

常態分配與 教育統計

陳國雄編著

登記圖書出版社印行

常態分配與 教育統計

陳國雄編著

登記圖書出版社印行

內政部著作權執照

著作人	著作物	姓名	稱謂	數
陳國雄	常態分配與教育統計	金金		
陳國雄	姓	出生年月日	籍貫	
陳國雄	有權人所	民國五十年三月一日	臺灣省台南市	
陳國雄	執照字號	民國五十年三月一日	臺灣省台南市	
陳國雄	台內著字第	民國五十年三月一日	臺灣省台南市	
陳國雄	柒捌伍壹號	民國五十年三月一日	臺灣省台南市	
陳國雄	年有效	民國五十年三月一日	臺灣省台南市	

中華民國六十九年五月十一日

日

版權所有・翻印必究

中華民國六十九年十二月出版
常態分配與教育統計

著 作 者：陳 國 雄
出 版 者：登記圖書出版社
地 址：小東路307巷54弄27號
登記證字號：局版台業字第0383號
發 行 人：陳 國 珍
印 刷 者：登 文 印 刷 局
地 址：台南市協進街卅一號
電 話：(062)3 7 7 8 8 3

C 定價：新台幣九十元整

郵購：郵撥第32181號陳國雄帳戶

前 言

民國六十三年十二月二十二日，中國時報之社論「學生考試不及格原因的探討」*一文中，會云：「如果教科書的程度與學生的智力發展不相稱，則學生成績降低，自屬必然之事。」又說：「除了教科書以外，另一個癥結所在，是教學法和考試的方式。」惟不論其原因為何，一般人所據以衡量學習結果的標準，乃在於學生的考試成績。根據報導，全省七十一所省立高中曾建議，「大學聯考數學科命題不宜過深，並應注意大多數高中學生程度的常態分配。」在「學生程度的常態分配」一語中，實已隱含考試成績的常態分配。

* 全文影印在目次之後。

雖然全省七十一所省立高中建議「……應注意大多數高中學生程度的常態分配」，然而，迄今仍有「各級學校（註：當然包括高中）數學成績和大專聯考數學成績不及格的數字佔居首位」（見中等學校教師教育科目訓練班印行之分科教材教法研究第132頁）的事實。更可怕的是台南市議會王議長所舉的例子，他說：「某校一班五十五人中，月考成績，英語最高十一分，數學八分」。又說：「類此情形，可謂十分普遍。」（見63.12.22中國時報社論），果真如此，則全省高中、國中考查學生成績應先「注意大多數學生程度的常態分配」，以免失去教育的評量價值。

目前國小學生成績考查實施要點中，已詳細規定常態分配等第人數之分配比例，足見教育當局是相當重視常態分配；當然，每一位教師也應該重視它。至於常態分配的應用範圍，並非僅限於成績考查一項。實際上，各種教育事實的分配，大多數都近於常態。因此，各種教育工作皆有可能應用到常態分配的理論。更何況「常態分配幾乎是任何分配在適當處理後的極限情形」（見中央研究院數學研究所印行之機率與統計第17頁），時至今日，常態分配的應用已大為普遍，舉凡教育、政治、企業……等各界皆需應用其理論，則常態分配的價值，豈容忽視？

筆者執教至今，十有餘年，一向重視常態分配。除藉常態分配的理論考查學生之學習結果外，更用以檢討教學的成效。乃就「常態分配的理論」與「常態分配在教育統計上的應用」加以研究，編寫成書，期能拋磚引玉，使各界重視常態分配的理論，並廣泛地應用。

本書之編撰，起自常態分配的意義，止於常態分配在教育統計上的應用舉例。其中，演算、繪圖、製表等工作，皆力求詳細、精確，惟筆者自維譾陋，謬誤之處，在所難免，尚祈教育先進不吝指正，衷心銘感。

目 次

前言

第 1 章 緒 論	1 ~ 17
1 - 1 常態分配的意義	1
1 - 2 常態分配的導源與基礎	2
1 - 3 圓滑曲線的形成	12
1 - 4 常態分配的發現	15
1 - 5 常態分配在教育上的價值	15
1 - 6 本書附表簡介	17
第 2 章 常態分配函數與常態分配式的形態	18 ~ 31
2 - 1 機率密度函數與常態分配機率函數	18

目 次 2

2-2	超幾何分配式與二項分配式	19
2-3	二項分配式與常態分配式	22
2-4	超幾何分配式、二項分配式與常態分配式之關係	28
2-5	常態分配式的形態	30
第3章 常態分配曲線之特性		32~44
3-1	概況	32
3-2	常態分配曲線下的面積	36
3-3	平均數、中位數、與衆數	37
3-4	偏態與峯度	38
3-5	最高點與反曲點	42
第4章 常態分配機率表的編製與應用		45~72
4-1	常態分配機率表的意義	45
4-2	求二變量間面積之公式演證	46
4-3	以公式求二變量間之面積釋例	48
4-4	利用常態分配機率表求二變量間的面積	52
4-5	常態曲線下之特殊機率	57
4-6	累積常態分配機率表的編製與應用	58
4-7	二項分配之常態漸近釋例	63
第5章 常態分配縱線表之編製與應用		73~80
5-1	常態分配縱線表的意義	73
5-2	由公式求縱線長	74
5-3	利用常態分配縱線表求縱線高度	76
5-4	縱線高度的另一表示法	77
第6章 常態曲線之配合與測度		81~111
6-1	常態曲線之配合方法	81

6-2	二項展開式與釋例	82
6-3	面積法與釋例	85
6-4	縱坐標法與釋例	98
6-5	面積法與縱坐標法之比較	100
6-6	常態分配之測度方法	102

第7章 常態分配在教育統計上之應用舉例^{12~142}

7-1	學習反應曲線圖的繪製	113
7-2	考試命題卡的應用	116
7-3	比較兩組次數分配重疊的幅度	118
7-4	評定考試題目的難度	120
7-5	平均分班與能力分班	122
7-6	標準分數與T分數	125
7-7	求各變量間的機率及次數	127
7-8	求部分量數的範圍	129
7-9	目前國小之成績考查辦法與常態分配	131
7-10	招生之研究報告與常態分配	136
附表：一	對數表	144
二	常態分配機率表及縱線表	159
三	常態分配較大部分與較小部分機率表	162
四	累積常態分配機率表	165
五	χ^2 分配數值表	167

參考書目	169
------	-----

第 1 章

緒 論

1.1 常態分配的意義

常態分配，係次數分配的一種。就次數的分佈而言，以中央的次數居多，而愈趨兩端，則愈呈連續性且對稱式的減少。若就曲線的彎曲情形來看，則此分配曲線自中央向左右兩邊次遞減少，漸緩下降，且其兩端尾部幾乎與基線相平行。根據常態分配的次數分配，所繪製的曲線，稱之為常態分配曲線，簡稱為常態曲線。

常態分配，係「重要分配」的一種*。因受機率的影響，故常態

* 指數分配、甘馬分配與常態分配被稱為重要的分配，而以常態分配最為重要。

2 常態分配與教育統計

曲線又名常態機率曲線。就本質而言，常態分配是次數分配中的一種特殊分配；所稱「常態」，僅用以表示此種次數分配曲線的名稱。因其次數的分配，以中央居多，愈趨兩端，則愈呈連續性且對稱式的減少；又此曲線自中央向左右兩邊次遞減少，漸緩下降，形態是如此特殊，實為各種次數分配中的一種特殊分配，故稱之為「常態」分配，以與其他次數分配有所區別。

惟單就外形觀察常態分配曲線而言，則為一單峰對稱的鐘形曲線（ $\Rightarrow$ 3.1），但單峰對稱的鐘形曲線，卻並不一定就是常態分配曲線。簡言之，常態分配是對稱分配，但對稱分配並不一定是常態分配。此乃因為對稱分配所包括的範圍甚廣，而常態分配只不過是其中的一種罷了。

1.2 常態分配的導源與基礎

常態分配導源於機率，而以二項分配為基礎。今分別概述如下：

(一) 機 率

1 樣本空間、樹形圖與事件

在某特定實驗中，所有可能出現情形所構成的集合 S ，稱為樣本空間。其中任一個特殊出現的情形，即 S 內之一元素，稱為樣本點。

例如投擲一枚錢幣所有可能出現的情形為出現正面與反面，則

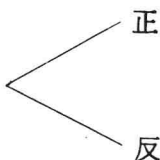
$$S = \{ \text{正}, \text{反} \}$$

又如一次投擲三枚錢幣，而以 H 代表正面， T 代表反面，則

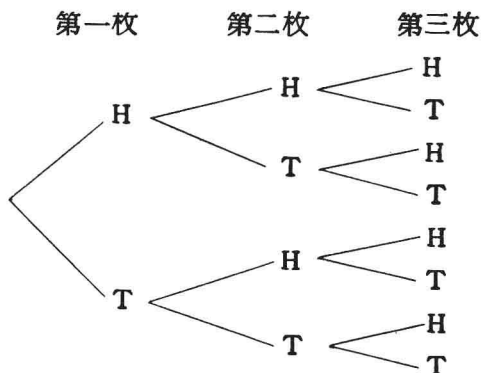
$$S = \{ (H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), \\ (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T) \}$$

為簡便計，可將可能出現的情形，以樹形圖表之。如以上列兩例為例，則

第一例之樹形圖爲：



第二例之樹形圖爲：



2 古典機率與經驗機率

機率，通常分成古典機率（又稱先天機率）和經驗機率（又稱後天機率）兩種。

古典機率，乃於設適合所予條件 α 的事件 A ，有元素 $m(A)$ ，則事件 A 發生的機率以 $P(A)$ 表示，即得

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

因 $m(S)$ 常以 n 表之，故

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}$$

此種機率之優點，在於不待試驗即可決定某種事件的機率。惟其缺點有：(1)隨機實驗的空間，其元素個數無限多時，則無法求出該事件之機率，(2)雖空間元素個數有限，但當事件元素的個數不能確定時，亦無法求出該事件之機率，(3)在隨機實驗中， n 種互斥，但其機會不均等之可能發生的機率，也無法求得。

經驗機率，乃 n 次重複性隨機實驗中，若事件 A 可能發生的次數

4 常態分配與教育統計

爲 $m(A)$ ，以 $P(A)$ 表示事件 A 發生的機率，則

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(A)}{n}$$

上式即以古典機率爲其極限。又因經驗機率在科學研究上常被引用，且因事件出現的次數，係經由統計得來的，故經驗機率，又稱爲統計機率。

3 加法定理與乘法定理

計算機率，往往同時利用到加法定理和乘法定理。

(1) 加法定理

當事件 A 與事件 B 爲互斥時，則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

例如一袋中有 100 支籤，分別從 1 至 100 予以標號，今某君抽出一支，欲求抽得 9 或 13 之倍數的機率，若令 A_n 表 1 至 100 能被 n 整除所成的集合，則 $m(A_9) = 11$ ， $m(A_{13}) = 7$ ， $m(S) = 100$ ，故

$$\begin{aligned} P(A_9 \cup A_{13}) &= P(A_9) + P(A_{13}) \\ &= \frac{11}{100} + \frac{7}{100} \\ &= \frac{18}{100} \end{aligned}$$

今將此定理推廣，設 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 分別爲樣本空間的 n 個事件，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}} (A_i \cap A_j \cap A_k) - \\
&\quad \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)
\end{aligned}$$

如再以上例爲例，欲求3 或5 或7 之倍數的機率時，因

$$\begin{aligned}
m(A_3) &= 33 & m(A_5) &= 20 & m(A_7) &= 14 \\
m(A_3 \cap A_5) &= m(A_{15}) = 6, & m(A_3 \cap A_7) &= m(A_{21}) = 4 \\
m(A_5 \cap A_7) &= m(A_{35}) = 2, & m(A_3 \cap A_5 \cap A_7) &= m(A_{105}) = 0
\end{aligned}$$

得 $P(A_3 \cup A_5 \cup A_7)$

$$\begin{aligned}
&= P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_3 \cap A_5) - P(A_3 \cap A_7) \\
&\quad - P(A_5 \cap A_7) + P(A_3 \cap A_5 \cap A_7) \\
&= P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_{15}) - P(A_{21}) - P(A_{35}) \\
&\quad + P(A_{105}) \\
&= \frac{33}{100} + \frac{20}{100} + \frac{14}{100} - \frac{6}{100} - \frac{4}{100} - \frac{2}{100} + \frac{0}{100} \\
&= \frac{55}{100}
\end{aligned}$$

(2) 乘法定理

當事件 A 之出現與事件 B 之出現互相獨立，即 A 之出現，不影響 B 出現的機率； B 之出現，亦不影響 A 出現的機率。則因

$$P(B | A) = P(B) \quad P(A | B) = P(A)$$

故 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

例如投擲二枚錢幣，欲求同時出現正面的機率，今假定第一枚出現正面的事件爲 A ，第二枚出現正面的事件爲 B ，則

6 常態分配與教育統計

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

故 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

今將此定理推廣，設 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 為有限個獨立事件，且其單獨之機率皆不為 0，則

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

亦可記為
$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

例如一袋裝有 12 球，分別為 3 白、4 紅、5 黑，若每次取一球，且取出之球仍放回袋中，共取三次，欲求依次為白、紅、黑的機率。可設取得白球、紅球、黑球之事件分別為 A, B, C ，則 $m(A) = 3$ ， $m(B) = 4$ ， $m(C) = 5$ ，又 $m(S) = 12$ ，故所求之機率為

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \\ &= \frac{3}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{5}{12} \\ &= \frac{5}{144} \end{aligned}$$

(二) 二項分配

1 二項式的函數發展

在 1.2 裏，曾舉過投擲一枚錢幣的樣本空間 $S = \{\text{正}, \text{反}\}$ ，一次投擲三枚錢幣的樣本空間為

$$S = \{ (H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T) \}$$

今以投擲二枚錢幣為例，仍以 H 代表正面， T 代表反面，則其樣本空間為 $\{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \}$

在此四種情形中，同時出現二枚正面的機率為 $\frac{1}{4}$ ；出現一枚正面，另一枚反面的機率為 $\frac{2}{4}$ 即 $\frac{1}{2}$ ；同時出現二枚反面的機率為 $\frac{1}{4}$ ，而這三種機率的總和等於 1。

若將 $(x + y)^2$ 之展開式 $x^2 + 2xy + y^2$ 中，以 H 代替 x ，以 T 代替 y ，則二項式的平方等式

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

即轉變為

$$(H + T)^2 = H^2 + 2HT + T^2$$

若將錢幣數量增加至 n ，則可得下列結果：

$$(H + T)^n = H^n + \frac{n}{1} H^{n-1} T + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} H^{n-2} T^2 + \cdots + T^n$$

2 二項分配

設一群體含有 N 個個體，其中具有性質 A 者有 m 個，具有性質 $\bar{A}$ 者有 $(N - m)$ 個，如此，即將含有 N 個個體之此一群体，稱為二項群体。

若令 A 出現的機率為 p ， $\bar{A}$ 出現的機率為 q 時

$$p = P(A) = \frac{m}{N} \quad q = P(\bar{A}) = \frac{N - m}{N}$$

$$\text{且 } p + q = \frac{m}{N} + \frac{N - m}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

8 常態分配與教育統計

則 $q = 1 - p$

今在連續試行 n 次的情形下，若前 x 次出現 A ，後 $n-x$ 次出現 $\bar{A}$ ，則由機率乘法定理，可知其同時出現的機率為

$$\begin{aligned} & P(A \cap A \cap \cdots \cap A \cap \bar{A} \cap \bar{A} \cap \cdots \cap \bar{A}) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{x \text{ 個}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-x \text{ 個}} \\ & = P(A) \cdots P(A) P(\bar{A}) \cdots P(\bar{A}) \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{x \text{ 個}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-x \text{ 個}} \\ & = p^x q^{n-x} \end{aligned}$$

由於在 n 次試行中， x 個 A 與 $n-x$ 個 $\bar{A}$ 之出現次序是隨機的，其可能的不同排列應有 $C(n, x)$ 種情形，且每種排列出現的機率應該是相同的，故 A 出現 x 次的機率為

$$C(n, x) p^x q^{n-x} \quad \text{即} \quad \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

令 A 出現次數為隨機變數 X ，則 X 之可能出現值 $x=0, 1, 2, \dots, n$ ，其機率分配為

$$P(X=x) = f(x) = C(n, x) p^x q^{n-x}$$

式中， $f(x) = C(n, x) p^x q^{n-x}$ 稱為二項分配。當然，可由二項式的理論予以推廣，得下列一等式：

$$(p+q)^n = p^n + \frac{n}{1} p^{n-1} q + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} p^{n-2} q^2 + \cdots + q^n$$

今設八枚錢幣同時投擲，因任一枚出現正面的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ，即

$p = \frac{1}{2}$ ，又 $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ， $n = 8$ ，則

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^8 &= \binom{8}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{8}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &\quad + \binom{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + \binom{8}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \end{aligned}$$

上式可化簡為

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} + \frac{8}{256} + \frac{28}{256} + \frac{56}{256} + \frac{70}{256} + \frac{56}{256} + \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256}$$

請注意，上式右邊之機率的總和，等於1。如將各項之分數化成小數，則所投擲八枚錢幣出現正面、反面的二項式機率，如下表：

投擲八枚錢幣出現正面、反面之二項式機率

H	T	p	p
8	0	$\frac{1}{256}$	0.004
7	1	$\frac{8}{256}$	0.031
6	2	$\frac{28}{256}$	0.109
5	3	$\frac{56}{256}$	0.219
4	4	$\frac{70}{256}$	0.274
3	5	$\frac{56}{256}$	0.219
2	6	$\frac{28}{256}$	0.109
1	7	$\frac{8}{256}$	0.031
0	8	$\frac{1}{256}$	0.004
Σ		$\frac{256}{256}$	1.000