HIT

数学 · 统计学系列

Periodic Solutions of the *N*-Body Problem

*N*体问题的周期解

[美] 肯尼斯 · R · 梅耶 著　　杨亚非 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

N体问题的周期解

Periodic Solutions of the N-Body Problem

[美] 肯尼斯·R·梅耶 著

杨亚非 译

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

三体问题是指用牛顿力学研究三个物体(天体)以万有引力相互作用时的运动轨道.本文共分十二章:第一章为绪论,第二章为天体学方程,第三章哈密顿系统,第四章为中心构形,第五章为对称、积分和约化,第六章为周期解理论,第七章为卫星轨道,第八章为限制性问题,第九章为月球轨道,第十章为彗星轨道,第十一章为希尔月球方程,第十二章为椭圆问题.

图书在版编目(CIP)数据

N体问题的周期解/(美)梅耶著;杨亚非译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.3

ISBN 978-7-5603-3209-3

Ⅰ.①N… Ⅱ.①梅… ②杨… Ⅲ.①天体力学-多体问题 Ⅳ.①P132

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第036331号

Translation from the English language edition:

Periodic Solutions of the N-Body Problem

by Kenneth R. Meyer

版权登记号 黑版贸审字 08-2011-023号

策划编辑 刘培杰 甄淼淼

责任编辑 翟新烨 杨冰皓

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006

传 真 0451-86414749

网 址 http://hitpress.hit.edu.cn

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张8.75 字数162千字

版 次 2011年3月第1版 2011年3月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3209-3

定 价 28.00元

前言

这些文稿是源自于我在巴西累西腓伯南布哥联邦大学的讲稿。由于这是 N 体问题周期解大范围中的少数课程，为给出相当完整的介绍我尽力限定少的文献量，使这些文稿包含更多的细节。

从一般观点看，N 体问题是高度退化问题，它在欧几里得运动对称群下是不变量，并容许线动量，角动量和能量积分，这就意味着试图应用隐函数直接产生雅可比矩阵，对于平面问题退化阶数为 8，对于空间问题退化阶数为 12（乘子$+1$的重度在平面问题中为 8，在空间问题中为 12）。因此，必须面对积分和对称性，它给出约化空间的定义，众所周知在约化空间中积分和对称性将被消去。在约化空间上希望有一个无强制额外对称性的非奇异雅可比矩阵。

前六章研究哈密顿系统理论、辛变换及坐标、周期解及其乘子、辛标度、约化空间等。其余六章包含确定 N 体问题的约化空间上周期解的存在性的定理。

N 体问题是带有大对称群和许多一次积分的哈密顿系统的典型。本讲稿是这样哈密顿系统周期解理论的引论。

感谢 Hildeberto Cabral 在我访问巴西墨西腓伯南布哥联邦大学期间的热情好客。本书的终稿是我在（西班牙）加泰罗尼亚理工大学数学研究中心作毕尔巴鄂银行基金访问学者时完

成的。感谢(西班牙)巴塞罗那自治大学 Jaume Llibre 和他的同事的热忱帮助。

许多人在手稿成稿的不同阶段读过其若干部分,并寄给我意见和校正建议。感谢 Martha Alvarez、Hildeberto Cabral、Anne Feldman、Karl Meyer 和 Gareth Roberts 的帮助。特别感谢 N. V. Fitton 对我的修正稿的修正。

我确信文稿中会有些错误,但希望是小错误。请将所有无论大还是小的错误都通报给 Department of Mathematics, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio 45221-0025,USA 或 Ken meyer@ uc. edu。

我的研究由国家科学基金和 Charles Phelps Taft 基金提供支持。

辛辛那提大学,1999 年 8 月　肯尼斯・R・梅耶

目录

第一章 绪论

1.1 历史

N 体问题是一个用于描述在牛顿运动定律下运动着的 N 个点质量或质点运动的常微分方程组,这里的作用力只有相互的万有引力. 对于 $N=2$ 问题是可解的,因为它可以简化为开普勒问题,它是描述一个质点在固定于原点的第二个质点的万有引力作用下运动的常微分方程. 开普勒问题的解是圆锥曲线——圆、椭圆、抛物线和双曲线.

牛顿的运动定律与引力定律公式是划时代最伟大的科学成就之一. 利用这些简单定理,他可以完全解决推导描述火星运动的开普勒定律的二体问题. 对于首次近似,火星轨道是只考虑太阳和火星的万有引力的二体问题的解,这一问题可以简化为开普勒问题. 利用扰动分析,他能够估计某些更高阶影响量,因此可以解释火星轨道中的某些不规则情况.

接下来牛顿转到描述月球轨道的问题. 这一问题较难,因为首次近似是一个地球、月球和太阳的三体问题. 他所遇到的问题使他注意到,天文学家约翰·梅钦(John Machin)"……他从未遇到研究月球,如此使他头痛的问题."[1]

[1] [37]

目前月球轨道可通过数值积分或渐近级数展开的方式获得 —— 见[29].

普遍相信 $N > 3$ 的 N 体问题不能像二体问题相同意义上求解. 事实上存在明显的证据,广义 N 体问题不能求解. 但是在牛顿时代有几千篇 N 体问题的文章. 这些文章包括特解、渐近估计、碰撞的资料、积分的存在性和不存在性、级数解、非碰撞奇异性等.

特别是从庞加莱著作发表后,N 体问题周期解的存在性、稳定性和分支成为许多文章的主题. 庞加莱在他的著作《天体力学新方法》[66] 中特别论述了周期解问题. 他讲述了三体问题的周期解.

事实上,运动的初始条件完全符合周期解的可能性为零. 但是,可能的情况只存在微小差别,而这恰恰是传统方法无法应用的情况. 我们可以把周期解作为初始近似,就像使用 M. Gyldén 语言时的中间轨道.

更进一步,虽然我不能严格证明,但看起来非常可能成立的事实,即给定方程,其形式由式 13 定义和一任意特解,我们总可以找出一个周期解(其周期可以非常长),从而使两个解的差别在任意长的时间内任意小. 此外,这些周期解的重要性在于它们是我们可以尝试达到通常认为不可能地方的唯一突破口. [2]

这一猜想常被 Birkhoff 引用,用于证明他在固定点定理和相关主题的工作 —— 例如见[12,13]. 周期轨道是密集的这一庞加莱猜想只是由 Pugh 和 Robinson[68] 建立用于致密流形上的 C^1 类哈密顿系统及在某种意义上由 Gómez 和 Llibre[28] 建立用于限制性三体问题.

有许多关于 N 体问题周期解的存在性及特性特别是限制性三体问题的文献. 有许多用于研究三体问题和一般哈密顿系统周期解存在性的不同方法. 例如:平均法 —— 见 Moser[55],拉格朗日流形交会理论 —— 见 Weinstein[90],正则公式 —— 见 Schmidt[74],数据方法 —— 见 Ángel 和 Simó[2],强函数 —— 见 Liapunov[43] 和 Siegel[80],特殊固定点定理 —— 见 Birkhoff[13],符号动力学 —— 见 Saari 和 Xia[71],变分法 —— 见 Robinovich[69] 及其他方法. 这是一个大主题的一个小例子. 本书涉及我所发表文献的一小部分.

不使用离散对称性,我将确定完整 N 体问题周期解的存在性并讨论其线性稳定性. 早期的有关周期解的存在性的大部分文献均用到离散对称性,因此只在中心对称构型中应用,通常不提供任何稳定性信息. 同样,大部分文献只是确定三体问题或限制性三体问题中周期解的存在性. 通过使用辛标度和辛退化定理,我会将庞加莱延拓法推广到新的应用中.

庞加莱延拓法是一种简单的扰动方法. 它需要一个参量 ε,它可以是一个

---

2 [66,p81]

物理量,如一个质量,或是一个标度参量,量度两个物体间距离.如果解在一个时间周期 T 之后回到起始位置,那么解是周期的.此周期在一组可解的有限组方程中得出.庞加莱延拓法使用有限维隐函数定理解这些方程.当 $\varepsilon=0$,求得一个解,计算必需的非奇异雅可比矩阵.应用隐函数定理,得出结论:当 $\varepsilon\neq 0$ 但为小量时解一直是存在的.这一方法将在第六章中介绍,在第七 ~ 十二章中应用.

辛标度是在保证问题的哈密顿特性的前提下将小参量 ε 引入到问题中的方法.此技术是引入小参量使得当 $\varepsilon=0$ 时问题有周期解,且必备的雅可比矩阵非奇异.它产生一个有趣的定理.看来只是在标度保持辛结构时才产生有趣的结果.辛标度将在第三章中介绍,在第七 ~ 十二章中应用.

N 体问题的初始公式,对于平面问题是 $R^{4n}\backslash\Delta$ 中方程组,对于空间问题是 $R^{6n}\backslash\Delta$ 中的方程组,这里 Δ 是碰撞集.但是通常研究这一问题的正确步骤是在约化空间:对于平面问题为一个 $(4N-6)$ 维辛流形,对于空间问题为一个 $(6N-10)$ 维辛流形.只有在约化空间上才有希望研究周期解的存在性和稳定性.

从牛顿时代起就已知,N 体问题在欧几里得运动(旋转后的平移)下是不变量,且容许线动量和角动量的积分.它们既是祸又是福.祸是因为它们使庞加莱延拓法的雅可比矩阵成为高阶奇异,福是因为它们可用于使问题的维数降低.正确使用对称性和积分,问题就可简化为仍为哈密顿函数的更低维问题.这种方法称为 Meyer - Marsden - Weinstein 约化;它是我的文章[50]、Marsden 和 Weinstein 的文章[44]的主要结果.在本章所讨论的问题中,在辛标度和约化后所需要的雅可比矩阵是非奇异的.这又是一种技巧,因为当考虑所有的对称性和积分时,许多表面上相似的问题仍可以约化.辛约化将在第五章中详细讨论,在第七 ~ 十二章中应用.

许多章都以问题清单结尾.有些是常规的,有些不是.我建议至少看一下问题,因为通常包括总结和相关结果.有时,问题以参考文献结尾,在此情况下读者应该认识到在某一时间点上这一问题的解被认为是一个可发表的结果.

1.2　全局注释和局部注释

天体力学中有句老话:没有变量集非常好.本书主题富含不同变量集,其中许多都有各个时期最伟大数学家的名字.这里没有足够的字母表来给每个变量赋以单独的符号,因此我将使用编程语言的概念 —— 全局的和局部的.某些符号自始至终代表相同的量,是全局变量;某些符号在不同的节中代表不同量,是局部变量.在每种情况中,都将在上下文中指出变量代表什么.

在整个注释中会用到固定参考坐标系和旋转参考坐标系，旋转坐标系要多于固定坐标系. 因此，涉及固定坐标系的量通常是黑体字，但是在旋转坐标系中的相同量将是正常体. 在整个注释中使用哈密顿体系，用不同变量书写不同哈密顿函数. 我将一直使用通用符 H,$\mathbf{H}$ 用于哈密顿函数，像是说“用 …… 变量表示的 …… 问题的哈密顿时是 ……”.

全局变量的清单：

- $\mathbf{q},\mathbf{p}$ 是固定直角坐标系中的位置矢量和动量矢量；
- q,p 是旋转直角坐标系中的位置矢量和动是矢量；
- $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是固定雅可比坐标系中的位置矢量和动量矢量；
- x,y 是旋转雅可比坐标系中的位置矢量和动量矢量；
- $\mathbf{H}$ 是固定坐标系中的当前哈密顿函数；
- H 是旋转坐标系中的当前哈密顿函数；
- $\mathbf{O}$ 是固定坐标系中的当前角动量矢量；
- O 是旋转坐标系中的当前角动量矢量；
- $\mathbf{U}$ 是固定坐标系中的当前（自）势；
- U 是旋转坐标系中的当前（自）势；
- ε 是当前扰动参数；
- m_i是第 i 个粒子的质量.

以上许多全局变量都将以下标表示.

变量 $u,v,\xi,\zeta,\alpha,\beta$ 等都是全局变量，它们的含义将在下文给出.

$\mathbf{R}$ 表示实数域，$\mathbf{C}$ 表示复数域，$\mathbf{F}$ 表示 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. $\mathbf{F}^n$ 表示所有 n 维列向量空间，并且除非另有说明，所有向量都是列向量. 但是由于排版原因在本书中所有向量均写为行向量. $\mathscr{L}(\mathbf{F}^n,\mathbf{F}^m)$ 表示从 $\mathbf{F}^n$ 到 $\mathbf{F}^m$ 的所有行变换的集合，有时也等同于所有 $m\times n$ 矩阵的集合.

如果 A 是一个矩阵，那么 A^{T} 表示它的转置矩阵，A^{-1} 表示它的逆矩阵，$A^{-\mathrm{T}}$ 表示它的逆转置矩阵，前提是这些矩阵均存在. 如果矩阵 A 的形式为

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & O_{12} & O_{13} & \cdots & O_{1k} \\ O_{21} & A_{22} & O_{23} & \cdots & O_{2k} \\ O_{31} & O_{32} & A_{33} & \cdots & O_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O_{k1} & O_{k2} & O_{k3} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

那么矩阵A为分块对角矩阵，这里A_{ii}是方阵，O_{ij}是矩形零矩阵. 记$A=\mathrm{diag}(A_{11},A_{22},\cdots,A_{kk})$

除非另有说明，函数均为实平滑函数，这里平滑意味着 C^∞ 或实解析. 如果 $f(u)$ 是一个从 $\mathbf{R}^n$ 中开集 $\mathscr{O}$到 $\mathbf{R}^m$ 的一个平滑函数，那么 $\partial f/\partial u$ 代表 $m\times n$ 雅可

比矩阵.

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_n}\end{bmatrix}$$

如果$f:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^1$,那么 $\partial f/\partial u$ 为一个行向量;令 ∇f 或 $\nabla_u f$ 或 f_u 表示列各量$(\partial f/\partial u)^{\mathrm{T}}$.(即使讨论流形上的函数时,假设非黎曼度量,那么 ∇f 不是关于某些黎曼矩阵的梯度矢量.)当f的导数被认为是从$\mathscr{O}$到$\mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$的一个映射,从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性算子空间,其导数将由 Df 表示. 变量 t 表示时间这一实标量变量,并且使用圆点代表变量对时间的第一、二阶导数,即 $\cdot=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 和 $\cdot\cdot=\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$.

1.3 各章小结

第二 ~ 六章给出了哈密顿体系、N 体问题、辛流形、周期解等的背景资料. 有专业基础的读者可以很快浏览这些章节. 这些章用到了常微分方程的基本理论知识,即存在性、单值性、线性理论等. 有时通过参考文献给出了证明.

第七 ~ 十二章中的每章都包含构建 N 体问题的一类周期解存在性定理. 后面的章依据先前的章,但它们彼此独立;每章都有自己的特色,在形式上是相似的. 因此读者可以选择某一章去阅读. 第七章和第八章是最简单的,因此推荐先阅读.

以下是各章小结.

第二章　这章介绍作为哈密顿方程组的 N 体问题. 推导能量、线动量和角动量的经典积分. 给出某些特殊情况,即开普勒问题(中心力问题),限制性三体问题,希尔月球方程和椭圆限制性三体问题. 以哈密顿系统为例给出所有系统.

第三章　介绍几个例子,给出哈密顿系统的某些基本理论 —— 至少与天体力学和周期解有关的. 保持问题哈密顿性质的变量变换被称作辛变换. 给出变量辛变换的定义及以后用到的辛变量的主要例子.

第四章　中心构型是产生 N 体问题特殊解的 N 个质点的一种构型. 由中心构型产生的一种特解中,所有质点匀速绕质心旋转并保持相对位置不变. 这样的解被称作相对平衡态. 例如,匀速旋转并保持在等边三角形的三个顶点上的三个质点的三体问题存在周期解. 本章介绍中心构型并给出中心构型的特殊

坐标系.

第五章　由于质点被假设为点质量,牛顿的万有引力定律也假设空间是均匀且各向同性,所以 N 体问题具有许多对称性. 通常正确使用对称性可以使问题的分析得以简化. 本章介绍 N 体问题的主要对称性,即其在欧几里得运动下的不变性. 所讨论的基本结果是辛约化定理,它是说当所有经典积分保持不变,所有剩余的对称性被移除时,所得到的系统仍为哈密顿系统. 在约化空间上,扰动分析产生周期解.

第六章　本章研究用于具有若干退化度系统的庞加莱延拓法. 主要例子是 N 体问题.

第七章　利用上几章研究的方法证明庞加莱第一类周期轨道的存在性. 确定了两个被假设为小质量被称作卫星的两个质点在绕一个大质量质点被称作主质点的天体的近似圆轨道上运动的问题的周期解. 介绍了约化空间周期解的最简单例子.

第八章　证明在适当非谐振假设下,限制性问题的非退化周期解可以延拓到完整的$(N+1)$体问题. 由带有小参量的并正确标度后的$(N+1)$体问题的哈密顿函数可以很容易得出这一结果. 介绍了辛标度的最简单的例子,它说明限制性问题实际上是带有小参量的完整问题的首次近似.

第九章　本章证明$(N+1)$体问题在约化空间上存在周期解. 在此问题中 $N-1$ 个质点和其他两个质点的质心大致在相对平衡解上运动,其他两个质点大致在绕其质心的二体问题的小的圆轨道上运动.

第十章　本章的主要结果是平面$(N+1)$体问题在约化空间上的周期解族的存在性,在此问题中一个被称作彗星的质点距离其他 N 个被称作主天体的质点相当远. 彗星大致在绕主天体系的质心的开普勒圆形轨道上运动,主天体大致在相对平衡解上运动. 所有问题的大多数简化将在本章讨论.

第十一章　利用哈密顿函数的辛标度法给出月球理论主要问题的精确推导. 在一组假设下,推导了 Delaunay 所使用的主要问题. 在另一组假设下,推导了如 Hill 给出的主要问题. 这些推导关于三体问题极限特性的精确渐近描述,因此可用于给出首次近似解和完整解的偏差的精确估计. 使用这一标度证明周期不是 2π 倍数的希尔月球方程的任意非退化周期解都可以延拓到约化空间上的完整三体问题.

第十二章　本章涉及经典天体力学的平面 N 体问题及其与椭圆型限制性问题的关系. 与以前的系统不同,此系统是周期的. 我们给出椭圆型限制性问题的不同推导,它给出开普勒问题每种类型解的限制性问题. 又证明了,周期不是 2π 倍数的椭圆型限制性问题的任意非退化周期解可以延拓到约化空间上的完整三体问题.

1.4 进一步阅读

本书设想基本微分方程的某些知识,例如可以在 Sánchez[72] 或 Arrowsmith 和 Place[9] 的介绍性文本中找到. 它们是些可读性强的对微分方程几何理论的简短介绍,可给出足够的背景知识. 进一步的文献是[31,32]. 再进一步的参考文献将在需要时给出.

Pollard[67] 给出二体问题解的清晰完整的描述、哈密顿方程的介绍和限制性问题的主要处理方法. 这本薄书是研究哈密顿系统和天体力学的理想起点. 更基本的,更经典的介绍可在 Danby[22] 或 Moulton[88] 中找到.

在更高水平的困难时有:Mayer 和 Hall[51],与本书相同水平;Abrabam 和 Marsden[1],辛几何的更一丝不苟的研究,在其后两章节中删去了大部分细节,Arnold[7],是一本介绍许多主题的直观的书,只是有时缺少证明;Siegel 和 Moser[81],是一本带有完整证明的清晰的书. 其他一些书,要读一下 Siegel 和 Moser 的.

关于 N 体问题周期解的经典是 Moulton[58].

第二章 天体力学方程

本章介绍 N 体问题的哈密顿公式及能量的经典积分、线动量与角动量. 给出几种特殊事例:开普勒问题(也称有心力问题)、限制性三体问题、希尔月球问题和椭圆型限制性三体问题.

2.1 N 体问题的方程

考虑在牛顿参考系 $\mathbf{R}^3$ 中运动的 N 个点质量,其上作用的只是它们之间相互的万有引力. 假设第 i 个质点有位置矢量 $\mathbf{q}_i$,并且质量 $m_i > 0$,那么利用牛顿第二定律和引力定律,第 i 个质点的运动方程为

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{G m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\| \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j \|^3} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{q}_i} \qquad (2.1)$$

式中

$$\mathbf{U} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \frac{G m_i m_j}{\| \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j \|} \qquad (2.2)$$

上式中,G是万有引力常数,此后我们取为1. $\mathbf{U}$是自势或势的负数. 自变量为时间t,圆点表示对t求导,因此$\cdot = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$或$\cdot\cdot = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$. 这里及本书中,不被零除,因此,$i=j$项可从总和中略去. 常微分方程组(2.1)代表$N$体问题($N$体问题的牛顿公式).

尽管认为爱因斯坦相对论方程可用于校正描述引力问题的方程,但这一经典N体问题给出了我们的太阳系和其他许多天文系的十分精确的描述. 月球登陆和火星探测器都遵循这些方程的轨迹.

假设$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_N) \in \mathbf{R}^{3N}$. 方程(2.1)的矢量形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \nabla \mathbf{U}(q) = 0$$

式中$\mathbf{M} = \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, \cdots, m_N, m_N, m_N)$;$N$体问题的哈密顿公式是通过引入(线)动量矢量得到的. 定义$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_N) \in \mathbf{R}^{3N}$. 由$\mathbf{p} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$,那么$\mathbf{p}_i = \mathbf{m}_i\dot{\mathbf{q}}_i$是第$i$个质点的动量. 运动方程变为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}_\mathbf{p} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{H}_\mathbf{q} = \mathbf{U}_\mathbf{q} \tag{2.3}$$

或,写成分量形式

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{p}_i / m_i$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\| \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j \|^3} \tag{2.4}$$

式中哈密顿函数为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} - \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\| \mathbf{p}_i \|^2}{2m_i} - \mathbf{U} \tag{2.5}$$

$\mathbf{H}$是质点系的总能量. 它是方程组的积分(也就是,运动常数——见5.2节),这是由于

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}\left(-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}\right) = 0$$

矢量$\mathbf{q}$和$\mathbf{p}$被称作共轭变量.

N体问题以牛顿公式表示是$3N$个二阶方程的方程组,以哈密顿公式表示是$6N$个一阶方程的方程组. 系统的完整的一组积分包含$6N-1$个与时间无关的积分和一个与时间有关的积分. 对所有N来说只知道10个积分. 假设

$$\mathbf{C} = m_1\mathbf{q}_1 + \cdots + m_N\mathbf{q}_N$$

是系统的质心,并且

$$\mathbf{L} = \mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{p}_N$$

是系统的(总的)线动量. 由(2.3)可得

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{L}, \dot{\mathbf{L}} = 0, \ddot{\mathbf{C}} = 0 \tag{2.6}$$

因此,$\mathbf{C} = \mathbf{L}_0 t + \mathbf{C}_0$,$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0$. $\mathbf{L}_0$和$\mathbf{C}_0$是初始条件和运动常数的矢量函数. 因此,它们组成6个运动积分.