常態分配與
教育統計

陳國雄編著

登記圖書出版社印行

常態分配與
教育統計

陳國雄編著

登記圖書出版社印行

內政部著作權執照

著作物名稱	常態分配與教育統計
冊數	全壹冊
著作人姓名	陳國雄
出生年月日	民國廿五年三月廿一日
籍貫	台灣省台南市
著作權所有人	陳國雄 民國廿五年三月廿一日 台灣省台南市
發行人	陳國珍 民國卅八年十二月卅日 台灣省台南市
執照字號	台內著字第柒捌伍壹號
有效年限	

中華民國六十五年十一月 日

中華民國六十九年十二月出版

常態分配與教育統計

著作者：陳　國　雄
出版者：登記圖書出版社
地　址：小東路307巷54弄27號
登記證字號：局版台業字第0383號
發行人：陳　國　珍
印刷者：登文印刷局
地　址：台南市協進街卅一號
電　話：(062)377883

C 定價：新台幣九十元整

郵購：郵撥第32181號陳國雄帳戶

前 言

民國六十三年十二月二十二日，中國時報之社論「學生考試不及格原因的探討」*一文中，會云：T如果教科書的程度與學生的智力發展不相稱，則學生成績降低，自屬必然之事。」又說：「除了教科書以外，另一個癥結所在，是教學法和考試的方式。」惟不論其原因為何，一般人所據以衡量學習結果的標準，乃在於學生的考試成績。根據報導，全省七十一所省立高中曾建議，「大學聯考數學科命題不宜過深，並應注意大多數高中學生程度的常態分配。」在「學生程度的常態分配」一語中，實已隱含考試成績的常態分配。

* 全文影印在目次之後。

雖然全省七十一所省立高中建議「……應注意大多數高中學生程度的常態分配」，然而，迄今仍有「各級學校（註：當然包括高中）數學成績和大專聯考數學成績不及格的數字佔居首位」（見中等學校教師教育科目訓練班印行之分科教材教法研究第132頁）的事實。更可怕的是台南市議會王議長所舉的例子，他說：「某校一班五十五人中，月考成績，英語最高十一分，數學八分」。又說：「類此情形，可謂十分普遍。」（見63．12．22中國時報社論），果眞如此，則全省高中、國中考查學生成績應先「注意大多數學生程度的常態分配」，以免失去教育的評量價值。

目前國小學生成績考查實施要點中，已詳細規定常態分配等第人數之分配比例，足見教育當局是相當重視常態分配；當然，每一位教師也應該重視它。至於常態分配的應用範圍，並非僅限於成績考查一項。實際上，各種教育事實的分配，大多數都近於常態。因此，各種教育工作皆有可能應用到常態分配的理論。更何況「常態分配幾乎是任何分配在適當處理後的極限情形」（見中央研究院數學研究所印行之機率與統計第17頁），時至今日，常態分配的應用已大為普遍，舉凡教育、政治、企業……等各界皆需應用其理論，則常態分配的價值，豈容忽視？

筆者執教至今，十有餘年，一向重視常態分配。除藉常態分配的理論考查學生之學習結果外，更用以檢討教學的成效。乃就「常態分配的理論」與「常態分配在教育統計上的應用」加以研究，編寫成書，期能拋磚引玉，使各界重視常態分配的理論，並廣泛地應用。

本書之編撰，起自常態分配的意義，止於常態分配在教育統計上的應用舉例。其中，演算、繪圖、製表等工作，皆力求詳細、精確，惟筆者自維謭陋，謬誤之處，在所難免，尚祈教育先進不吝指正，衷心銘感。

目次

前言

第 1 章

緒　論

1.1 常態分配的意義

常態分配，係次數分配的一種。就次數的分佈而言，以中央的次數居多，而愈趨兩端，則愈呈連續性且對稱式的減少。若就曲線的彎曲情形來看，則此分配曲線自中央向左右兩邊次遞減少，漸緩下降，且其兩端尾部幾乎與基線相平行。根據常態分配的次數分配，所繪製的曲線，稱之為常態分配曲線，簡稱為常態曲線。

常態分配，係「重要分配」的一種 *。因受機率的影響，故常態

* 指數分配、甘馬分配與常態分配被稱為重要的分配，而以常態分配最為重要。

曲線又名常態機率曲線。就本質而言，常態分配是次數分配中的一種特殊分配；所稱「常態」，僅用以表示此種次數分配曲線的名稱。因其次數的分配，以中央居多，愈趨兩端，則愈呈連續性且對稱式的減少；又此曲線自中央向左右兩邊次遞減少，漸緩下降，形態是如此特殊，實爲各種次數分配中的一種特殊分配，故稱之爲「常態」分配，以與其他次數分配有所區別。

惟單就外形觀察常態分配曲線而言，則爲一單峰對稱的鐘形曲線（⇨ 3.1），但單峰對稱的鐘形曲線，卻並不一定就是常態分配曲線。簡言之，常態分配是對稱分配，但對稱分配並不一定是常態分配。此乃因爲對稱分配所包括的範圍甚廣，而常態分配只不過是其中的一種罷了。

1.2 常態分配的導源與基礎

常態分配導源於機率，而以二項分配爲基礎。今分別概述如下：

㈠ 機　　率

1. 樣本空間、樹形圖與事件

在某特定實驗中，所有可能出現情形所構成的集合 S，稱爲樣本空間。其中任一個特殊出現的情形，即 S 內之一元素，稱爲樣本點。

例如投擲一枚錢幣所有可能出現的情形爲出現正面與反面，則

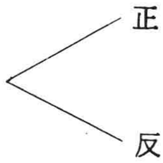
$$S = \{正, 反\}$$

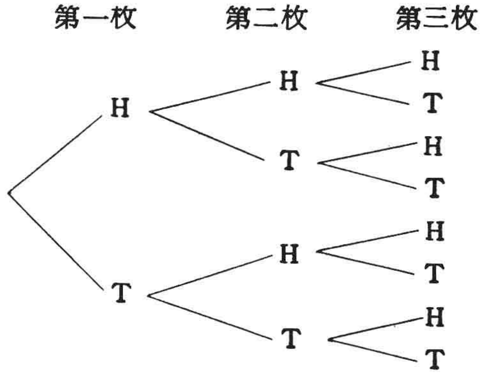
又如一次投擲三枚錢幣，而以 H 代表正面，T 代表反面，則

$$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

爲簡便計，可將可能出現的情形，以樹形圖表之。如以上列兩例爲例，則

第一例之樹形圖爲：　　第二例之樹形圖爲：





2　古典機率與經驗機率

機率，通常分成古典機率（又稱先天機率）和經驗機率（又稱後天機率）兩種。

古典機率，乃於設適合所予條件 α 的事件 A，有元素 $m(A)$，則事件 A 發生的機率以 $P(A)$ 表示，即得

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(S)}$$

因 $m(S)$ 常以 n 表之，故

$$P(A)=\frac{m(A)}{n}$$

此種機率之優點，在於不待試驗即可決定某種事件的機率。惟其缺點有：(1)隨機實驗的空間，其元素個數無限多時，則無法求出該事件之機率，(2)雖空間元素個數有限，但當事件元素的個數不能確定時，亦無法求出該事件之機率，(3)在隨機實驗中，n 種互斥，但其機會不均等之可能發生的機率，也無法求得。

經驗機率，乃 n 次重複性隨機實驗中，若事件 A 可能發生的次數

爲 $m(A)$，以 $P(A)$ 表示事件 A 發生的機率，則

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m(A)}{n}$$

上式即以古典機率爲其極限。又因經驗機率在科學研究上常被引用，且因事件出現的次數，係經由統計得來的，故經驗機率，又稱爲統計機率。

3　加法定理與乘法定理

計算機率，往往同時利用到加法定理和乘法定理。

(1)　加法定理

當事件 A 與事件 B 爲互斥時，則

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

例如一袋中有100支籤，分別從1至100予以標號，今某君抽出一支，欲求抽得9或13之倍數的機率，若令 A_n 表1至100能被 n 整除所成的集合，則 $m(A_9)=11$, $m(A_{13})=7$, $m(S)=100$，故

$$\begin{aligned}P(A_9\cup A_{13})&=P(A_9)+P(A_{13})\\&=\frac{11}{100}+\frac{7}{100}\\&=\frac{18}{100}\end{aligned}$$

今將此定理推廣，設 A_1，A_2，A_3，…，A_n 分別爲樣本空間的 n 個事件，則

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \\ i<j<k}} (A_i \cap A_j \cap A_k) -$$

$$\cdots\cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n)$$

如再以上例爲例，欲求3 或5 或7 之倍數的機率時，因

$$m(A_3) = 33 \qquad m(A_5) = 20 \qquad m(A_7) = 14$$

$$m(A_3 \cap A_5) = m(A_{15}) = 6, \quad m(A_3 \cap A_7) = m(A_{21}) = 4$$

$$m(A_5 \cap A_7) = m(A_{35}) = 2, \quad m(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = m(A_{105}) = 0$$

得 $P(A_3 \cup A_5 \cup A_7)$

$$= P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_3 \cap A_5) - P(A_3 \cap A_7) - P(A_5 \cap A_7) + P(A_3 \cap A_5 \cap A_7)$$

$$= P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_{15}) - P(A_{21}) - P(A_{35}) + P(A_{105})$$

$$= \frac{33}{100} + \frac{20}{100} + \frac{14}{100} - \frac{6}{100} - \frac{4}{100} - \frac{2}{100} + \frac{0}{100}$$

$$= \frac{55}{100}$$

(2) 乘法定理

當事件 A之出現與事件B之出現互相獨立，即A之出現，不影響B出現的機率；B之出現，亦不影響A出現的機率。則因

$$P(B \mid A) = P(B) \qquad P(A \mid B) = P(A)$$

故

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

例如投擲二枚錢幣，欲求同時出現正面的機率，今假定第一枚出現正面的事件爲A，第二枚出現正面的事件爲B，則

$$P(A)=\frac{1}{2} \qquad P(B)=\frac{1}{2}$$

故 $$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

今將此定理推廣，設 A_1，A_2，A_3，⋯，A_n 爲有限個獨立事件，且其單獨之機率皆不爲0，則

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots\cdots P(A_n)$$

亦可記爲 $$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

例如一袋裝有12球，分別爲3白、4紅、5黑、若每次取一球，且取出之球仍放回袋中，共取三次，欲求依次爲白、紅、黑的機率。可設取得白球、紅球、黑球之事件分別爲 A, B, C，則 $m(A)=3$，$m(B)=4$，$m(C)=5$，又 $m(S)=12$，故所求之機率爲

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{3}{12}\times\frac{4}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{144}$$

(二) 二項分配

1 二項式的函數發展

在1.2裏，曾學過投擲一枚錢幣的樣本空間 $S=\{$正，反$\}$，一次投擲三枚錢幣的樣本空間爲

$$S = \{ (H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T) \}$$

今以投擲二枚錢幣爲例，仍以 H 代表正面，T 代表反面，則其樣本空間爲 $\{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \}$

在此四種情形中，同時出現二枚正面的機率爲 $\frac{1}{4}$；出現一枚正面，另一枚反面的機率爲 $\frac{2}{4}$ 即 $\frac{1}{2}$；同時出現二枚反面的機率爲 $\frac{1}{4}$，而這三種機率的總和等於1 。

若將 $(x+y)^2$ 之展開式 $x^2+2xy+y^2$ 中，以 H 代替 x，以 T 代替 y，則二項式的平方等式

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

卽轉變爲

$$(H+T)^2 = H^2 + 2HT + T^2$$

若將錢幣數量增加至 n，則可得下列結果：

$$(H+T)^n = H^n + \frac{n}{1} H^{n-1} T + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} H^{n-2} T^2 + \cdots + T^n$$

2. 二項分配

設一群體含有 N 個個體，其中具有性質 A 者有 m 個，具有性質 $\bar{A}$ 者有 $(N-m)$ 個，如此，卽將含有 N 個個體之此一群體，稱爲二項群體。

若令 A 出現的機率爲 p，$\bar{A}$ 出現的機率爲 q 時

$$p = P(A) = \frac{m}{N} \qquad q = P(\bar{A}) = \frac{N-m}{N}$$

且 $\quad p + q = \frac{m}{N} + \frac{N-m}{N} = \frac{N}{N} = 1$

則 $q=1-p$

今在連續試行 n 次的情形下，若前 x 次出現 A，後 $n-x$ 次出現 $\bar{A}$，則由機率乘法定理，可知其同時出現的機率為

$$P(\underbrace{A\cap A\cap\cdots\cdots\cap A}_{x\text{個}}\cap\underbrace{\bar{A}\cap\bar{A}\cap\cdots\cdots\cap\bar{A}}_{n-x\text{ 個}})$$
$$=\underbrace{P(A)\cdots\cdots P(A)}_{x\text{個}}\underbrace{P(\bar{A})\cdots\cdots P(\bar{A})}_{n-x\text{ 個}}$$
$$=p^x q^{n-x}$$

由於在 n 次試行中，x 個 A 與 $n-x$ 個 $\bar{A}$ 之出現次序是隨機的，其可能的不同排列應有 $C(n,x)$ 種情形，且每種排列出現的機率應該是相同的，故 A 出現 x 次的機率為

$$C(n,x)p^x q^{n-x} \quad \text{即} \quad \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

令 A 出現次數為隨機變數 X，則 X 之可能出現值 $x=0,1,2,\cdots\cdots,n$，其機率分配為

$$P(X=x)=f(x)=C(n,x)p^x q^{n-x}$$

式中，$f(x)=C(n,x)p^x q^{n-x}$ 稱為二項分配。當然，可由二項式的理論予以推廣，得下列一等式：

$$(p+q)^n=p^n+\frac{n}{1}p^{n-1}q+\frac{n(n-1)}{1\times 2}p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+q^n$$

今設八枚錢幣同時投擲，因任一枚出現正面的機率皆為 $\frac{1}{2}$，即

$p=\frac{1}{2}$，又 $q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$n=8$，則

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8=\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{8\times7}{1\times2}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$+\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

上式可化簡爲

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}+\frac{8}{256}+\frac{28}{256}+\frac{56}{256}+\frac{70}{256}+\frac{56}{256}+\frac{28}{256}+\frac{8}{256}+\frac{1}{256}$$

請注意，上式右邊之機率的總和，等於1。如將各項之分數化成小數，則所投擲八枚錢幣出現正面、反面的二項式機率，如下表：

投擲八枚錢幣出現正面、反面之二項式機率

H	T	p	p
8	0	$\frac{1}{256}$	0.004
7	1	$\frac{8}{256}$	0.031
6	2	$\frac{28}{256}$	0.109
5	3	$\frac{56}{256}$	0.219
4	4	$\frac{70}{256}$	0.274
3	5	$\frac{56}{256}$	0.219
2	6	$\frac{28}{256}$	0.109
1	7	$\frac{8}{256}$	0.031
0	8	$\frac{1}{256}$	0.004
Σ		$\frac{256}{256}$	1.000