HIT

数学 · 统计学系列

Introduction to the Theory of Algebraic Equations

代数方程式论

[美] 迪克森 著　黄缘芳 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

代数方程式论

Introduction to the Theory of Algebraic Equations

[美] 迪克森 著

黄缘芳 译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书为美国著名数学家迪克森的一本代数学经典著作，包括上、下两编，共十一章．对了解代数方程式论的历史是很好的素材．

本书适合大中专师生及数学爱好者阅读及收藏．

图书在版编目（CIP）数据

代数方程式论/（美）迪克森著；黄缘芳译．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.3

ISBN 978-7-5603-3280-2

Ⅰ.①代… Ⅱ.①迪…②黄… Ⅲ.①代数方程-理论 Ⅳ.①O151.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 088667 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 7.25 字数 134 千字
版　　次 2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3280-2
定　　价 18.00 元

⊙著者简历

迪克森(L. E. Dickson)美国人,曾得哲学博士学位,美国芝加哥(Chicago)大学数学教授,为美国第一流代数学者,著作除本书外尚有:

算术及其代数(Arithmatics and Their Algebras);

近世代数理论(Modern Algebraic Theories);

线性代数(Linear Algebras);

代数不变式(Algebraic Invariants);

数论史(History of the Numbers),3 卷;

数论研究(Studies in the Theory of Numbers);

数论初步(Introd. to the Theory of Numbers);

初级方程式论(First Course in the Th. of Equations);

方程式论初步(Elementary Th. of Equations);

不变式及数论(On Invariants and the Th. of Numbers),载于 Madison 算学讲演集中;

及与 Miller-Blichfeldt 合著之有限群(Finite Groups)等书.

⊙序

普通二次方程式解法，在 9 世纪时即已发现至于普通三次及四次方程式解法，直至 16 世纪始告发现．过此两世纪间，多数学者致力于普通五次及高次方程式解法，而卒无成．1770 年，Lagrange 将前人解法加以解析，得将各种解法纳于同一原理之下，利用豫解式以求方程式之根，并证明普通五次方程式不能借有理豫解式之助而解之．继此以后，Abel，Wantzel 及 Galois 诸氏遂证得普通 $n(>4)$ 次方程式不能借有理或无理豫解式之助，而得代数解法．又由此等代数研究，遂产生代换论及群论．法国算学家 Cauchy 氏即首先对代换作系统研究之人（参看 Journal de l'école Polytechnique（工艺学校杂志），1815）．

本书系按历史上发展之程序而叙述．上篇论 Lagrange-Cauchy-Abel 诸氏之普通代数方程式论，下篇则论列 Galois 氏之代数方程式（其系数为随意或特殊皆可）论叙述力求浅现，立言皆从初等代数出发，不牵连及算学上其他各门类，书中并有许多例解及初等习题，以资读者学习．

著者草此书时，除引用杂志上各门类论文外，并参考次列各书：

Lagrange：Réflexions sur la résolution algébrique des équations（方程式代数解法之评论）；

Jordan: Traité des substitutions et des équations algébriques(代数方程式论及代换论);

Serret: Cours d'Algèbre supérieure(高等代数学);

Netto-Cole: Theory of substitutions and its Applications to Algebra(代换论及其在代数学上之应用);

Weber: Lehrbuch der Algebra(代数学);

Burnside: The Theory of Groups(群论);

Pierpont: Galois' Theory of Algebraic Equations (代数方程式之 Galois 氏理论),刊于 Annals of Math (算学年报)第二辑第一、二两卷中.

Bolza: On the Theory of Substitution-Groups and its Applications to Algebraic Equations (代换群之理论及其在代数方程式上之应用),刊于 Amer. Journ. Math.(美国算学辑报)之第 13 卷中.

Oscar Bolza 于 1894 年,E. H. Moore 于 1895 年,Sophie Lie 于 1896 年,Camille Jordan 于 1897 年皆讲授群论,著者均亲承教泽,兹乘此机会,谨致其感谢之忱.

在上述各方面中,著者受 Bolza 教授之讲演及著作之影响尤大;本书第 65 节内,方程式之群之例,即系得教授之许可,由其讲义中摘出者.

本书为著者于 1897 年在 California 大学讲演,于 1899 年在 Texas 大学讲演,及 1902 年在 Chicago 大学讲演两次所得之收获.

1902 年 8 月

L. E. Dickson 序于 Chicago

⊙译者附言

1.本书译文力求忠实，务使原书内容毫无挂漏，除§45，§46与原书次序互调外，其余章节，无所改变；至此两节互调之原因，全为求读者容易了解计耳.

2.本书术语多采用国立编译馆所暂定者；间有一名数译或前后不一致处，则由译者意见选用之.遇有未经拟定之名词，则参酌日文著作而定之.

3.本书人名皆用原文，不用译音，以免混淆及隔阂之病.

4.译者自维浅学，如有不当处，尚望海内人士不吝赐教！

中华民国二十四年元旦

黄缘芳书于承瑞室

目录

上　编

Lagrange-Abel-Cauchy

诸氏普通代数方程式论

普通二次三次及四次方程式之解法 关于根内无理数之 Lagrange 氏定理[①]

第一章

§1. 二次方程式(Quadratic equation) 二次方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根为

$$x_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{p^2-4q}),\ x_2=\frac{1}{2}(-p-\sqrt{p^2-4q})$$

将此两式相加、相减并相乘,得

$$x_1+x_2=-p,\ x_1-x_2=\sqrt{p^2-4q},\ x_1x_2=q$$

由此知根式内之无理式 $\sqrt{p^2-4q}$ 可以根之有理函数表之,而等于 x_1-x_2. 至函数 x_1+x_2 及 x_1x_2 为根之对称函数,得以系数之有理函数表之.

§2. 三次方程式(Cubic equation) 普通三次方程式之形为

$$x^3-c_1x^2+c_2x-c_3=0 \tag{1}$$

令 $x=y+\frac{1}{3}c_1$,方程式(1)可化简为

$$y^3+py+q=0 \tag{2}$$

此处

$$p=c_2-\frac{1}{3}c_1^2,\ q=-c_3+\frac{1}{3}c_1c_2-\frac{2}{27}c_1^3 \tag{3}$$

---

① 见于 Lagrange 论文集(Œuvres de Lagrange, Paris, 1869)第三卷中,标题为"Réflexions sur la résolution algébrique des équations"(方程式代数解法之评论);此文于 1770—1771 年间,首由柏林学院刊行.

此时,方程式(2) 缺 y^2 项,称为**既约三次方程式**(Reduced cubic equation).将来此式解后,方程式(1) 之诸根可由 $x = y + \frac{1}{3}c_1$ 求之.

在 1505 年以前,三次方程式(2) 已为 Scipio Ferreo 所解;后来 Tartaglia 复发现其解法,而以严守秘密为条件,传之于 Cardan,但 Cardan 不遵信约,于 1545 年刊登其法于所著书《Ars Magna》中,世所称为 Cardan 解法是也.次列之法,乃 Hudde 在 1650 年发表者.其法,以变换式

$$y = z - \frac{p}{3z} \tag{4}$$

代入方程式(2),得

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

即

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{5}$$

此式可作为 z^3 之二次方程式解之,得

$$z^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{R}, \quad R = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$$

设以 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}}$ 表 $-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}$ 之立方根之一,则其余两根为

$$\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}} \quad 及 \quad \omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}}$$

此处 ω 表 1 之立方根内之一虚根,其求法如次:

1 之三个立方根乃方程式

$$r^3 - 1 = 0$$

或

$$(r - 1)(r^2 + r + 1) = 0$$

之根.方程式 $r^2 + r + 1 = 0$ 之二根为

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \omega$$

及

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \omega^2$$

故

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1 \tag{6}$$

由

$$\left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}\right)\left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}\right) = \frac{1}{4}q^2 - R = -\frac{1}{27}p^3$$

之关系,立方根 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}}$ 可选其能使

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}} = \frac{1}{3}p$$

者用之,所以

$$\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}\cdot\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=-\frac{1}{3}p$$

$$\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}\cdot\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=-\frac{1}{3}p$$

故方程式(5) 之六根可分为三对,各对之积皆等于 $-\frac{1}{3}p$. 于是与任一根 z 相配成对之根为 $-\frac{p}{3z}$. 由式(4) 知其和 $z-\frac{p}{3z}$ 为三次方程式(2) 之一根. 又配成一对之二根均导出同一之 y 值,故方程式(5) 虽有六根,只能导出方程式(2) 之三根. 更因方程式(5) 之任一对根之和皆得方程式(2) 之一根,于是,得方程式(2) 之三根 y_1,y_2,y_3 之 Cardan 氏公式为

$$\begin{cases} y_1=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}} \\ y_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}} \\ y_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}} \end{cases} \tag{7}$$

以 $1,\omega^2,\omega$ 顺序乘上列诸式而加之,并引用式(6),得

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{R}}=\frac{1}{3}(y_1+\omega^2y_2+\omega y_3)$$

次改用 $1,\omega,\omega^2$ 顺序乘上列诸式而加之,得

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{R}}=\frac{1}{3}(y_1+\omega y_2+\omega^2y_3)$$

如将此两式之立方差分解为因子,且引用全等式 $\omega-\omega^2=\sqrt{-3}$,得

$$\sqrt{R}=\frac{1}{54}\{(y_1+\omega^2y_2+\omega y_3)^3-(y_1+\omega y_2+\omega^2y_3)^3\}=$$

$$\frac{\sqrt{-3}}{18}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$$

故方程式(7) 之诸根内无理数,皆得以根之有理式表之,此为 Lagrange 氏首先发现之结果也.

函数

$$(y_1-y_2)^2(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2=-27q^2-4p^3$$

称为三次方程式(2) 之判别式(Discriminant).

普通三次方程式(1) 之根为

$$x_1=y_1+\frac{1}{3}c_1,x_2=y_2+\frac{1}{3}c_1,x_3=y_3+\frac{1}{3}c_1$$

故 $$x_1 - x_2 = y_1 - y_2, x_2 - x_3 = y_2 - y_3, x_3 - x_1 = y_3 - y_1$$
而
$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) = (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = \frac{18}{\sqrt{-3}}\sqrt{R} = -6\sqrt{-3}\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} \tag{8}$$

习　　题

1.求证 $x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = y_1 + \omega^2 y_2 + \omega y_3, x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = y_1 + \omega y_2 + \omega^2 y_3$.

2.若 $R > 0$,则三次方程式(2)有一实根及二虚根;若 $R = 0$,有三实根,且有两根相等;若 $R < 0$,即所谓不可约款(Irreducible case),此时方程式(2)之三根皆为实根而不相等.

3.求证三次方程式(1)之判别式$(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$等于 $c_1^2c_2^2 + 18c_1c_2c_3 - 4c_2^3 - 4c_1^3c_3 - 27c_3^2$.

提示:用式(3)及(8)以求之.

4.$-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}$ 之三立方根与 $-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}$ 之三立方根次第相加 $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{R}}$,共得九式.求证:此九式乃次列三个三次方程式之根

$$y^3 + py + q = 0, y^3 + \omega py + q = 0, y^3 + \omega^2 py + q = 0$$

5.求证:$y_1 + y_2 + y_3 = 0, y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = p, y_1y_2y_3 = -q$.

6.用习题5,求证:$x_1 + x_2 + x_3 = c_1, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c_2, x_1x_2x_3 = c_3$.倘欲由方程式(1)直接导出此等结果时,其方法如何?

§**3.**六次方程式(Sextic)(5)之根,若除去因数$\frac{1}{3}$不计外,可列为

$$\psi_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_2$$
$$\psi_2 = \omega^2\psi_1 = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1$$
$$\psi_3 = \omega\psi_1 = x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2$$
$$\psi_4 = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2$$
$$\psi_5 = \omega^2\psi_4 = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1$$
$$\psi_6 = \omega\psi_4 = x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3$$

此等函数相异之点在 x_1, x_2, x_3 排列次序之不同;三文字共有六种排列,故将函

数 ψ_1 内之 x_1, x_2, x_3 予以排列后,即得此等函数之全部.因此,ψ_1 称为六值函数(Six-valued function).

Lagrange普通三次方程式(1)之演绎的解法,在直接决定六函数 $\psi_1, \cdots, \psi_6$.此等函数乃六次方程式 $(t-\psi_1)\cdots(t-\psi_6)=0$ 之根,其系数为 $\psi_1, \cdots, \psi_6$ 之对称函数,故亦为 x_1, x_2, x_3 之对称函数;于是,可以 c_1, c_2, c_3 之有理函数表之.①次因 $\psi_2=\omega^2\psi_1, \psi_3=\omega\psi_1, \cdots$,由式(6)得

$$(t-\psi_1)(t-\psi_2)(t-\psi_3)=t^3-\psi_1^3$$

$$(t-\psi_4)(t-\psi_5)(t-\psi_6)=t^3-\psi_4^3$$

故六次豫解式(Resolvent)化为

$$t^6-(\psi_1^3+\psi_4^3)t^3+\psi_1^3\psi_4^3=0 \tag{9}$$

但由 §2后之习题6

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_4 &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+(\omega+\omega^2)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\\&(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\\&c_1^2-3c_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1^3+\psi_4^3 &= 2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-3(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3+\\&x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2)+12x_1x_2x_3=\\&3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-(x_1+x_2+x_3)^3+18x_1x_2x_3=\\&2c_1^3-9c_1c_2+27c_2\end{aligned}$$

故方程式(9)化为

$$t^6-(2c_1^3-9c_1c_2+27c_3)t^3+(c_1^2-3c_2)^3=0$$

此式可当做 t^3 之二次方程式解之,得两根 θ 及 θ',因得

$$\psi_1=\sqrt[3]{\theta}$$

$$\psi_4=\sqrt[3]{\theta'}$$

此处 $\sqrt[3]{\theta}$ 可选取 θ 之任一立方根,而 $\sqrt[3]{\theta'}$ 之选取则为 θ' 之一定立方根,要使

$$\sqrt[3]{\theta}\cdot\sqrt[3]{\theta'}=c_1^2-3c_2 \tag{10}$$

者用之.遂得次之诸已知式

$$x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=\sqrt[3]{\theta}$$

$$x_1+\omega^2x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{\theta'}$$

$$x_1+x_2+x_3=c_1$$

顺序以1,1,1乘此三式而加之;次以 $\omega^2, \omega, 1$,又次以 $\omega, \omega^2, 1$ 乘而加之,则得方程式(1)之根

---

① 关于对称函数基本定理之证明,见本书附录内.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}(c_1 + \sqrt[3]{\theta} + \sqrt[3]{\theta'}) \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(c_1 + \omega^2 \sqrt[3]{\theta} + \omega \sqrt[3]{\theta'}) \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(c_1 + \omega \sqrt[3]{\theta} + \omega^2 \sqrt[3]{\theta'}) \end{cases} \tag{11}$$

§4. 四次方程式(Quartic equation)　普通四次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{12}$$

可化为

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 - cx - d$$

之形. Ferrari 之解法,乃以$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)y + \frac{1}{4}y^2$加于上式之两端,得

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{3}y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - b + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}ay - c\right)x + \frac{1}{4}y^2 - d \tag{13}$$

再求 y 之值 y_1,使式(13)之右端成完全平方.设令

$$a^2 - 4b + 4y_1 = t^2 \tag{14}$$

则右端欲成完全平方,必须

$$\frac{1}{4}t^2x^2 + \left(\frac{1}{2}ay_1 - c\right)x + \frac{1}{4}y_1^2 - d = \left(\frac{1}{2}tx + \frac{\frac{1}{2}ay_1 - c}{t}\right)^2$$

所以

$$\frac{1}{4}y_1^2 - d = \left(\frac{\frac{1}{2}ay_1 - c}{t}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}ay_1 - c\right)^2}{a^2 - 4b + 4y_1} \tag{15}$$

故 y_1 必为三次方程式

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0 \tag{16}$$

之一根,此方程式称为四次方程式(12)之豫解式.

由式(15),方程式(13)可析为两二次方程式

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}t\right)x + \frac{1}{2}y_1 - \frac{\frac{1}{2}ay_1 - c}{t} = 0 \tag{17}$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}t\right)x + \frac{1}{2}y_1 + \frac{\frac{1}{2}ay_1 - c}{t} = 0 \tag{18}$$

设 x_1 及 x_2 为方程式(17)之根,x_3 及 x_4 为方程式(18)之根,则有

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}t,\ x_1x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{\frac{1}{2}ay_1 - c}{t}$$

$$x_3 + x_4 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}t, x_3x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{\frac{1}{2}ay_1 - c}{t}$$

若加减之，得

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = t, \quad x_1x_2 + x_3x_4 = y_1 \tag{19}$$

解(17)及(18)两式，得两根数(Radical)，其一等于 $x_1 - x_2$，它一等于 $x_3 - x_4$(参看 §1). 故普通四次方程式根内所含之无理数，为根之有理函数.

设不用 y_1，而以三次豫解式(16)之它根代之，则得与方程式(17)，(18)不同之其他二次方程式，其四根仍为 x_1, x_2, x_3, x_4，唯其各对配合，与前相异. 故方程式(16)之三根可推定其为

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4, y_2 = x_1x_3 + x_2x_4, y_3 = x_1x_4 + x_2x_3 \tag{20}$$

事实上，由次节之证明，知此种推测，确当无误.

§5. 从有理函数 $x_1x_2 + x_3x_4$ 及 $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = t$，亦可求得两二次方程式，其根即为普通四次方程式(12)之四根，而不必借助于Ferrari之方法. 盖式(20)内三量乃

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0$$

或

$$y^3 - (y_1 + y_2 + y_3)y^2 + (y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)y - y_1y_2y_3 = 0 \tag{21}$$

之三根，其系数可以 a, b, c, d 之有理函数表之①

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1x_2 + x_3x_4 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 = b$$

$$\begin{aligned} y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = & -4x_1x_2x_3x_4 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2x_3 + \\ & x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = ac - 4d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1y_2y_3 = & (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)^2 + \\ & x_1x_2x_3x_4\{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - \\ & 4(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_4)\} = \\ & c^2 + d(a^2 - 4b) \end{aligned}$$

故方程式(21)与豫解式(16)全同. 又

$$\begin{aligned} t^2 = & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \\ & a^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_4) + 4x_1x_2 + 4x_3x_4 = \\ & a^2 - 4b + 4y_1 \end{aligned}$$

而

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$$

故

① 此因(见于 §29之例2及 §30) x_1, x_2, x_3, x_4 之任一排列，只变换 y_1, y_2, y_3 之顺序，故 y_1, y_2, y_3 之对称函数，亦即为 x_1, x_2, x_3, x_4 之对称函数，即可以 a, b, c, d 之有理函数表之.