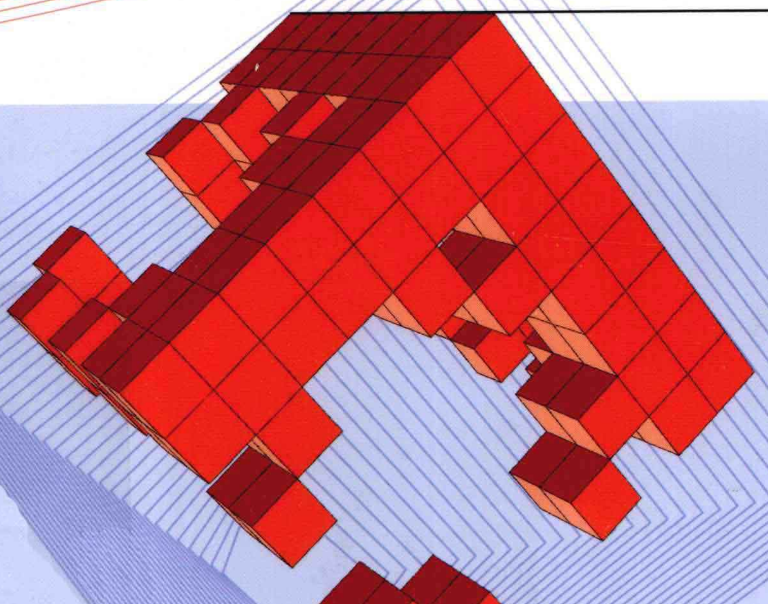
高等学校教材

高等数学

（下册）



◆ 主编

高　洁

杨景春

◆ 副主编

李婷婷

肖亿军

宋　靓

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（下册）

主　编　高　洁　杨景春
副主编　李婷婷　肖亿军　宋　靓

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书系根据编者多年的教学实践经验，参照最新制定的“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”以及教育部最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关高等数学部分的内容编写而成，分为上、下两册。

下册的内容包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数，书后附习题答案及提示。

本书可作为包括独立学院在内的普通高等学校本科非数学类专业一年级学生的教材，也可作为高年级学生考研辅导参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/高洁，杨景春主编. —北京：高等教育出版社，2011. 1

ISBN 978-7-04-031365-9

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①高…②杨…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 257958 号

策划编辑 张彦云　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 李卫青　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 马敬茹　**责任校对** 胡晓琪　**责任印制** 张福涛

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010—58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400—810—0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2011 年 1 月第 1 版
印　　张	11.5	印　　次	2011 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	210 000	定　　价	16.30 元

物料号　31365—00

前　　言

随着综合国力的提高，我国高等教育逐渐从"精英教育"走向"大众化教育"阶段，独立学院是此新形势下高等教育办学机制与模式的一个探索与创新，以培养高级应用型、技术型人才为目标。目前，我国有三百多所独立学院，一方面有更多的青年人可以获得高等教育的机会，另一方面独立学院的教学也出现了一些值得关注的新情况和新问题。

大学数学基础课程包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计，这些课程是现代科技与信息化建设的基础，其重要性是不言而喻的，然而在独立学院中，部分学生缺乏学习数学的兴趣或数学基础薄弱，不愿意学习大学数学。为了真正解决这一问题，我们认为，必须从现实出发，编写适用于独立学院使用的大学数学教材，更好地体现独立学院的培养目标与特色。

根据教育部数学基础课程教学指导分委员会的要求，并结合独立学院学生的现状和专业要求，我们编写了这套由高等教育出版社出版的教材，包括《高等数学》(上下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》，并将为以上教材配备相应的习题册与试题库以及教学课件。

考虑到各专业对数学课程的内容、难度等方面的差异，对本套教材使用两种字体排印，其中宋体排印部分自成体系，体现了数学课程的基本要求，可供学时数较少的专业讲授；楷体字部分的内容可供学时数较多或对大学数学要求较高的专业作为补充内容讲授。另外课后所编习题分为 A、B 两个层次，A 组题的难度适中，为教学的基本要求；B 组题的难度稍大，为考研层次的较高要求。

本书参照最新制订的"工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"以及教育部最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关高等数学部分的内容编写而成，分为上、下两册，以微积分学为核心内容。上册介绍了微积分研究的对象——函数及微积分研究的重要基础——极限论。在此基础上建立了一元函数微积分学的连续、导数、微分、不定积分、定积分的概念、理论和应用以及求解微分方程的方法。下册介绍了空间解析几何和向量代数、多元函数微积分学的基本概念和理论，以及无穷级数部分的内容。本书的内容既充分考虑到大学一年级学生学习高等数学的需求，又考虑到知识的综合应用，因此也可以作为高年级学生考研辅导参考书使用。

本书具有以下特点：

（1）文字通俗易懂，便于学生课后阅读；

（2）内容详略得当，适应于少学时教学；

（3）体系完整严谨，分层次编排内容；

（4）例题取材多样化，激发学生兴趣。

要学好高等数学这门课程，第一要完成从中学到大学学习方法的转变，培养独立思考的学习习惯；第二要提高分析问题、解决问题的能力，从学习中体会到逻辑严谨、环环相扣的数学之美；第三要付出坚持不懈的努力，才能达到“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”的学习境界！

本套教材的立项、编写、试用与修改历时近三年，期间得到了吉林大学珠海学院各级领导的大力支持，在此特别表示感谢。另外，在本套教材编写期间，数学教研室的各位老师提出了大量宝贵意见，在此衷心地表示感谢。

限于编者水平，书中定有不少缺点、错误，敬请读者指正。

编　者

2010年3月

目　录

第七章　空间解析几何

§1　向量及其线性运算

1.1　空间直角坐标系

类似于平面直角坐标系，我们来建立空间直角坐标系．过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且具有相同的长度单位．这三条数轴分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，统称为**坐标轴**．它们的正向符合**右手螺旋规则**，即以右手握住 z 轴，当右手的四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7.1 所示，这样的三条坐标轴就构成了**空间直角坐标系**．三条坐标轴中任意两条可以确定一个平面，称为**坐标面**，分别称为 xOy 面，yOz 面及 zOx 面．它们把空间分割成八个部分，称为八个**卦限**：含有 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴的部分称为第 Ⅰ 卦限，位于 xOy 平面上方还有三个部分，按逆时针方向，依次分别称为第 Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限．位于第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限下方的四个部分依次分别称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限．注意，位于坐标轴或坐标平面上的点不属于任何卦限．

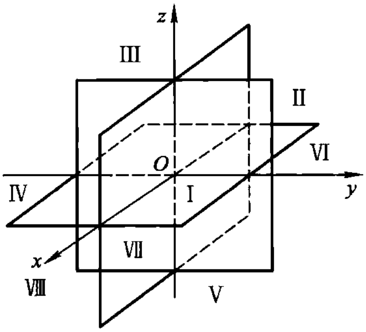


图 7.1

设 M 为空间的一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并交于点 P、Q、R，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z，则点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)；反过来，给定一个有序数组 (x, y,z)，在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过点 P、Q、R 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴．这三个平面的交点 M 是由有序数组 (x,y,z) 唯一确定的．于是，空间的点 M 与有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，称有序数组 (x,y,z) 为**点 M 的坐标**，并把点 M 记作

$M(x,y,z)$.

坐标面和坐标轴上的点具有一定特征. 例如 xOy 面上的点的坐标为$(x,y,0)$, z 轴上的点的坐标为$(0,0,z)$, 原点 O 的坐标为$(0,0,0)$.

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$之间的**距离** d, 根据勾股定理可得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

1.2 向量及其线性运算

1. 向量的概念

我们把既有大小又有方向的量, 称为**向量**, 如位移、速度、加速度等.

2. 利用有向线段定义向量

我们可以用空间中的有向线段来表示向量, 这里利用有向线段的长度来表示向量的大小, 利用有向线段的方向来表示向量的方向. 以 P_1 为起点, P_2 为终点的向量记作$\overrightarrow{P_1P_2}$, 有时也用粗体字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$ 等来表示向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作 $|\boldsymbol{a}|$, 称作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**模**. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$, 零向量的始点和终点重合, 它的方向可以看作是任意的. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同, 则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **是相等的**, 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 因此向量经过平移后仍与原向量相等, 在数学中讨论的向量往往与起点无关, 这种向量称为**自由向量**。如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或者相反, 则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **是平行的**, 记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的, 因此可认为零向量与任何向量都是平行的.

在空间中, 任意一个向量$\overrightarrow{P_1P_2}$, 都可以通过平移将其起点 P_1 移到原点 O, 相应的终点变为 M, 从而变为起点在坐标原点的向量$\overrightarrow{OM}$(称为点 M 对于原点 O 的**向径**). 因此任意一个向量$\overrightarrow{P_1P_2}$与唯一的向径$\overrightarrow{OM}$相对应.

3. 向量的线性运算

定义 1.1 给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 将 $\boldsymbol{b}$ 的起点置于 $\boldsymbol{a}$ 的终点, 则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点所引的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 规定 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$, 称此方法为**三角形法则**(如图 7.2).

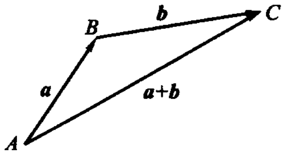


图 7.2

三角形法则与力学中的**平行四边形法则**是一致的. 后者是说, 以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为相邻两边作平行四边形(如图 7.3), 它的对角线即是向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 有公共的起点).

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

定义 1.2 设向量 $\boldsymbol{a}$，λ 为实数. 称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，简称数乘向量，其中它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$；

(2) 分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

借助加法和数乘运算来引进向量的减法. 对于向量 $\boldsymbol{a}$，向量 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，但方向相反，称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量. 显然 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 对于向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{P_1P_2}$ 和 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{P_1P_3}$，规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 如图 7.4 所示，从 $\boldsymbol{b}$ 的终点向 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量 $\overrightarrow{P_3P_2}$ 就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

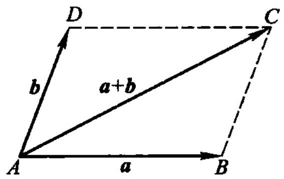


图 7.3

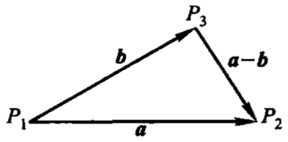


图 7.4

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系，即有以下定理：

定理 1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. □

设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，那么按照向量与数的乘积的定义，一个非零向量可以用它的模与它同向的单位向量的乘积来表示，即

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

从而

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这表示一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘它的模的倒数，结果为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

向量的加法和向量与数的乘法统称为向量的**线性运算**.

4. 向量及向量线性运算的坐标表示

首先我们利用图 7.5 讨论向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴之间的关系.

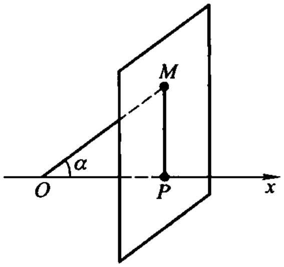


图 7.5

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴正方向夹角为 α，将点 M 向 x 轴上投影得点 P，即过点 M 作垂直于 x 轴的平面与 x 轴的交点为 P，则 x 轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值即为点 P 的坐标 a_x，称作向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴上的投影，于是有

$$a_x=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,$$

可以看出：当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$a_x>0$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$a_x=0$；当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时，$a_x<0$. 类似地设向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 y 轴、z 轴正方向的夹角为 β，γ，从而向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 y 轴、z 轴上的投影为

$$a_y=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta,\ a_z=|\overrightarrow{OM}|\cos\gamma.$$

设 $\boldsymbol{i}$ 为 x 轴正方向的单位向量，则有 $\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i}$. 一般用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴，z 轴正方向的单位向量，称它们为坐标系的坐标向量.

给定向量 $\boldsymbol{a}$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$（如图 7.6），通过点 $M(a_x,a_y,a_z)$ 作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的三个平面，则点 M 在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影分别为 P、Q、R，则有

$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=a_y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=a_z\boldsymbol{k},$$

再由平行四边形法则，便得

$$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})+\overrightarrow{OR}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

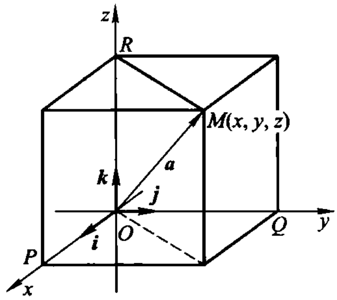


图 7.6

上式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ **按坐标向量的分解式**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的向径 OM 在三条坐标轴上的投影 $OP=a_x$，$OQ=a_y$，$OR=a_z$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并记作 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，上式叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式. 从而向量

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}.$$

注意任一向量对应一个向径，且此向量的坐标与其向径终点的坐标一致.

现在来考察如何借助向量坐标进行向量之间的线性运算. 利用向量的坐标，可得向量的加法、减法及向量与数的乘法的运算如下：

设两个向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

利用向量加法及向量与数的乘法的运算规律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\ &=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\ &=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}.\end{aligned}$$

类似地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$，$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

而对于一般情况下，起点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 而终点为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$（如图 7.7），根据向量减法，类似地有

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\{x_2-x_1,y_2-y_2,z_3-z_3\}.$$

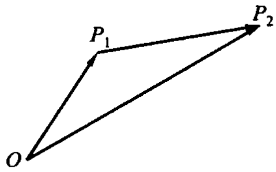


图 7.7

5. 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示，也可以用它的坐标来表示. 为了应用上的方便，有必要找出这两种表示法之间的联系，就是说要找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系.

首先定义两个向量之间夹角，设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$、$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$（设 $\varphi=\angle AOB,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角（如图 7.8），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值. 类似地可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，我们可以用它与三条坐标轴正方向的夹角 α、β、γ（$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$）来表示它的方向（如图 7.9），称夹角 α、β、γ 为非零**向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角**.

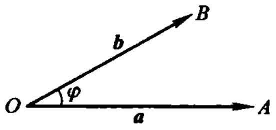


图 7.8

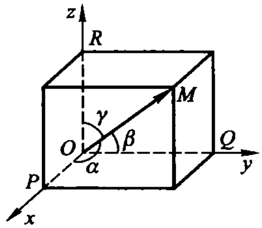


图 7.9

由向量在坐标轴上投影的定义可得

$$\begin{cases}a_x=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\\ a_y=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\\ a_z=|\overrightarrow{OM}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.\end{cases}$$

上式中出现的 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 通常也用向量的方

向余弦来表示向量的方向.

通过图 7.9 可以看出，因为 $OP=a_x$，$OQ=a_y$，$OR=a_z$，故向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1}$$

根据前面讨论可知，当 $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$ 时，可得

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\[2ex] \cos\beta=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\[2ex] \cos\gamma=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{cases} \tag{2}$$

(1)和(2)是用向量的坐标表示向量的模和方向余弦的公式.

把公式(2)的三个等式两边分别平方后相加，便得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

这就是说，任一非零向量的方向余弦的平方和等于 1.

由此可见，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

此时，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

由定理 1.1 可知，设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ 是非零向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行当且仅当

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

注：当分母 b_1，b_2，b_3 中某一项为零时，可以理解为对应项的分子也为零. 比如说当 $b_1=0$，$b_2\neq 0$，$b_3\neq 0$ 时，可以将上面的等式理解为 $\begin{cases}a_1=0,\\ \dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}.\end{cases}$

例 1.1 已知点 $A(1,1,2)$，$B(1,0,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=\{1-1,0-1,3-2\}=\{0,-1,1\}$，于是

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},$$

所以与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,-1,1\}=\left\{0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

例 1.2 设已知点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\}=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$，

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=2.$$

可求得方向余弦为 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi，\beta=\frac{\pi}{3}，\gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

习题 7.1

1. 在坐标面 yOz，zOx 上的点和 x 轴，y 轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$$A(3,4,0)；B(0,4,3)；C(3,0,0)；D(0,-1,0).$$

2. 如图 7.10，设 $ABCD-EFGH$ 是一个平行六面体，在下列各对向量中，哪些相等，哪些互为负向量：

(1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$；(2) $\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{CG}$；(3) $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{EG}$；

(4) $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{GF}$；(5) $\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CH}$.

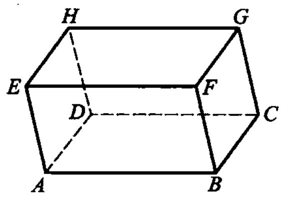


图 7.10

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试利用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 求 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$，试用坐标表示式表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及 $-2\overrightarrow{M_2M_1}$.

5. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模，方向余弦和方向角.

6. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴、y 轴及 z 轴上的投影.

7. 分别求出向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的模，并分别用单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$，$\boldsymbol{c}^0$ 表达向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$.

8. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\{6,7,-6\}$ 的单位向量.

9. 若 $\boldsymbol{a}=\{1,2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,4,k\}$，试求 k 值，使其满足

(1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

(2) $3|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

10. 已知点 $P(-2,1,3)$，求向径$\overrightarrow{OP}$的方向余弦. 若一向径的两个方向角均是 60°，求第三个方向角的大小.

§2 数量积和向量积

2.1 数量积

在物理学中，如果某物体在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线移动，位移向量为 $\boldsymbol{S}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 为 $W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cos\theta$，其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的夹角 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$（如图 7.11）.

定义 2.1 对于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（如图 7.12）为

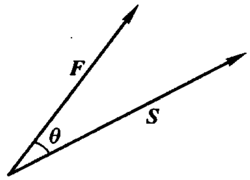


图 7.11

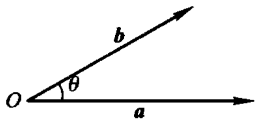


图 7.12

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

根据向量的数量积的定义，容易验证如下运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ （λ 为实数）;

另外，根据向量的数量积定义，可以验证以下性质成立.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，这里如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

对于坐标向量，易证明下面结论成立：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$
$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

从而可以得到以下性质，

(3) $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

例 2.1 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$，$\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这里，$\overrightarrow{MA}=\{1,1,0\}$，$\overrightarrow{MB}=\{1,0,1\}$，从而

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

由定义 2.1，得

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\,|\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

由此得 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

2.2 向量积

在力学中，在研究物体的转动时，引进了力矩的概念. 可以用数学的语言表述成如下的定义.

定义 2.2 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一个向量 $\boldsymbol{c}$：

(1) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角($0\leqslant\theta\leqslant\pi$)；

(2) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 服从右手螺旋规则(如图 7.13).

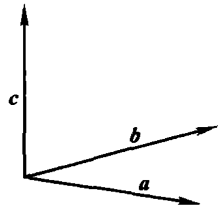


图 7.13

向量积具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

这是因为夹角 $\theta=0$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin\theta=0$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，故必有 $\sin\theta=0$，于是 $\theta=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $\theta=0$ 或 π，于是 $\sin\theta=0$，从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由于可以认为零向量与任何向量都平行，因此上述结论可叙述为：向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量积符合下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

这是因为按右手螺旋规则从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$ 定出的方向恰好与按右手螺旋规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 定出的方向相反. 它表明交换律对向量积不成立.

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(3) 向量积还符合结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

对于坐标向量，易验证下列结论：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

一般地，设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\\&\quad+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})\\&\quad+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

最后一个等号只是一个简便记法，其中的三阶“行列式”也不是通常意义下的行列式，仅是方便记忆的一种符号.

例 2.2 设 $\boldsymbol{a}=\{2,1,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-1,2\}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$
$$=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

例 2.3 计算以向量 $\boldsymbol{a}=\{8,4,1\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{2,-2,1\}$ 为边的平行四边形面积.

解 以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形面积

$$S=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

恰好是向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模. 即 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. 现在来计算

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\8&4&1\\2&-2&1\end{vmatrix}$$
$$=6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$$

于是所求平行四边形的面积为

$$S=|6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}|=\sqrt{6^2+6^2+24^2}=18\sqrt{2}.$$

例 2.4 求垂直于由点 $A(0,-2,1)$，$B(1,-1,-2)$ 和 $C(-1,1,0)$ 所确定平面的单位向量.

解 向量 $\overrightarrow{AB}=\{1,1,-3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-1,3,-1\}$. 由于向量 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 垂直于平面 ABC，只需求出与向量 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 同向或反向的单位向量即为所求单位向量 $\boldsymbol{e}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-3\\-1&3&-1\end{vmatrix}$$