂文者，歐幾里得是也。以根抵牢固之公論（亦作公理）爲基礎，而謹愼將事，以發展其組織，對於有公量與無公量，有極清楚之分別。：：所謂質者，則最活動於產生微分積分時代，例如牛頓毫無疑義假設爲無動不有動點之速率，並不費事研究是否有接連函數之並無導來者存在」。○克來因教授之意，以爲「此事之根本，在於從質之直接知覺，並非確切，從文之直接知覺，則並非直接知覺，實生於公理之邏輯發展，而以公理爲完全確切也」。○其後克來因教授又發明，從質直接知覺所灌輸於元素意想之元素；在以邏輯發展之中，則忽略不計，於引出結論之不能以直接知覺實驗者，因無心像發生之可能也。例如洛巴赤夫斯基(Lobatchevsky)及里曼之抽象幾何，引生柏爾特拉米(Beltrami)之假球體之邏輯意想，此又是吾人心境所不能造之意像。彷卡累所著之「科學與假設」（一八九三年巴黎版），亦發表相似之見解。其言曰（第九十頁）：「：：在幾何創世紀中，以實驗爲至要之品，至若以之爲實驗科學，則大謬不然。：：幾何學僅爲研究固體運行之用，但其究竟，並非注重自然固體，其在意想固體永不變化，而爲一種簡明深遠之意像歟。：：幾何學之唯一目的，卽在研究一種特別類集，而該類集之普通觀念，當預爲印入吾人思想中。：：惟在此類集間，應選擇吾人所能產生之一種自然現象，以作模型也」。直接知覺之算學，與邏輯算學之分別，又可見於其他方面。因近代算學之繁雜，及近代學說之文縟，而「發生簡略之算學組織，以便於實用科學之用，使學者不必走遍抽象算學之全境」（見克來因「算學演講」第四十八頁）。英國則有培理(Perry)，首先發起刊行其著名之工程家之微積

分學。克來因敎授頗歡迎此作，於是而有多數往來之函牘，刊於「自然報」中。有多數人皆同認從初級算學以至高級算學，必特開捷徑，以達於自然科學，不能如今日學校規定之繁雜，先從幾里得入手。惟是對於無論何種科學，若分開爲邏輯研究，與實用研究，猶如在德國之分開大學與藝術學校，亦有其危險，此亦爲克來因敎授所承認者（見「芝加哥算學雜著」第一三六頁）。

七、高斯

因高斯在第十八世紀之末年，卽起首有數學幾何之根本問題及審評問題之研究，遠在科犀發生潛力之前，是以高斯之名宜居首列。今日因有高斯著作之刊行，及其與同志往來之函牘之出現，其與天學家柏塞爾之來往函牘爲尤要，更有以證明其地位。吾人今日始知毋怪當時視高斯爲一種算學神使，『凡有學說，無不經過高斯之從各方面研究者。』（原註）見柏塞爾一八一〇年十二月二十七日致高斯書，刊於「高斯與柏塞爾往來函牘」，一八八〇年來比錫版，第一三二頁。高斯心中早已預料將來算學思想發展之方向，然而第十九世紀前半期之算學闡理之大變更，則並非由於高斯。高斯不善教人。

八、科犀

第十九世紀之第一季，只有巴黎一處，教人以高等算學。科犀在巴黎，其先當講師，隨後當教授，施展其潛力於著名之藝術大學，及索爾奔(Sorbonne)大學，及法國學校。

科犀性情與高斯不同：高斯爲人，驕傲自滿，令人不能親近，其最精美最完備之算學著作，卽崇拜之者讀之，亦以爲可厭，（「原註」參看法爾孫「科犀學案」一八六八年巴黎版，第一冊第六十等頁。）因其命題措語之新奇難曉也，（「原註」『從前有人述其解說之論調，卑鄙不足道，蓋其立意無常，出爾反爾，而終無以成功也。克禮爾謂，阿柏爾稱高斯所著書，都屬卑劣，無用，以其解說不明，令人無從知其意義也』（見標克尼撰「阿柏爾傳」，法文譯本，一八八五年巴黎版，第九十二頁）。）高斯又最厭演講：科犀則饒興致，有耐煩，善於教人，（「原註」『科犀綜合歐拉，蘭格倫日，拉普拉斯，高斯，雅各俾諸家之說，以熱心教授爲其職志。其爲人也，大度淳厚，熱烈提攜，始終不易，誠長者也』（孔白士 Combes 語，見法爾孫「科犀學案」第一冊，第六十三頁）。）好與學生長時之研究，刊布其根據於微積分學之演講，以利後起之算學家，是以有創造新算學思想派之功——不獨在法國如是，且及於外國，外國之大思想家，例如阿柏爾(Abel)，無不感激科犀者，以科犀指示惟一進步之正路也。（「原註」參觀標克尼所撰之「阿柏爾傳」第四十八等頁，及第三百頁。科犀之「分析學」發現於一八二一年，其所著之「微分學綱要」，則發現於一八二三年，此作則阿柏爾於致友人書中所引者。）作者今將試爲規定此新學派，與在前大名鼎鼎之歐拉、蘭格倫日、拉普拉斯學派，有何分別。

古代算學與今代算學之分別，卽在乎介紹代數，而用於幾何及力學，又在乎創造微分學積分學，由是古時幾何學家之直線、平圓、渾圓（球體）圓錐等之定理，得以推廣而用於無窮盡之各種曲線及面——凡此皆自然物及自然變象之現於吾人之瞻察者，由論理方面觀之，此是極偉大之融通手續，根據於推論及歸納，有時只根據於直接知覺。〔原註〕「吾人每憶力學函數所具之程式，往往有出於自然之現象，且將與該程式歧異者，悉數摒棄不用，並非由明瞭嚴正之說明以引導之，實由一種直接知覺及無形之天性所使然也」（見傍卡累所撰之「外耳斯特拉斯算學著作」，載「算學報告」第二十二冊第四頁）。

九、融通手續

如是之融通手續，關於科學進步有兩宗效果。

第一宗較爲顯著之效果，卽是因有融通方法，則對付特別問題之能力增加，研究之域區由是而推廣。自有笛卡兒、牛頓、來伯尼茲之創造以來，一百年間算學家所致力者，卽在探視新開闢之區域，發起各方面所現露之無限若干問題，而試爲解決之；遇有不能得完全恰切之解決者，則創法以求得其近是，以便於實用。既有如是方針，算學家所應作之事，及所欲解決之問題，已極其多，是以第二宗較爲

不甚能施於實用之效果，爲第一宗所遮掩。第二宗較爲不顯露之研究，可以謂之從邏輯方面之發展。此項事功，與當時歐幾里得之施於古代幾何者同等，卽是定爲明晰界說，及無疑義不騎牆之公理；由界說及公理，由謹嚴闡理以達於新科學之各項理題。「原註」對於定界說之事，傍卡累曾爲議論，其尤爲注意者，則是「函數」名詞，此意想，最先是歐拉所介紹，而並未定有謹嚴界說。傍卡累前書有言曰：「在十九世紀初，函數之意義，係一種範圍太狹而過於空泛之意想也：：此種界說，有規定之必要，緣解析法之得以完善正確者，非此界說不爲功」。至一八六〇餘年間，外耳斯特拉斯，乃有謹嚴之處置，惟是近代算學家所創造之各項公式之必要，有謹嚴之審查，則科犀一八一四年刊行之「有定積分術學默論」，已經先事聲明。勒戎德耳卽據此意，以製報告，但是遲至一八二五年始刊行。惟是遷移或繙譯幾何的及力學的意想於代數，則發生新式邏輯問題，予新算學以新方面。此新問題卽是重新遷移代數公式幾何意想，譬如以代數文字譯作幾何文字，卽是由代數公式製成幾何形式。「譯者註」卽還原法。此是還原術。毋論其爲理想，抑爲實行，

一〇、反向運算

所有算學進步之靈魂及原理，卽在還原中。「原註」大概而論，運算有兩種。其一，卽是以幾何關係（由直接知覺所得者），譯作代數關係。其二，卽是推廣代數關係，依數目次序，或向前行，或向後退，所謂數自，通常是指數。此兩種運算所得之新關係，

必要解釋，此項解釋，幾乎無不推廣吾人知識，或引吾人發生新意想，第一種運算之淺近榜樣，卽是製造高冪之數之幾何形。算學家公同認可，以a代一線之長，a^2為面積，其餘之a^3，a^4……a^n究是何物。能否得有幾何意義，附於此諸項記號耶。第二種榜樣，卽是$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$……$\frac{d^ny}{dx^n}$，如是運算，已自行發現其反向之序，因為其倒數之指數，皆是負號。有何意義，能附於此項記號耶。更進而論之，若從一記號，至其最近之記號所指之運算為已知或能作，又如何能作反向運算（還原）耶。在第一類問題中，吾人是從直接知覺所得之次序進行至於純粹之邏輯次序，其後要從純粹邏輯次序，折回於直接知覺次序之意想。在第二類諸問題中，吾人既以追隨一定之邏輯次序，欲知反向運算，有何發生，及如何能作到。算學家原知思想之直接及間接手續，是一切算學關理之根據，輪流施直接及間接手續，是算學進步之原理。其首先發明者，則是大算學家韓克爾，見於其所著之「繁複數系學說」，八六七年來比錫版。其先則已有裴各克力持此說，見於其所著之「報告」，登於一八三三年「英國科學提倡會報告」第三冊，。在第二百○二十三頁，裴各克發為議論曰：「代數有兩宗界限極分明之手續。其一是直向，其一是反向，大概而論，為離之程度，極不相同。在第一宗內，吾人從一定之運算前進，用各種指明闡理手續，得有效果，此效果有普通形式，而有特別價值，隨後又作為普通價值。在第二宗內，吾人則從普通效果前進，要從其形式及結構中，揭露當值效果，若或有一定運算生此效果，則要揭露其最簡單數量，為彼諸運算所從起者。關於此各項手續，吾人已引示榜樣，所有一切分析事功，幾乎全在於發現之無窮盡之種種不同形式中，討論發展此各項手續。裴各克此極有意味之作，計及盡近時代及包括一切之關於大陸算學家，如高斯，科犀，阿柏爾諸子著作之報告，竟無甚潛力，及於英國算學之發展，殊為可異。惟是英國算學，

由於一獨立之學動，而改變，近代算學思想，此新學動即創造運算術是也。此項改變，能有如下之解說，即謂量學(science of magnitude)必先從形式學說，或形理(doctrine of forms)，或關係學說入手，又謂量學不過是形學(science of forms)之引伸其意。此運學術，原有格拉斯曼獨立之預備。韓克爾論格拉斯曼之言曰（「繁複數系學說」第十六頁）：「形式學說之意想，及此學說應在量學之先之意想，及從形學觀點以研究量學之意想，若只用於證明已知，而又曾經有充分之實驗證明之諸項理題，則關於算學之發展，無甚大用。格拉斯曼則首先以眞正哲學精神，考慮此項意想，從包括最廣之觀點，以研究之」。韓克爾亦論及斐各克及得摩爾根，可惜韓克爾之於此兩君之著作，未見其全豹（見第十五頁）。在最新近時期，槐特赫德(Whitehead)則存一宗意想，謂「最實義之算學，即是各種形式不得不然之演繹關理之發展」。此宗意想之最初發展，已見於其所著之「普括代數」（一八九八年劍橋版，第一冊）。參觀此作之序（第六第七兩頁）。

第十七世紀之造創，予進步以兩大機會，及創生算學新意想。譯幾何意想爲代數文字，則啓發反向運算，以幾何意想解釋代數名詞，由是有幾何知識之異常增加。

「原註」輪用直接知覺（即歸納）及邏輯（即演繹）方法之最好榜樣，則見於近代之曲線學理。笛卡兒所創造之以一方程式代表一曲線，則發生曲線之次，及曲線之級及其幾何之當值。而曲線之切線幾何意想，則發生曲線之類，此則不能從曲線之方程而顯現，因曲線各有其類，則發生其他分析法之圖示，其間則曲線之切線特性，變作較爲顯現。一八三二年，普勒刻發起第三法，以研究直線，先從曲線所現之「特品」入手，定其界限，而建立其方程式。關於此項「特品」，再爲進步之研究，則發生所謂曲線之屬。或曲線