新课标初中数学

模块教材

Zou Jin Shu De Shi Jie

走进数的世界

Zou Jin Shu De Shi Jie

总主编：毛文凤

本册编著：顾继玲 张新华 李君华

中国大百科全书出版社

新课标初中数学模块教材

走进数的世界

中国大百科全书出版社

总编辑:徐惟诚　　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

走进数的世界/毛文风主编.-北京:中国大百科全书出版社,2005

新课标初中数学模块教材

ISBN 7-5000-7230-9

Ⅰ.走… Ⅱ.毛… Ⅲ.代数课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142233 号

策划设计:可一图书　(http://www.keyibook.com)

责任编辑:简菊玲

新课标初中数学模块教材

走进数的世界

* * *

中国大百科全书出版社出版

全国新华书店经销

http://www.ecph.com.cn

北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010-88390797

山东省沂源县教育印刷厂

* * *

2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷

890×1240 毫米　32 开本　8.25 印张　145 千字

ISBN 7-5000-7230-9/G·828

定　价:12.00 元

序

普通中学数学课程标准的颁布引发了一场教学内容的大改革。与时俱进地审视数学课程教学的内涵，已成为人们关注的问题。人们开始正视传统的教材构成、传统的教学模式、传统的评价标准所产生的负面影响——学生缺乏学习数学的兴趣。

本模块教材系列的编写其旨意就是要在纷繁杂乱的数学读物中，编出一套能体现数学独特的知识和能力、历史和人文、情感和价值观的数学用书，从而最大限度地调动学生对数学的兴趣。数学作为一门科学，应注重概念清晰、计算正确、论证有据；数学作为一种文化，应让人在数学读物中体会到它的文化价值。因此适当地介绍数学文化的演绎过程及它对推动社会发展的作用与展望它的发展趋势是十分必要的，是符合新课标理念的。当然，归根结底，针对中学生的任一数学读物都是有着教育功能的，在这套模块教材中我们特别着重做到三个结合：适度的形式化与启发兴趣形式相结合，发展学生的思维能力与增强数学的应用能力相结合，掌握扎实的基础知识与拓展数学视野、培养创新精神相结合。

纵观每一分册的写作均分三个层次：第一层次为引论，背景资料、数学史话、名人轶事或自撰小品等简洁地勾画出通往所述数学模块专题内容的千年路径或近代畅想，使读者产生“登高望远”的感觉或“源远流长”的体会。第二层次为主体构架，与新课程相伴，通过解惑的方式，深入浅出地讲解数学，着重思维训练、方法积累与能力提高。第三层次为提高延伸部分，与新课标的选修内容（指高中）相配合，这是特地为对数学有浓厚兴趣的青少年朋友安排的，希望同学们能喜欢它。

这三个层次，在本系列丛书不同的模块分册中，有的是以章节为标志，层次分明、一目了然，有的则是溶于章节之中相互渗透、各显特色。

这次参与丛书编写的作者，集中了目前数学普通教育的一些著名专家教授和教学一线的顶尖教师，尽管他们的认真负责精神和专业能力是毋庸置疑的，但由于编写时间仓促及作者对数学新课标的认识和实践水平有限，丛书在编写过程中难免有不足和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

（作者系南京师范大学数科院教授）

前　　言

随着新的数学课程标准的颁布和实施，一批新的数学教材应运而生。在新教材实施的过程中，教师有喜悦，如教材的内容更贴近学生的生活了，学生的学习兴趣更浓了……；也有压力和困惑，如许多老师反映缺乏合适的课程资源，使他们在教学设计时难以选择和把握，这样势必影响新教材的实施。本套丛书正是本着帮助教师尽快适应新课程，满足一线教师在教学实践中的最为迫切需求的思路而运作的。

在本书的编写中，我们着力反映新课程的理念，体现新课程理念的具体化和可操作化。本书具有如下几个鲜明的特点：

一、以“专”为先。本书将新课标中的几大内容领域所涉及的“数”以专题的形式呈现，体系清晰明了，并对这一专题进行了由浅入深的诠释，相信同学们读过之后，对这个专题的知识就能有全面的把握了。

二、体例新颖。本书对每一知识点，设置了许多小的栏目，如“思路引导”、“思维误区”等，不仅能把这些知识点讲细、讲透，而且会告诉同学们如何用这些知识去解决实际问题。每一例题后，又设置了“举一反三”栏目，对同

一类型的问题，力图讲全、讲透，学生“见多”自然就“识广”了。

三、满足不同学生发展的需求。《标准》中规定的要求是每个学生都必须达到的最基本的要求，也是最低要求，但并不意味着我们的数学教育仅仅满足于此，我们应该在保证《标准》基本要求的同时，给学有余力的学生提供更为有效的发展途径。正是基于这样的考虑，本书有基本内容，也有拓展的内容（打“ * ”号），目的就在于给这些学生提供更多学习数学和研究数学的机会。

本书共四章，第一章“数的繁衍和发展”介绍数的历史发展，题材广泛，或提高学生的学习兴趣，或启迪学生思维，或开拓学生视野；第二章“与有理数零距离”，讲解有理数的概念和运算，同时根据《标准》增加了新内容“‘大数’与‘小数’”，旨在培养学生的数感；第三章“与实数零距离”讲解实数的概念和运算；第四章“皇冠巡礼”和同学们一起初步学习整数论，这也是各级数学竞赛中经常碰到的问题。

愿这本书能成为同学们学习过程中的好伙伴，教师教学的好参谋。

虽然我们在编写过程中反复酝酿、推敲、审核，但百密难免一疏，书中不足之处敬请广大读者不吝指正。

编者

目　　录

第一章　数的繁衍和发展

数的诞生

在荷马史诗中有这样一个故事：当俄底修斯刺瞎独眼巨人波吕斐摩斯并离开库克罗普斯国以后，那个不幸的盲人每天坐在山洞口照料他的羊群．早晨母羊外出吃草，每出来一只，他就从一堆石子中捡起一颗石子．晚上母羊返回山洞，每进去一只，他就扔掉一颗石子．当他把早晨捡起的石子都扔光时，他就确信所有的母羊全返回了山洞．

人类的祖先就是采用这种对应关系来计数的．人类对数目的认识，最初是从“一”和“多”开始的．后来逐渐有了“二”、“三”等数目的意识．但这种对数的朦胧概念都是和具体的事物对象联系在一起的，例如二头鹿、三根柴火等．进一步的发展是采用手指、树枝或贝壳等计数，其实际含义是物体的个数“与手指、树枝、或贝壳一样多”．

“结绳记事”是地球上许多相隔很近的古代人类共同做过的事．公元前1500年，南美洲秘鲁印加族（印第安人的一部分）习惯

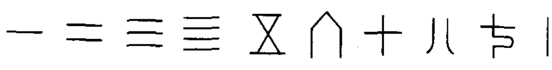
于“结绳记数”——每收进一捆庄稼，就在绳子上打个结，用结的多少来记录收成．传说古代波斯王打仗时也常用绳子打结来计算天数．我国《易经》记载，上古时期的中国人也是“结绳而治”，就是用在绳上打结的办法来记事表数．后来又改为“书契”，即用刀在竹片或木头上刻痕记数．用一划代表“一”．直到今天，我们中国人还常用“正”字来记数，每一划代表“一”．

用利器在树皮上或兽皮上刻痕，或用小棍摆在地上计数也是古人常用的办法．这些办法用得多了，就逐渐形成数的概念和记数的符号．

形式各异的数字

在生产劳动中人们逐步创造了数字．世界上许多古老的民族都创造了不同的数字．现在我们所用的数字，是经过几千年来无数次修改变化而成的．

我国古代很早就有了数字．最初的形状已没有办法查到，现在能查到的是三千多年前殷代刻在甲骨上的数字：



1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

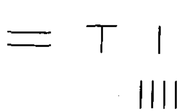
我们可以看到，其中有几个数字跟现在所用的数字相差不多，并且当时也有了“百”“千”“万”等表示数位的符号．可见我们的祖

先在三千多年前就创造了一套完整、严密的计数方法.

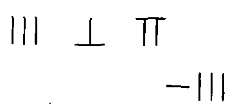
大约在公元前770年至公元前221年，春秋战国时期，我国出现了用算筹记数，并采用位置记数法."算筹"是用来记数或计算的一种竹制工具(小竹棍).古代算筹的功用大致和后来的算盘珠相仿.五以下数用几根筹表示几，6、7、8、9四个数目，用一根筹放在上边表示五，余下来每一根筹表示一，放在下边，用算筹表示数目时有纵横两种方式：

纵式:	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式:	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

我国的算筹采用位置计数法，即将万、千、百、十等意义，通过数码所在位置加以表示，若要表示一个多位数，把各位的数目从左到右横列.为了醒目，各位数目的筹式纵横相间，个位数用纵式表示，十位数用横式，百位数用纵式…….如5 348用算筹表示出来是𝍭𝍢𝍬𝍧.如果数目中有0，这一位上就空着不放算筹，如53 048则用算筹表示为𝍤𝍫　𝍬𝍧.用算筹也可以表示分数和小数：

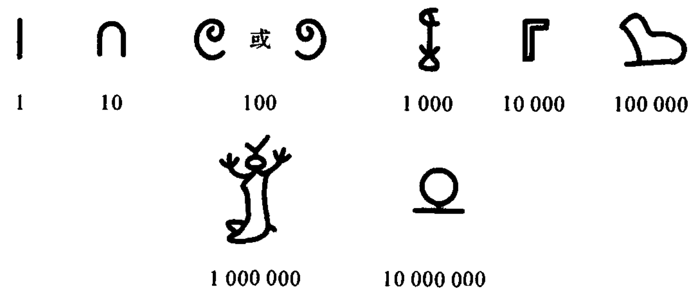


$26\frac{1}{4}$



367.13

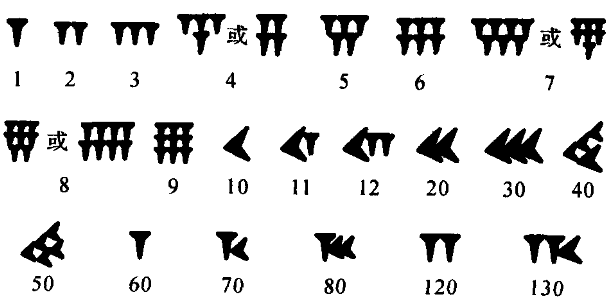
古埃及人也很早就有了数字，他们是以 10 为基的象形数字记数的.



介于其间的各数由这些符号的组合来表示，书写方式是从右往左. 如 3 254，就要写成下面一串记号：

可以看出，尽管埃及是最早采用 10 进数制的国家之一，由于没有采用位置记数的方法，这样就给记数带来了麻烦.

古巴比伦人的数字也很奇特，每一笔都像钉子一样. 古巴比伦人借助于符号和，可以表示所有的整数. 如：



现在,我们所用的数字0、1、2、3、4、5、6、7、8、9称为阿拉伯数字.这些数字符号原来是古代印度人发明的,后来传到阿拉伯,又从阿拉伯传到欧洲,欧洲人误以为是阿拉伯人发明的,就把它们叫做“阿拉伯数字”,因为流传了许多年,人们叫得顺口,所以至今人们仍然将错就错,把这些古代印度人发明的数字符号叫做阿拉伯数字.当然这种数字最初的形状跟现在完全不同,也是经过许多年代无数次的修改变化而来的.

由于阿拉伯数字的字形整齐,写起来方便,用十个数字就能表示任何大小的数目,利用它记数和计算都很便利.因此,阿拉伯数字已成为全世界通用的数字符号.

零的历史

零对于数的系统来说是必不可少的.但最初的数字中是没有“0”的,经过一千多年后,才产生了“0”这个数字.

在“0”产生之前,古巴比伦人用留空位的办法代表零,后来用“”这一特殊的符号来表示零.玛雅人用贝壳形状的符号表示“0”.古代中国的算筹表示法也是以空位表示“0”的.

从许多方面看,印度人对零概念的发展作出了非同寻常的贡献.有材料显示,在早期的印度人的手写稿里,他们曾经使用小圆点来表示位置系统中的空白位置.有趣的是在同样的文件中有时也使用小圆

点来表示未知数，而这在今日我们通常使用 x 来表示它. 较晚的印度数学家对零已赋予其名，但仍旧没有表示它的符号. 众所公认的印度人使用零的最早记录是在公元 876 年所写下的. 在一石块的铭文上，提及的数字“270”和“50”几乎和今日的表示一样.

再后来，“零”的概念不仅表示计数系统里的一个空白位置，也表示数零.

奇妙的自然数

1、2、3、4…这些简简单单的自然数，看起来平淡无奇，但认真研究这些数字，就会发现其中妙趣横生.

图 1-1 中左下角是一个小正方形，由此开始，第一层虚线标出了 3 个小正方形，第二层虚线标出了 5 个小正方形……它说明了下面一些有趣的事实：

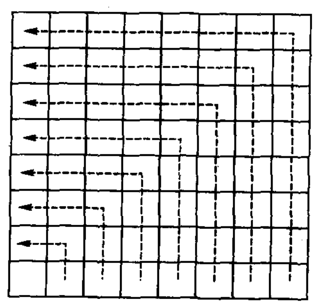


图 1-1

$1 = 1 = 1^2$,

$1 + 3 = 4 = 2^2$,

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$,

……

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$

一般地，如果 n 是一个自然数，则

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 .$$

对于所有的自然数，下面的式子也是正确的：

$$1^3=1^2 ,$$

$$1^3+2^3=1+8=9=(1+2)^2 ,$$

$$1^3+2^3+3^3=1+8+27=(1+2+3)^2,$$

……

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=1+8+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2 ,$$

在自然数中还有一些数，看起来貌不惊人，但却十分特别，令人百思不得其解. 6 174 就是其中之一. 把 6 174 各位数字从大到小排列，再从小到大排列，然后用大数减小数：7 641－1 467＝6 174. 结果竟与原数 6 174 一样. 有趣的是，如果随便取一个四位数，只要它的四个数字不全相同，按上述方法对它处理，并重复多次，最终都将得到 6 174 这个数. 比如 2 589：

$$9\,852-2\,589=7\,263,\ 7\,632-2\,367=5\,265 ,$$

$$6\,552-2\,556=3\,996,\ 9\,963-3\,699=6\,264 ,$$

$$6\,642-2\,466=4\,176,\ 7\,641-1\,467=6\,174 .$$

对任意一个六位数按上述方法计算，会得到三种结果：(1)631 764 的重复；(2) 549 945 的重复；(3) 下列七个数的循环：840 852，860 832，862 632，642 654，420 876，851 742，750 843.

对八位数也有类似的结果，最后都归于 63 317 664；对十位数来

说，最后都归于 6 333 176 664. 从四位数到十位数，用上述方法处理的结果，都与 6 174 这个数有关.

1930 年，意大利教授杜西发现了这样一个现象：随意取 4 个数写在圆周上，让两个相邻的数相减，并且总是大的减小的，如此下去，在有限步之内必然会出现 4 个相等的数.

三位数也有奇妙的性质.

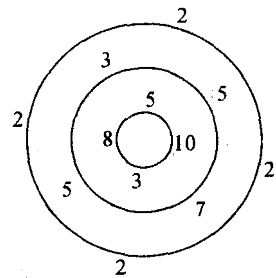


图 1-2

任取一个三位数，将各位数字倒着排列得到一个新数，与原数相加，反复这样做，对于大多数自然数，很快就会得到一个从左到右读与从右到左读完全一样的数，我们称之为“回文数”. 比如从 185 开始：

$185 + 581 = 766,\ 766 + 667 = 1\,433,$

$1\,433 + 3\,341 = 4\,774$

只用三步就得到了上述结果. 但是，也有通过这种办法似乎永远也变不成回文数的数，其中最小的数是 196，它在被试验到 5 万步，达到 21 000 位时，仍没有得到回文数. 在前 10 万个自然数中，有5 996个数像 196 这样似乎永远不能产生回文数，但至今没有人能证实或否定这一猜测. 于是“196 问题”成了世界性的难题.

专门研究整数性质的数学分支叫做数论. 数论中有许多看似简单其实相当困难，甚至近乎神秘的问题等待人们去解决，哥德巴赫猜想