数学理论与应用系列

调和分析与小波入门

■ 杨奇祥　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学理论与应用系列

调和分析与小波入门

■ 杨奇祥 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

调和分析与小波入门/杨奇祥编著.—武汉：武汉大学出版社,2012.1
数学理论与应用系列
ISBN 978-7-307-09368-3

Ⅰ.调…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.①调和分析　②小波理论　Ⅳ.①O177.5
②O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 264838 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:刘　欣　　版式设计:马　佳

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn　网址：www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:8　字数:142 千字　插页:1
版次:2012 年 1 月第 1 版　　2012 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-09368-3/O·466　　定价:18.00 元

版权所有，不得翻印；凡购我社的图书，如有质量问题，请与当地图书销售部门联系调换。

前　言

理工类各学科高年级的本科生以及低年级研究生，都对数学的哪些东西对他们的将来有用和他们将来应该掌握数学的哪些内容充满了好奇，这也是我以前作为学生时最为困惑的. 因此，与其向他们介绍一些知识，不如向他们介绍这方面知识的一些轮廓，让他们自己决定学些什么. 小波从 20 世纪 80 年代形成理论体系以来，一路突飞猛进；国内 90 年代初开始引进小波，经过数年时间各大学就从无到有，到今天各个重点大学不但在数学学科有很多小波方面的人才，在许多其他学科同样如此. 小波是近 30 年创造就业机会最多的学科.

在我公派去法国读博士学习小波之前的 1990 年，当时武大的校长齐民友老先生对我说国外新发明了一门学科，就连计算机都不好计算的 Hilbert 矩阵也可以很好计算了；徐超江教授对我说，Meyer 在美国报告这方面的工作时教室里坐满了包括众多企业家在内的各方面人士. 那时候我不知道小波是什么，小波好像离我们的生活很远. 但今天，早上去上班坐的公交车或者开的私家车，很可能就是卫星导航的，而这个导航系统很可能就是利用小波开发出来的；打开电视或者上网，里面的图像或者信号就是利用小波处理过的；就连我们随身携带的手机，它的制式也可能是利用小波制定的. 大家知道，为了避免假币，每种纸币都有水印；很多其他的防伪标志也使用水印，其中小波处理的合适的水印被众多企业所推崇. 不过水印的工艺过于复杂也会带来麻烦，前一段时间新版的美元就因为水印工艺过于复杂导致几百亿美元无法发行. 还有小波对手写文字的识别的应用，如将一份手稿用扫描仪扫描一下，计算机就能八九不离十地识别这些文字和记号. 从上可以看出，30 年前与我们的生活几乎毫无关系的一门数学学科，今天几乎无时无刻不与我们每个人的生活直接或间接地息息相关.

从数学理论上来说，小波来源于调和分析；小波的发展又促进了调和分析的进一步发展. 新的学科要有老的知识才有基础，老的知识因为新的内容才有活力. 调和分析的合适的离散和精确化实方法是调和分析快速发展及在其他学科得到广泛应用的主要原因之一. 本书力图在新老学科之间架起一座

析，着重阐述小波如何适应了这一特征. 可以说调和分析和小波均是由天才们创立的学科. 1822 年 Fourier 发表了他的名著《热的解析理论》，自此我们有了 Fourier 级数、Fourier 积分等概念，总之有了调和分析. 在数学中调和分析一直充满活力地向前发展，对数学以及其他学科产生了越来越大的影响；特别是近 30 年来小波分析的突飞猛进的发展吸引了不同学科的人对它的注意. 这使得向理工类各学科高年级的本科生以及研究生介绍这方面的知识成为必要. 本教材试图讲述调和分析怎样为小波提供理论依据，小波反过来怎样促进调和分析的发展，小波为什么会成为数学发展最快的学科，也即众多科学领域发展最快的学科之一. 我们将调和分析和小波串起来讲，从小波的理论原理出发来简单明了地讲述一些入门知识. 本教材的讲义已经很多次在给高年级本科生和低年级研究生开的课程中讲授过了.

提到调和分析和小波，这里简单介绍一下 Fourier 和 Meyer 的一些情况.

Fourier 不是一位职业数学家，但物理学家 James Clark Maxwell 称赞 Fourier 分析是一部伟大的史诗. Fourier 全名是 Jean Baptiste Joseph Fourier，他生于 1768 年法国的 Auxerre 市；9 岁丧父，10 岁丧母；但仍继续上学，并于 1780 年进入 Auxerre 皇家军校学习. 13 岁时，他对数学十分着迷，常研究数学问题到深夜. 法国革命爆发后，他于 1793 年参加 Auxerre 革命委员会，1795 年先后两次被捕；法国革命结束后，他先到巴黎教书，后随 Napoleon 到埃及并成为埃及研究院长期负责人，写有一本关于埃及的书. 1802 年他回到法国，Napoleon 任命他为巴黎警察局高级官员长达 14 年；因行政工作出色，在政界享有很高威望. 但这并没有使他放弃研究数学的兴趣，早在 1807 年他就开始研究 Fourier 分析的核心内容，1817 年他被选入法国科学院.

Meyer 生于 1939 年 7 月 19 日，1986 年 11 月 4 日当选法国科学院通信院士，1993 年 11 月 15 日当选院士. 据他的博士生导师巴黎十一大前校长 Jean Pierre Kahane 院士介绍，Meyer 当初拜访他并想做他的博士生时，手里拿着一叠厚厚的论文；看过后，Jean Pierre Kahane 还将这一本书厚的论文推荐到法国数学会的 Asterique 上发表. 后来，Meyer 本想证明我们现在意义下的经典小波并不存在，但出乎意料地找到了许多源于 Littlewood-Paley分析的小波，那是第一次小波被大量发现的时期. 他和 Coifman 教授长期对 Calderón-Zygmund 算子的研究和其他研究者的工作为小波的发展准备了充分的理论基础. 由于在数学理论和应用上的杰出成就，在 2010 年数学家大会上，Meyer 获得了 Gauss 奖.

现在来说说什么是小波. 我们知道，在数学上小波不但革新了函数空间

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的研究，还可以计算矩阵；由于它很好地适应了分布与算子的特征，小波在数学的各个学科得到广泛的应用. 不但学数学的人关注它，许多企业知名人士和科研人员也对它高度重视. 1991 年在我到法国 Meyer 教授名下攻读博士之前，那时在国内大概只有邓东皋教授和中科院的龙瑞麟等在一起讨论邓老师从美国带回来的 Meyer 的一个讲义. 这里顺便提一下，齐民友老师高瞻远瞩地于 1992 年在武汉大学召开了小波方向的国际会议，那可能是我所知道的国内最早的小波会议；20 世纪 90 年代，小波的发展如火如荼.

1910 年就出现了 Haar 小波，但小波这个词是一些做工程应用的科研人员在 20 世纪 80 年代后期命名的. 不过，小波的严格数学基础却与 Meyer 和 Coifman 长期对 Calderon-Zygmund 算子的研究有关；做工程应用的科研人员采用了一些在计算机上很成功的算法，但他们只能每次在计算机上验证以后才知道他们的算法是否成功，在数学上根本无法站住脚，因此他们邀请 Meyer 等数学家合作，希望从数学理论上得到支持，以避免每次在判断数据时不得不在计算机上进行大量复杂的计算. 生活中，石油与我们紧密地联系在一起，在寻找石油时会产生大量的钻探数据，面对大量的石油探测数据，到底哪些数据代表着有石油? 有了从数学上提供的理论基础，问题就明朗化了. 自小波这门学科出现以来，二十多年过去了，国内已有很多大学的很多院系招收小波方向的博士；有关小波的文献呈爆炸性增长，小波的各种新概念不断出现，我也只能有时间读到其中很少的一部分.

但我记得刚到法国时人们问得最多的问题是小波到底是什么. 小波的名字有一大串：Haar 小波，Strömberg 小波，Daubechies 小波，Meyer 小波，Shannon 小波，Morlet 小波，Battle-Lemarié 小波，等等，它们的名字实在太多，这里我无法一一列举. 通常的平移展缩小波按性质不同有正交小波、样条小波、双正交小波、小波框架等；各种非平移展缩小波有Malvar小波、小波包、脊波、曲波等；小波按进制的不同有二进小波、多小波等；我们不但可以考虑欧氏空间上的小波，还可以考虑群上的小波……

小波在数学上有广泛的应用，如在函数空间、算子理论、概率统计、微分方程以及分形等方面都有其应用，在量子力学、非线性问题方面也有其应用. 最近我们还使用小波完全替代了容量的概念.

小波还广泛应用于数值计算中，如地震预报、逼近论、微分方程的数值解等中的应用；在信号处理、图像处理、语音合成、文字识别、密码学、神经网络等方面也用到小波. 在遥感影像方面，李德仁院士用小波建立的数字地球成为 2010 年武大的 10 件大事之一. 我们前面提到的数字水印，还有日常生活中遇到的股票和多媒体，甚至平时离不开的手机都可能涉及小波.

在具体介绍小波之前，本书着重阐述如何离散化所研究的对象，穿插讲述这些离散化与小波之间的关系．我们试图将小波看成一种合理的离散化结构．有人感慨小波发展的黄金时代过去了，然而每年仍有无数的小波方面的文章出现，关于小波的网站也数不清．不过现在小波在理论上回答一些新的离散化现象进展不够，但在纯数学方面，近几十年研究很热的乘子空间、Morrey空间、量子力学等，也在用小波进行很好的研究；在此教材定稿的过程中，就有这方面大量的研究成果．

为什么需要小波？这里简单介绍一下 20 世纪 90 年代前小波的一段发展历史．Fourier 分析的思想和方法不但催生了调和分析及相关数学理论，还一直是数学发展的主要力量之一；不但在数学上应用广泛，在物理和工程学科中应用也相当广泛；还被广泛用于线性规划、大地测量、电话、收音机、X 射线等难以计数的科学计算和仪器中，是基础科学和应用科学研究开发的系统平台．不过，Fourier 变换反映的是全部时间下的整体频域特征，不能提供任何局部时间段上的频率信息；Fourier 分析只有频率的局部性，没有空间位置的局部性，我们不知道瞬间的信息，它甚至不能保持 L^p 范数，这影响了它的应用．这促使 Haar 用后来称为 Haar 小波的基来研究函数，经过 Haar 小波变换后，能保持 L^p 范数，最近的研究成果表明还能保持许多其他函数空间的范数．Haar 于 1910 年发现的这组基成了小波的第一个基，不过 Haar 系缺乏正则性，在 Fourier 变量上的局部化很差，没有引起足够的重视．但是这方面的努力一直在继续．1938 年，Littlewood-Paley 对 Fourier 级数建立了 Littlewood-Paley 分析，即按二进频率成分分组；但这种分组不是在固定的基上．1946 年，Gabor 提出了著名的 Gabor 变换，后又发展成短时 Fourier 变换．1965 年 Calderón 发现了再生公式，它的离散形式已接近小波展开，只是还无法得到正交系的结论．在研究 Hardy 空间的过程中，R. Coifman 和 G. Weiss 创立了原子和分子学说；邓东皋教授说，Coifman 和 Meyer 持续对 Calderón-Zygmund 算子的研究为后来小波的发展奠定了很好的数学理论基础．

1981 年，Strömberg 对 Haar 系进行了改进，使其具备正则性，Strömberg 是构造出正则小波的第一人．1982 年 Battle 在构造量子场论中采用了类似于 Calderón 再生公式的展开形式．J. S. Lienard 和 X. Rodet 在涉及声音信号（语音和音乐）的数值处理中也出现了小波的影子．但小波这个词第一次出现是在 1984 年由地球物理学家 J. Morlet 提出的．J. Morlet 在分析地震数据时提出将地震波按一个确定函数的伸缩平移系展开．随后他与 A. Groossmann 共同研究，发展了连续小波变换的几何体系，由此可以

将一个信号分解成对空间和尺度的贡献. 1985 年, Y. Meyer 和 A. Grossmann 与 I. Daubechies 共同进行研究, 选取连续小波空间的一个连续子集, 得到了一组称为小波框架的离散小波基. 随后人们试图寻找一组离散的正交基, Y. Meyer 试图证明不存在时频域都具有一定正则性的正交小波基; 但是 1986 年他在研究 Littlewood-Paley 分析时却发现了 Fourier 变换具有紧支集的无穷光滑函数, 正交小波第一次成批构造出来. 后来 Lemarié 和 Battle 又分别独立构造了具有指数衰减的小波.

但标志小波成为一个独立的理论的最重要概念之一的是把理论和应用紧密结合起来的多分辨率分析. 1983 年, P. J. Burt 和 E. A. Adelson 在数值计算上提出了一个金字塔算法, 但工程师们只知道在应用上很有效, 不知道从理论上找到有效的原因; Meyer 和 Mallat 的算法做到了这一点, 并且成为后来小波构造的理论基础. Mallat 曾是 Ecole Polytechnique 大学的学生, 当时 Meyer 是该校数学教授; 后来 Mallat 成为 Philadelphia Pennsylvania 大学的博士研究生, 研究计算机视觉. 一次偶然的机会, 年仅 23 岁的他从一个朋友那里得知 Meyer 关于小波分析的思想, 尤其是正交小波基的工作, 并阅读了 Meyer 的论文. 当时 Mallat 认为 Meyer 的方法与他本人的方法有些相似, 并可用于图像处理, 但有些困难需要克服. 1986 年秋, Mallat 多次电话求见正在美国教授小波分析的 Meyer. 后来, Meyer 和 Mallat 在美国芝加哥大学见面, 两人充分交换意见, 共同研究问题难点的关键所在. 在三天时间里, 他们解决了所有问题, 宣告多分辨率分析正式形成. 这一想法不但统一了较长时间的小波基的构造理论, 并且把数学理论与数值应用联系起来.

无限长的小波在应用中相当不方便, 为了克服此困难, Daubechies 院士利用多分辨率发现了紧支集的小波. Daubechies 是比利时人, 从小就想成为一名数学物理学家, 在法国读博士时与 Grossmann 共过事. Daubechies 小波不能用解析公式给出, 是通过迭代方法产生的; 但证明 Daubechies 小波成为正交基运用的方法是利用多分辨率分析导致滤波函数. 另外, 崔锦泰、王建中等对小波框架的研究和在应用中广泛采用的样条小波的发现, 以及 A. Cohen 和Daubechies提出的双正交小波的概念, 均大大地推进了小波理论的发展.

20 世纪 80 年代后期和 90 年代, 小波的各种概念如雨后春笋般地冒出来, 小波分析是泛函分析、调和分析、时频分析、数值分析、逼近论和广义函数等完美结合的产物. 各种不同问题的需要, 使得尺度函数、镜像滤波器要求具有各种特殊的性质; 通常小波具有各向同性而 Donoho 和 Coifman 提

出的脊波和曲波具有各向异性．这些催生了各种不同类型算法．从小波的理论、算法和历史可以看到小波的发展是实际需要催生的．离散的方法涉及数学和应用的本质，几乎各学科都使用，小波独特的离散观点（消失矩、正则性、局部性等）提供的自由度为我们处理各种理论和应用的对象提供了许多选择．粗略地说，小波的局部性可以让我们局部地研究对象；小波的消失矩性质可以让我们探测光滑性和奇异程度；小波的正则性则保证我们能从经过小波处理的数据回到原有的正则性．数据获取，预处理，特征提出和分类，小波的这些工作就像是翻译函数各种性质的字典．随着问题的需要，还会有新的各种观点出现．小波分析的出现是不同学科、不同领域的交流与学科交叉发展的结果．

小波理论发展之初，最好地针对了 Fourier 变换环形结构特征，很好地解决了许多困扰人们的问题．现实生活中对象的结构各种各样，如果小波的目的旨在提供与研究问题相适应的合理离散框架，那么小波无论在应用上还是在理论上都将取得越来越大的成功．我们了解本科学生所开的所有课程，为了照顾各方面的读者，我们尽可能叙述一些较特殊的情形来避开各种术语；然后在每章最后一节的注释中解释如何过渡到一般情形．在介绍调和分析的过程中我们有意避开了那些抽象的数学术语，尽可能介绍一些看得见的对象．

Texas A&M 大学逼近论中心主任崔锦泰院士认为，小波是一种具有非常丰富的数学内容，且对应用有巨大潜力的多方面实用的工具．本书调和分析方面的选材和内容讲授尽量与小波的方法进行比较来说明小波的方法与以前方法的不同和优越性，由此来阐述小波的发展方向．调和分析经历了两百多年的发展，小波是最近二三十年发展最快的学科，本书只选取其中部分内容，依据课程的进度来进行介绍；学习数学也许只需要老师讲一点轮廓性的东西，对它有一点基本印象，以后可以自己按照所研究方向有针对性地自学．这些内容主要是：

第一部分为实分析、调和分析和分布理论的基础知识，包括前三章．第二部分为小波及其应用，这为后三章．

第一章介绍实分析的基本内容，即连续函数空间与 Lebesgue 空间，Young 不等式，Hölder 不等式，Minkowski 不等式，函数的卷积与光滑逼近等．它们是小波理论的必备理论基础，读者可以类比多分辨率分析和光滑逼近之间的关系，从而更好地理解小波的本质和将来的发展趋势．

第二章介绍调和分析的基础，即 Fourier 分析和调和函数边值．它们包括 Fourier 变换的逆定理，乘法公式，Parseval 等式，酉算子；调和函数的

平均值性质与调和函数的关系，极值原理；调和函数的边值与 Poisson 积分的关系.

第三章介绍 20 世纪 50 年代由 Schwartz 建立的被称为现代分析基石的内容，即实验函数空间及其基本性质，基于对偶的分布理论，分布元素的构成，支集，微分，Fourier 变换；分布的单位逼近和 Littlewood-Paley 分解及通常的有条件基的函数空间的分类.

第四章介绍经典的小波理论，即多分辨率分析，尺度函数和滤波函数，同余与 Cohen 条件，小波基，小波的进一步发展.

第五章介绍其他的小波，即区间上的小波，周期小波，折叠小波；Marlval 小波，钟形函数，投影算子和投影空间上的标准正交基，极性，相容性.

从数学理论的角度来说，小波应用的根本原理都是一致的，因此本书只从全局观点出发选取较典型的几点讲述，安排在第六章，类似的应用大家可以自学. 第六章介绍了小波的应用原理，即金字塔算法，抽样，编码，重构，能观测局部突变性等；讲述了小波在理论上和实际中的几个应用，即 Besov 空间，小波神经网络，水印技术等. 没有像其他小波教材一样详细介绍信号处理和图像处理的技巧，因为这些可从几乎所有小波应用的书中找到.

本书的出版得到了教育部博士点基金资助，也得到武汉大学部分在任和离任校领导的关心，还得到武汉大学出版社及编辑的支持，在此对于他们的关心和付出的辛勤劳动表示诚挚的敬意和感谢.

编　者

2010 年 12 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　连续函数空间与 Lebesgue 空间

本章介绍几个简单的由具体函数构成的拓扑空间 —— 连续函数空间与 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$. 从其他课程我们已经知道了一些拓扑空间，如度量空间、赋范空间、Banach 空间、Hilbert 空间等，这些抽象空间有一种让人难以捉摸的感觉. 其实连续函数空间与 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 就可以构成这些抽象空间的具体特例.

本章的重点是：几个不等式，怎么用"好"函数逼近"差"函数，将通常的 L^p 函数分解成"好"性质的两部分；我们尽量使用二进网格，以便与后面的经典小波的技巧更好地进行比较. Lebesgue 积分里面的函数在一个测度为 0 的集合上函数值不同，但代表同一函数. 一个"差"函数难以捉摸，但"好"函数则不同；我们将用"好"函数来逼近"差"函数，这种逼近的想法在很多学科，理论上或应用上，都是很关键的技巧. 由于大量的应用都是在大于 1 维的情况下，我们一般在高维中表述我们的结果，虽然这样记号会复杂很多，我们觉得读者应该适应高维的记号.

1.1　连续函数空间

在学习微积分时，我们就开始接触连续函数的概念；但连续函数也是一种很奇怪的函数，定义在区间[0,1]上的合理构造的连续函数的像竟然可以充满一个方体. 从理论上来说，这使得我们不得不考虑连续函数的逼近；从应用上，我们也无法计算连续的函数，同样要考虑逼近. 我们最为熟悉的空间莫过于一致连续函数空间 $C(\mathbf{R}^n)$；即使是这样的连续函数，有一些独特的性质却不是我们每个人都了解的. 这里将介绍对连续函数在二进方体上的阶梯函数逼近和一阶多项式函数逼近. 我们之所以挑选这两种逼近，是因为后面学习小波时会发现前者与 Haar 小波密切相关，后者与一阶样条小波密切相关. 对于任意的集合 S，我们约定 $\chi_S(x)$ 为集合 S 上的特征函数. 一致连续函数空间是如下定义的：

定义1.1 称 $f(x)\in C(\mathbf{R}^n)$，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $\forall\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<\delta$ 有
$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leqslant\varepsilon.$$

在应用研究中，我们不能表示一个连续取样的函数，需要对函数进行抽样逼近；在理论上，为了便于研究，我们也常常考虑用一些特殊的函数来逼近所研究的对象. 应用上最常用的是样条逼近，这里将介绍 0 阶样条逼近和一阶样条逼近. 由于经典小波是二进小波，二进方体在现在的函数逼近中有着特别的价值. 虽然本节的结论可以用非二进方体给出，但后面我们表述小波指标集时，为了更好地表述小波的几何结构，有时用到二进方体；为了让读者尽快适应二进方体的记号，我们尽量用二进方体的语言叙述. 二进方体的一个差不多等价的表述是所谓的 Whitney 分解和树等概念. 这涉及很深的数学背景，这里就不介绍了，有兴趣的读者可以从网上搜索到大量这类文章和书籍.

我们称 C 是一个**二进方体**，如果存在 $s\in\mathbf{Z}$ 和 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in\mathbf{Z}^n$ 使得
$$C=I_{s,\boldsymbol{p}}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\ \forall i\in\{1,2,\cdots,n\},\text{有}\\ 2^{-s}p_i\leqslant x_i\leqslant 2^{-s}(1+p_i)\};$$
令 Ξ 为所有二进方体组成的集合. 对于方体 $I_{s,\boldsymbol{p}}$，其上的 2^n 个端点 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ 可以表示为
$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}=2^{-s}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\epsilon}),$$
其中 $\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^n$. $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，我们约定 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个分量为 1、其余分量为 0 的单位向量.

对于任意二进方体 $C=I_{s,\boldsymbol{p}}$，我们先给出表示线段、表面等集合的一些符号，以便在其上定义线性逼近函数. 对于 $i_1\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall j\neq i_1$，$x_j\in\{2^{-s}p_j,2^{-s}(1+p_j)\}$，$\forall\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^{n-1}$，连接
$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},2^{-s}p_{i_1},x_{1+i_1},\cdots,x_n)$$
和 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}$ 的线段可记为
$$F_{i_1}^{\boldsymbol{\epsilon}}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},y_1,x_{1+i_1},\cdots,x_n):\\ 2^{-s}p_{i_1}\leqslant y_1\leqslant 2^{-s}(1+p_{i_1})\}.$$
$\forall i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,n\}$，$i_1<i_2$，$\forall j\neq i_1$，$j\neq i_2$，$x_j\in\{2^{-s}p_j,2^{-s}(1+p_j)\}$，$\forall\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^{n-2}$，记连接 2^2 个端点
$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},2^{-s}p_{i_1},x_{1+i_1},\cdots,x_{-1+i_2},2^{-s}p_{i_2},x_{1+i_2},\cdots,x_n),$$
$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2}$ 和 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\epsilon}}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2}$ 的面为

$$F^{\epsilon}_{i_1,i_2}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{-1+i_1},y_1,x_{1+i_1},\cdots,x_{-1+i_2},y_2,x_{1+i_2},\cdots,x_n):$$
$$2^{-s}p_{i_1}\leqslant y_1\leqslant 2^{-s}(1+p_{i_1}),\ 2^{-s}p_{i_2}\leqslant y_2\leqslant 2^{-s}(1+p_{i_2})\}.$$

依此类推，$\forall\, i_1<i_2<i_3$，$\boldsymbol{\epsilon}\in\{0,1\}^{n-3}$，定义连接 2^3 个端点的体为 $F^{\epsilon}_{i_1,i_2,i_3}$，直到 $F^{\epsilon}_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}$. 连接所有 2^n 个端点的体 C 也记为

$$I_{s,p}=F^{\epsilon}_{1,2,\cdots,n}=F_{1,2,\cdots,n}.$$

给定两点 $\boldsymbol{x}_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots,x_{1,n})$ 和 $\boldsymbol{x}_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots,x_{2,n})$，连接这两点的线段上的点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{y}_1=\theta(\boldsymbol{x}_{2,1}-\boldsymbol{x}_{1,1})+\boldsymbol{x}_{1,1},\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n=\theta(\boldsymbol{x}_{2,n}-\boldsymbol{x}_{1,n})+\boldsymbol{x}_{1,n},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1;$$

用向量表示就是

$$\boldsymbol{y}=\theta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{x}_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

给定 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的函数值 $f(\boldsymbol{x}_1)$ 和 $f(\boldsymbol{x}_2)$，连接这两点的线性函数为

$$g(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}_1)+\theta(f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1)),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

对于一致连续函数，我们有下面的阶梯函数逼近和一阶样条函数逼近定理：

定理 1.1　*任意给定的 $f(\boldsymbol{x})\in C(\mathbf{R}^n)$，那么 $\forall\varepsilon>0$，存在某个正数 δ，我们有：*

（ⅰ）存在一列互不相交的测度等价于 δ 的二进方体 C_i 和数列 f_i 使得 $\left|f(\boldsymbol{x})-\sum\limits_i f_i\chi_{C_i}(\boldsymbol{x})\right|<\varepsilon$；

（ⅱ）存在一列互不相交的测度等价于 δ 的二进方体 C_i 和分片光滑的线性函数 $\tau_{C_i}(\boldsymbol{x})$ 使得 $\left|f(\boldsymbol{x})-\sum\limits_i\tau_{C_i}(\boldsymbol{x})\right|<\varepsilon$.

证明思想　该定理（ⅰ）的证明先由一致连续性将 $\mathbf{R}^n$ 分成边长相等的二进方体的并，然后由方体中心的一个点的值代替在方体上的值来逼近. 该定理（ⅱ）的证明先由一致连续性将 $\mathbf{R}^n$ 分成边长相等的二进方体的并，然后由方体的 2^n 个顶点的值来构造分片光滑的线性函数，以此代替在方体上的值来逼近. 实际上在我们学习样条小波时，这分别类似于 0 阶样条逼近和一阶样条逼近.

证　（ⅰ）由一致连续性知，$\forall\varepsilon>0$，存在整数 N，使得 $\forall\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\delta=\sqrt{n}\,2^{1-N}$，有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leqslant\varepsilon$. 我们以原点为某一方体顶点，以 2^{-N} 为边长等分整个 $\mathbf{R}^n$，所得二进方体为 C_i，记方体中心为 $\boldsymbol{x}_i$；令 $f_i=f(\boldsymbol{x}_i)$. 很显然，$\forall\,\boldsymbol{x}\in C_i$，有 $|f(\boldsymbol{x})-f_i|\leqslant\varepsilon$. 这样结论（ⅰ）得证.

（ⅱ）由一致连续性知，$\forall\varepsilon>0$，存在整数 N，使得 $\forall\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\delta=\sqrt{n}\,2^{1-N}$，有

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leqslant\frac{\varepsilon}{2n}.$$

我们以原点为某一方体顶点，以 2^{-N} 为边长等分整个 $\mathbf{R}^n$，所得二进方体为 C_i. 下面我们在二进方体 C_i 上构造一阶样条逼近.

实际上，对于任意方体 $C=I_{s,\boldsymbol{p}}$ 和给定在此方体上的 2^n 个端点 $\boldsymbol{x}_\epsilon$ 的值 $f(\boldsymbol{x}_\epsilon)(\epsilon\in\{0,1\}^n)$，可以构造整个方体上的线性函数，且此线性函数的值与端点的函数值之差很好控制. 先根据端点的值用线性函数定义在线段 $F_{i_1}^\epsilon$ $(i_1\in\{1,2,\cdots,n\})$ 上的值；对于 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_\epsilon+\theta 2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$，定义

$$g_{i_1}^\epsilon(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}_\epsilon)+\theta(f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)),$$

于是

$$\begin{aligned}|g_{i_1}^\epsilon(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|&\leqslant|f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\\&\leqslant\max|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})|.\end{aligned}$$

然后对于面 $F_{i_1,i_2}^\epsilon(\epsilon\in\{0,1\}^{n-1})$ 定义其中心 $\boldsymbol{x}_{i_1,i_2}^\epsilon=\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-1-s}(\boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2})$ 的值为端点值的平均值：

$$\begin{aligned}g_{i_1,i_2}^\epsilon(\boldsymbol{x}_{i_1,i_2}^\epsilon)=\frac{1}{4}(&f(\boldsymbol{x}_\epsilon)+f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1})+f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2})\\&+f(\boldsymbol{x}_\epsilon+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_1}+2^{-s}\boldsymbol{e}_{i_2})),\end{aligned}$$

利用中心的值和边界的值用线性函数定义面 F_{i_1,i_2}^ϵ 的值 $g_{i_1,i_2}^\epsilon(\boldsymbol{y})$ $(\epsilon\in\{0,1\}^{n-1})$，于是

$$|g_{i_1,i_2}^\epsilon(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\leqslant 3\max|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})|.$$

依此类推，直到给出在整个二进方体C上的值. 记此函数为$\tau_C(\boldsymbol{x})$，由上面的构造有

$$|\tau_C(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\leqslant(2n-1)\max|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})|.$$

很显然，$\forall\,\boldsymbol{x}\in C_i$，我们有

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x})-\tau_{C_i}(\boldsymbol{x})|&\leqslant|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|+|f(\boldsymbol{x}_\epsilon)-\tau_{C_i}(\boldsymbol{x})|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2n}+(2n-1)\max|f(\boldsymbol{x}_{\epsilon'})-f(\boldsymbol{x}_\epsilon)|\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

这样结论(ⅱ)得证. ∎

1.2 Lebesgue 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(0<p\leqslant\infty)$

古典微积分与近代实分析的区别之一在于，前者研究函数，着重于单个函数本身的结构，而后者则更进一步，把函数看成“空间”的一个元素加以考

察. 由函数的可积性定义的函数空间是实分析的最重要的研究对象，在一个测度为 0 的集合上取值不同不影响函数的可积性. 这是因为定义 Riemann 积分时所取的分割是在定义域上做的，而定义 Lebesgue 积分的分割是在值域上取的. 在各种各样的积分理论中，Lebesgue 积分理论是最成功的一种. 因此，用 Lebesgue 积分直接定义的空间 L^p，便成为实分析研究的第一类最重要而又最基本的函数空间.

对于可测函数 $f(x)$，我们定义 **Lebesgue 空间** $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(0<p\leqslant\infty)$ 如下：

定义 1.2　设 $0<p\leqslant\infty$，令

$$L^p(\mathbf{R}^n)=\left\{\text{可测函数 } f(x):\ \|f(x)\|_p=\left(\int|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},\quad 0<p<\infty;$$

$$L^\infty(\mathbf{R}^n)=\{\text{可测函数 } f(x):\ \|f(x)\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}|f(x)|=\inf\{a\geqslant 0:\ \{x:\ |f|>a\}\text{ 是零测集}\}<\infty\}.$$

我们一般不区分记号 $\|f(x)\|_p$ 和 $\|f(x)\|_{L^p}$. 本节的任务是证明 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式，它们是整个 L^p 理论的基础，而且也是实分析中最常用的不等式. 其中 Hölder 不等式的证明依赖于 Young 不等式.

首先我们介绍 Young 不等式，它可以利用微分求极值点的方法来证明，在这里我们通过左连续函数围成的面积大小来证明它. 一个实轴上的函数 $g(x)$ 左连续是指从左边趋向于某点时其极限存在且等于在该点的函数值，即

$$\lim_{x<x_0,\ x\to x_0}g(x)=g(x_0).$$

设 $\varphi(t)$ 是 $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$ 到 $\overline{\mathbf{R}}_+=[0,\infty)$ 的左连续增(即不减) 函数，则可以定义 $\varphi(t)$ 的左连续逆函数 $\psi(s)$ 为

$$\psi(s)=\inf\{t:\ \varphi(t)\geqslant s\}.$$

令上述两函数与坐标轴之间围成的区域的面积函数分别为

$$\Phi(u)=\int_0^u\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

$$\Psi(v)=\int_0^v\psi(s)\mathrm{d}s.$$

具体见图 1-1.

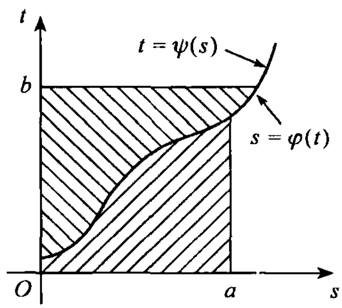

图 1-1

在上述假设下，我们有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com