经纶学典

总主编◎李朝东

经纶图书

修订版

教材解析

JIAOCAIJIEXI

高中数学

选修 2–1

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：周昌良　王友东

人教A版

高中数学

选修 2-1

读者出版集团
DPGC.,L
甘肃少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

教材解析:人教版.高中数学.2－1:选修/李朝东总主编.
--兰州:甘肃少年儿童出版社,2011.9

ISBN 978-7-5422-3009-6

Ⅰ.①教… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 173802 号

责任编辑:伏文东

封面设计:杭永鸿

教材解析·高中数学

选修 2－1　人教 A 版

李朝东　总主编

甘肃少年儿童出版社出版发行

(730030　兰州市读者大道 568 号)

0931-8773255

江苏徐州新华印刷厂

开本 880 毫米×1230 毫米　1/16　印张 12　字数 240 千

2011 年 9 月第 1 版　　2011 年 9 月第 1 次印刷

印数:1～5 000

ISBN 978-7-5422-3009-6　　定价:24.00 元

前言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编者

QIANYAN

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

<table>
<tr><td rowspan="4">读者简介</td><td>姓　名</td><td></td><td>性　别</td><td></td><td>出生年月</td><td></td></tr>
<tr><td>所在学校</td><td colspan="2"></td><td>通讯地址</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">联系方式</td><td colspan="3">(H)：</td><td colspan="2">(O)：</td></tr>
<tr><td colspan="3">手机：</td><td colspan="2">E－mail：</td></tr>
<tr><td colspan="2">本书情况</td><td>学科</td><td>版本</td><td></td><td>年级</td><td></td></tr>
</table>

您对本书栏目的评价：	您对本书体例形式的评价：	您的购买行为：
1. 教材梳理： 全面□ 一般□ 不全面□ 2. 教材拓展： 难□ 合理□ 易□ 3. 典型题解： 全面□ 不全面□ 4. 针对性练习： 难□ 合理□ 易□ 5. 拓展阅读： 需要□ 不需要□ 6. 五年高考回放： 需要□ 不需要□	1. 栏目设置： 过多□ 适中□ 过 少□ 2. 题空： 过大□ 正好□ 过 小□ 3. 版式： 美观□ 一般□ 不美观□ 4. 封面： 美观□ 一般□ 不美观□	1. 您购买本书的途径： 广 告□ 教师推荐□ 家长购买□ 学校统一购买□ 自己购买□ 同学推荐□ 2. 您购买本书的主要原因（可多选）： 广告宣传□ 包装形式□ 内 容□ 图书价格□ 封面设计□ 书 名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www.jing-lun.cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所（南京市租用16－02#信箱）　　邮编：210016

目录

MULU

第一章 常用逻辑用语

第二章 圆锥曲线与方程

目录

MULU

第三章　空间向量与立体几何

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

A 教材梳理

知识点一　命题

1. 命题的定义

一般地，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题.

注意：理解此概念的关键：

(1)并不是任何陈述句都是命题，只有能判断真假的陈述句才是命题. 例如："这是一棵大树."就不是命题.

(2)一般来说，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.

(3)科学猜想也是命题. 因为随着科学技术的发展与时间的推移，总能确定它的真假. 例如："在2020年前，将有人类登上火星."等.

2. 真命题与假命题

判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题. 一个命题要么是真命题，要么是假命题.

注意：要判断一个命题是真命题，需进行论证，而要判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

3. 命题的表示

一个命题，一般可以用一个小写英文字母表示. 如：$p,q,r,\cdots$.

4. 命题的形式

命题的一般形式为："若p，则q". 也可写成"如果p，那么q""只要p，就有q"等形式. 我们把这种形式命题中的p叫做命题的条件，q叫做命题的结论.

注意：命题的形式一般为"若p，则q"，但也有些命题不是这种标准形式，我们可以通过分析命题的条件和结论，将命题改写为"若p，则q"的形式.

知识点二　四种命题

1. 互逆命题

(1)定义：对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题叫做原命题，另一个叫做原命题的逆命题.

(2)形式：如果原命题为"若p，则q"，那么它的逆命题为"若q，则p".

(3)特点：将一个已知命题的条件和结论互换，就可以得到一个新的命题，它就是已知命题的逆命题.

2. 互否命题

(1)定义：对于两个命题，如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题叫做互否命题. 如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的否命题.

(2)形式：如果原命题为"若p，则q"，那么它的否命题为"若$\neg p$，则$\neg q$".

(3)对"$\neg p$"，"$\neg q$"的说明：条件p的否定和结论q的否定分别记作"$\neg p$"和"$\neg q$"，读作"非p"和"非q".

3. 互为逆否命题

(1)定义：对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们把这样的两个命题叫做互为逆否命题. 如果把其中一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的逆否命题.

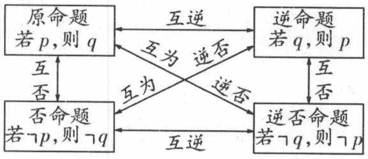
(2)形式：如果原命题为"若p，则q"，那么它的逆否命题为"若$\neg q$，则$\neg p$".

知识点三　四种命题间的相互关系

1. 四种命题之间关系的叙述

把命题称为逆命题、否命题、逆否命题都是以原命题为基础. 当然，我们也可以把任何一个命题看作原命题. 例如：如果我们把"若$\neg p$，则$\neg q$"看成是原命题，那么它的逆命题为"若$\neg q$，则$\neg p$"；否命题为"若p，则q"，逆否命题为"若q，则p".

2. 四种命题形式的关系图



3. 四种命题的真假关系

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

由于逆命题和否命题也是互为逆否命题,因此四种命题之间的真假性关系如下:

(1)若两个命题互为逆否命题,则它们有相同的真假性.

(2)若两个命题为互逆命题或互否命题,则它们的真假性没有关系.

B 教材拓展

拓展点一　命题的逆否证法

因为命题与它的逆否命题的真假性相同,所以我们可以利用这一点,通过证明命题的逆否命题正确来肯定命题. 这种证明方法叫做逆否证法,它也是一种间接的证明方法.

拓展点二　反证法与逆否证法的区别与联系

1. 反证法是利用命题与它的否定形式的真假不同,通过否定命题的否定形式,从而对命题作出肯定判断.

2. 逆否证法是利用原命题与它的逆否命题真假相同,通过证明它的逆否命题这种间接形式来对原命题作出肯定.

3. 逆否证法的原理,即原命题与它的逆否命题真假相同这一点,可以应用反证法进行说明.

拓展点三　反证法

1. 反证法的思维程序:如下图所示.

2. 反证法比较适合的题型:①命题简单明了,没有更多公理概念等依据可供论证的命题;②结论本身是以否定形式出现的一类命题;③有关结论是以"至多……"或"至少……"的形式出现的一类命题;④关于唯一性、存在性的命题;⑤结论的反面比原结论更具体、更容易研究和掌握的一类命题. 以上几种题型比较适合于用反证法证明,但并不一定要用反证法证明,也并非其他题型不能用反证法证明.

3. 反证法的步骤:

(1)假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;

(2)从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾;

(3)由矛盾判定假设不成立,从而肯定命题的结论成立.

C 典型题解

▶问题一　命题的概念与判断

例题 1　判断下列语句哪些是命题,是真命题还是假命题:

(1)空集是任何集合的子集;

(2)若整数 a 是质数,则 a 是奇数;

(3)指数函数是增函数吗?

(4)若平面上两条直线不相交,则这两条直线平行;

(5)$\sqrt{(-2)^2}=-2$;

(6)$x>15$.

[解析]　判断一个语句是不是命题,就是要看它能不能判断真假.

[答案]　解:(3)是疑问句,没有对指数函数是否是增函数作出判断,所以不是命题.

(6)虽是陈述句,但不能判断真假,所以也不是命题.

(1)(4)是真命题,(2)(5)是假命题.

[点评]　判定命题及其真假,一定要紧扣定义.(1)一个命题,要么真,要么假,二者只居其一.(2)一般来说,疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.

例题 2　把下列命题改写成"若 p,则 q"的形式,并判断命题的真假:

(1)当 $abc=0$ 时,$a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$;

(2)当 $m>\frac{1}{4}$时,$mx^2-x+1=0$ 无实数根;

(3)$ac>bc\Rightarrow a>b$;

(4)已知 x、y 为正整数,当 $y=x+1$ 时,$y=3$,$x=2$;

[解析]　找准命题的条件和结论是解决这类题目的关键.

[答案]　解:(1)若 $abc=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$,真命题.

(2)若 $m>\frac{1}{4}$,则 $mx^2-x+1=0$ 无实数根,真命题.

(3)若 $ac>bc$,则 $a>b$,假命题.

(4)已知x、y为正整数，若$y=x+1$，则$y=3$且$x=2$，假命题.

[点评] 解决此类题目，首先要分清命题的条件和结论，尤其是(4)中大前提不能作为条件来处理.

例题 3 设有两个命题：p：$|x|+|x-1|\geqslant m$的解集为$\mathbf{R}$；q：函数$f(x)=-(7-3m)^x$是减函数. 若这两个命题中有且只有一个是真命题，求实数m的取值范围.

[解析] 本题主要考查不等式与命题的真假以及分类讨论的思想.

[答案] 解：若命题p为真命题，则根据绝对值的几何意义可知$m\leqslant1$；若命题q为真命题，则$7-3m>1$，即$m<2$.

$\because$ 命题p和q有且只有一个是真命题分两种情况：①p真q假；②p假q真.

由①，得$\begin{cases}m\leqslant1,\\m\geqslant2,\end{cases}$ $m\in\varnothing$；由②，得$\begin{cases}m>1,\\m<2,\end{cases}$ $\therefore 1<m<2$.

故m的取值范围为$1<m<2$.

[点评] "命题一真一假"是常考题型，应引起重视，其解决方法是讨论①"p真q假"，②"p假q真"，然后求①②两部分的并集.

▶问题二 命题的四种形式

例题 4 判断下列命题的真假，并写出它的逆命题、否命题、逆否命题，同时判断这些命题的真假.

(1)若$a>b$，则$ac^2>bc^2$；

(2)若$a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(3)若圆心到直线的距离等于半径，则该直线是圆的切线；

(4)若四边形的对角互补，则该四边形是圆的内接四边形.

(5)一个等式的两边都乘以同一个数，所得结果仍是等式；

[解析] 弄清四种命题的定义及关系是解决本题的关键.

[答案] (1)$\because$ 当$c=0$时，$ac^2=bc^2$，$\therefore$ 该命题为假命题.

逆命题：若$ac^2>bc^2$，则$a>b$. 为真命题.

否命题：若$a\leqslant b$，则$ac^2\leqslant bc^2$. 为真命题.

逆否命题：若$ac^2\leqslant bc^2$，则$a\leqslant b$. 为假命题.

(2)$\because$ 当$a>0,b<0$时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$\therefore$ 该命题为假命题.

逆命题：若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则$a>b$. 为假命题($b>0,a<0$时不成立).

否命题：若$a\leqslant b$，则$\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$. 为假命题.

逆否命题：若$\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$，则$a\leqslant b$. 为假命题.

(3)该命题为真命题.

逆命题：若直线是圆的切线，则圆心到直线的距离等于半径. 为真命题.

否命题：若圆心到直线的距离不等于半径，则该直线不是圆的切线. 为真命题.

逆否命题：若直线不是圆的切线，则圆心到直线的距离不等于半径. 为真命题.

(4)该命题为真命题.

逆命题：若四边形是圆的内接四边形，则该四边形的对角互补. 为真命题.

否命题：若四边形的对角不互补，则该四边形不是圆的内接四边形. 为真命题.

逆否命题：若四边形不是圆的内接四边形，则该四边形的对角不互补. 为真命题.

(5)该命题为真命题，这是等式的性质.

逆命题：若两个式子都乘以同一个数，所得结果相等，则这两个式子相等. 为假命题(如把x和x^2+1都乘以0后相等，但$x\neq x^2+1$).

否命题：若两个式子不相等，则把它们都乘以同一个数，所得结果也不相等. 为假命题.

逆否命题：若两个式子都乘以同一个数，所得结果不相等，则这两个式子也不相等. 为真命题.

[点评] (1)写出一个命题的逆命题、否命题及逆否命题的关键是分清原命题的条件和结论，然后按定义来写；(2)在判断原命题、逆命题、否命题以及逆否命题的真假时，要借助原命题与逆否命题同真或同假，逆命题与否命题同真或同假来判断.

例题 5 主人邀请张三、李四、王五三人吃饭聊天，时间到了，只有张三，李四准时赴约，王五打电话说："临时有急事，不能来了"，主人听了随口说了句："你看看，该来的没有来"，张三听了，脸色一沉，起来一声不吭地走了，主人愣了片刻，又道了句："哎哟，不该走的又走了". 李四听了大怒，拂袖而去.

请你用逻辑与命题的原理解释二人离去的原因.

[解析] 充分利用命题与逆否命题的等价性来说明原因.

[答案] 解：张三走的原因："该来的没有来"的逆否命题是"来了不该来的"，张三觉得自己是不该来的. 李四走的原因："不该走的又走了"的逆否命题是"该走的没有走"，李四觉得自己是应该走的.

[点评] 这是一个老笑话，是说主人不会说话，不过在这个故事中却蕴含着逻辑思想，通过这样的题目，可以激发同学们

学习数学的兴趣.

▶问题三　命题的逆否证法与反证法

例题 6　证明:若 $p^2+q^2=2$,则 $p+q\leqslant 2$.

[解析]　将"若 $p^2+q^2=2$,则 $p+q\leqslant 2$"视为原命题,要证明原命题为真命题,可以考虑证明它的逆否命题:"若 $p+q>2$,则 $p^2+q^2\neq 2$"为真命题.从而达到证明原命题为真命题的目的.

[答案]　证明:该命题的逆否命题为:若 $p+q>2$,则 $p^2+q^2\neq 2$.

由 $p^2+q^2=\frac{1}{2}[(p+q)^2+(p-q)^2]\geqslant\frac{1}{2}(p+q)^2$,

又$\because p+q>2$,$\therefore (p+q)^2>4$,$\therefore p^2+q^2>2$.

即 $p+q>2$ 时,$p^2+q^2\neq 2$ 成立.

$\therefore$ 若 $p^2+q^2=2$,则 $p+q\leqslant 2$.

[点评]　逆否证法与反证法不同,逆否证法是利用了命题的等价性,而反证法是通过否定命题的否定形式来肯定命题.

例题 7　已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,a、$b\in\mathbf{R}$,对命题"若 $a+b\geqslant 0$,则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$",

(1)写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2)写出逆否命题,判断其真假,并证明你的结论.

[解析]　本题主要考查四种命题的关系,关键写出其逆命题与逆否命题.(1)用反证法易证;(2)根据原命题与逆否命题的等价性,运用函数单调性易证.

[答案]　解:(1)逆命题:若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant 0$,为真命题.

假设 $a+b<0$,则 $a<-b$,$b<-a$,

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数,$\therefore f(a)<f(-b)$,$f(b)<f(-a)$,

$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$.这与题设相矛盾,

所以逆命题为真命题.

(2)逆否命题:若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,则 $a+b<0$,为真命题.

$\because$ 原命题与其逆否命题的等价性,$\therefore$ 可证明原命题为真命题.

$\because a+b\geqslant 0$,$\therefore a\geqslant -b$,$b\geqslant -a$.

又$\because f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$,$f(b)\geqslant f(-a)$.

$\therefore f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,即原命题为真命题.

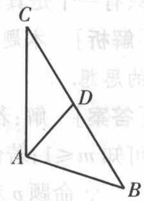
$\therefore$ 逆否命题为真命题.

[点评]　原命题与逆否命题同真假,因此当我们证明或判断原命题感到困难时,可考虑换证它的逆否命题成立.

例题 8　用反证法证明:钝角三角形最大边上的中线小于该边长的一半.

[解析]　本题主要考查运用反证法证明平面几何问题.关键由题意写出已知、求证,再用反证法证明.

[答案]　解:已知:在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC>90°$,D 是 BC 边上的中点,求证:$AD<\frac{1}{2}BC$(如图所示).



假设 $AD\geqslant\frac{1}{2}BC$.

(1)若 $AD=\frac{1}{2}BC$,由平面几何中的定理"若三角形一边上的中线等于该边长的一半,那么这条边所对的角为直角"知,$\angle BAC=90°$,与题设矛盾.

$\therefore AD\neq\frac{1}{2}BC$.

(2)若 $AD>\frac{1}{2}BC$,$\because BC=DC=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 中,$AD>BD$,从而 $\angle B>\angle BAD$;

同理 $\angle C>\angle CAD$.

$\therefore \angle B+\angle C>\angle BAD+\angle CAD$,

即 $\angle B+\angle C>\angle BAC$.

$\because \angle B+\angle C=180°-\angle BAC$,$\therefore 180°-\angle BAC>\angle BAC$.

则 $\angle BAC<90°$,与题设矛盾.

由(1)(2)知,$AD<\frac{1}{2}BC$.

[点评]　正难则反,即若从正面考虑解决不好入手或比较麻烦,可以从命题的反面入手解决.

例题 9　小红、小芳、小新三个同学中有一个帮助生病的小青补好了笔记,当小青问起是谁干的好事时,小红说:"小芳干的."小芳说:"不是我干的."小新说:"也不是我干的."如果知道三个人中有两个人说假话,有一个人说真话,你能判断是谁做的好事吗?

[解析]　可以用反证法的思想解题.

[答案]　解:结论只有三种可能.

(1)若是小红做的,则三个人说的话中有二真一假,不符合题意.

(2)若是小芳做的,则三个人说的话中有二真一假,不符合题意.

(3)若是小新做的,则三个人说的话中有二假一真,符合题意.

所以好事是小新做的.

[点评]　数学源于生活,同时也服务于生活,特别是逻辑推理,在生活中很常见,希望同学们从本题中领悟一些学习数学

的乐趣.

D 针对性练习

[基础题]

1. 下列语句为命题的是 ( )

A. 对角线相等的四边形

B. 同位角相等

C. $x\geqslant 2$

D. $x^2-2x-3<0$

2. 下列命题中,是真命题的是 ( )

A. $\{\varnothing\}$是空集

B. $\{x\in\mathbf{N}\mid |x-1|<3\}$是无限集

C. π是有理数

D. $x^2-5x=0$的根是自然数

3. 命题"若$A\cap B=A$,则$A\subseteq B$"的逆否命题是 ( )

A. 若$A\cup B=A$,则$A\supseteq B$

B. 若$A\cap B\neq A$,则$A\not\subseteq B$

C. 若$A\not\subseteq B$,则$A\cap B\neq A$

D. 若$A\supseteq B$,则$A\cap B\neq A$

4. 若命题p的否命题为r,命题r的逆命题为s,则s是p的逆命题t的 ( )

A. 逆否命题　　B. 逆命题

C. 否命题　　D. 原命题

5. 下列说法中,不正确的是 ( )

A. "若p,则q"与"若q,则p"是互逆的命题

B. "若$\neg p$,则$\neg q$"与"若q,则p"是互否的命题

C. "若$\neg p$,则$\neg q$"与"若p,则q"是互否的命题

D. "若$\neg p$,则$\neg q$"与"若q,则p"是互为逆否的命题

6. 与命题"能被6整除的整数,一定能被3整除"等价的命题是 ( )

A. 能被3整除的整数,一定能被6整除

B. 不能被3整除的整数,一定不能被6整除

C. 不能被6整除的整数,一定不能被3整除

D. 不能被6整除的整数,不一定能被3整除

7. 有下列四个命题:

①"若$xy=1$,则x,y互为倒数"的逆命题;

②"相似三角形的周长相等"的否命题;

③"若$b\leqslant -1$,则方程$x^2-2bx+b^2+b=0$有实根"的逆否命题;

④"若$A\cup B=B$,则$A\supseteq B$"的逆否命题.

其中真命题是 ( )

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ③④

8. 命题"奇函数的图象关于原点对称"的逆否命题是____________.

9. 命题"各位数字之和是3的倍数的正整数可以被9整除",与它的逆命题、否命题及逆否命题中,其中是假命题的是________,真命题是________.

10. 判断命题"若$x+y\leqslant 5$,则$x\leqslant 2$或$y\leqslant 3$"的真假.

[能力提升]

11. 若a、b、c均为实数,且$a=x^2-2y+\dfrac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\dfrac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\dfrac{\pi}{6}$,求证:a、b、c中至少有一个大于0.

12. 给出两个命题:

命题甲:关于x的不等式$x^2+(a-1)x+a^2\leqslant 0$的解集为$\varnothing$;

命题乙:函数$y=(2a^2-a)^x$为增函数.

(1)甲、乙至少有一个是真命题;

(2)甲、乙有且只有一个是真命题;

分别求出符合(1)(2)的实数a的取值范围.

[参考答案]

1. B 解析:A、C、D 均不是命题,A 不是陈述句,C、D 无法判定真假.
2. D 解析:$x^2-5x=0$ 的根为 $x_1=0,x_2=5$,均为自然数.
3. C 解析:由定义知逆否命题是"换位"又"换质".
4. C 解析:设 p 为"若 A,则 B",则 r、s、t 分别为"若$\neg A$,则$\neg B$","若$\neg B$,则$\neg A$","若 B,则 A",故 s 是 t 的否命题.
5. B 解析:由定义知"若$\neg p$,则$\neg q$"与"若 q,则 p"是互为逆否的命题.
6. B 解析:互为逆否的两个命题是等价的.
7. C 解析:①若 x,y 互为倒数,则 $xy=1$,真命题. ②不相似的三角形周长不相等,假命题. ③若方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 无实根,则 $b>-1$. $\because \Delta=4b^2-4(b^2+b)<0$,$\therefore b>0$,$\therefore$ 命题为真命题. ④直接判定. $\because A\cup B=B$,$\therefore A\subseteq B$,$\therefore$ 命题为假命题.
8. 函数图象关于原点不对称的函数不是奇函数
9. 原命题、逆否命题 逆命题、否命题
10. 解:此命题的逆否命题为:若 $x>2$ 且 $y>3$,则 $x+y>5$. 容易判断逆否命题为真,故原命题为真.
11. 证明:(反证法)假设 a、b、c 都不大于 0,即 $a\leqslant0$,$b\leqslant0$,$c\leqslant0$,则 $a+b+c\leqslant0$,而

$$a+b+c=x^2-2y+\frac{\pi}{2}+y^2-2z+\frac{\pi}{3}+z^2-2x+\frac{\pi}{6}$$
$$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3.$$

$\because \pi-3>0$,且$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\geqslant0$,

$\therefore a+b+c>0$.

这与 $a+b+c\leqslant0$ 矛盾,因此 a、b、c 中至少有一个大于 0.

12. 解:甲为真时,$\Delta=(a-1)^2-4a^2<0$,即 $A=\left\{A\,\middle|\,a>\frac{1}{3}\text{或}a<-1\right\}$;

乙为真时,$2a^2-a>1$,即 $B=\left\{a\,\middle|\,a>1\text{ 或 }a<-\frac{1}{2}\right\}$;

(1)甲、乙至少有一个是真命题时,解集为 A、B 的并集,这时 a 的取值范围是$\left\{a\,\middle|\,a>\frac{1}{3}\text{或}a<-\frac{1}{2}\right\}$

(2)甲、乙有且只有一个是真命题时,有两种情况:当甲真乙假时,$\frac{1}{3}<a\leqslant1$;当甲假乙真时,$-1\leqslant a<-\frac{1}{2}$,所以甲、乙中有且只有一个是真命题时,$a$ 的取值范围为$\left\{a\,\middle|\,\frac{1}{3}<a\leqslant1\text{ 或 }-1\leqslant a<-\frac{1}{2}\right\}$

E 课后答案点拨

[练习(第 4 页)]

1. 解:0 是自然数(真命题). 3 小于 2(假命题).

2. 解:(1)是真命题.

(2)是假命题.

(3)是真命题.

(4)是真命题.

3. 解:(1)若三角形为等腰三角形,则两腰的中线相等. 真命题.

(2)若一个函数为偶函数,则它的图象关于 y 轴对称. 真命题.

(3)若两个平面垂直于同一个平面,则这两个平面平行. 假命题.

[练习(第 6 页)]

(1)解:逆命题:"若一个整数能被 5 整除,则这个整数的末位数字是 0",是一个假命题.

否命题:"若一个整数的末位数字不是 0,则这个整数不能被 5 整除",是一个假命题.

逆否命题:"若一个整数不能被 5 整除,则这个整数的末位数字不是 0",是一个真命题.

(2)解:逆命题:"若一个三角形的两个角相等,则这个三角形的两条边相等",是一个真命题.

否命题:"若一个三角形的两条边不相等,则这个三角形的两个角不相等",是一个真命题.

逆否命题:"若一个三角形的两个角不相等,则这个三角形的两条边不相等",是一个真命题.

(3)解:逆命题:"若一个函数的图象关于原点中心对称,则这个函数是奇函数",真命题.

否命题:"若一个函数不是奇函数,则这个函数图象不关于原点中心对称",真命题.

逆否命题:"若一个函数的图象不关于原点中心对称,则这个函数不是奇函数",真命题.

[练习(第 8 页)]

证明:$a^2-b^2+2a-4b-3\neq0$,则 $a-b\neq1$ 的逆否命题是若 $a-b=1$,则 $a^2-b^2+2a-4b-3=0$.

下面我们证明逆否命题是正确的.

$\because a-b=1$,

$\therefore a^2-b^2+2a-4b-3=(a-b)(a+b)+2(a-b)-2b-3=(a-b)(a+b+2)-2b-3=a+b+2-2b-3=a-b-1=1-1=0$.

$\therefore a^2-b^2+2a-4b-3=0.$

故当 $a^2-b^2+2a-4b-3\neq0$ 时，$a-b\neq1.$

[习题1.1(第8页)]

A组

1. 解：(1)是命题.

(2)是命题.

(3)不是命题.

(4)不是命题.

2. (1)解：逆命题："若 $a+b$ 是偶数，则 a、b 都是偶数"，假命题.

否命题："若 a、b 不都是偶数，则 $a+b$ 不是偶数"，假命题.

逆否命题："若 $a+b$ 不是偶数，则 a、b 不都是偶数"，真命题.

(2)解：逆命题："若方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根，则 $m>0$"，假命题.

否命题："若 $m\leq0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根"，假命题.

逆否命题："若方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根，则 $m\leq0$"，真命题.

3. 解：(1)"若一个点在线段的垂直平分线上，则这个点到这条线段两个端点的距离相等"，真命题.

逆命题："若一个点到线段两个端点的距离相等，则这个点在这条线段的垂直平分线上"，真命题.

否命题："若一个点不在线段的垂直平分线上，则这个点到线段两个端点的距离不相等"，真命题.

逆否命题："若一个点到线段两个端点的距离不相等，则这个点不在这条线段的垂直平分线上"，真命题.

(2)"若一个图形是矩形，则它的对角线相等"，真命题.

逆命题："若一个图形的对角线相等，则这个图形是矩形"，假命题.

否命题："若一个图形不是矩形，则它的对角线不相等"，假命题.

逆否命题："若一个图形的对角线不相等，则这个图形一定不是矩形"，真命题.

4. 证明："若一个三角形的两条边不相等，则这两条边所对的角也不相等"的逆否命题是"若一个三角形中两条边所对的角相等，则这两个角所对的边相等".

这一结论显然成立.

故若一个三角形的两条边不相等，则这两条边所对的角也不相等.

B组

证明：因为命题"若两条相交的弦不是圆的直径，则这两条弦不能互相平分"的逆否命题是："若一个圆的两条弦互相平分，则这两条弦是圆的直径".

这个命题显然成立.

故原结论正确.

F 拓展阅读

反 证 法

一、反证法的含义

反证法是指"证明某个命题时，先假设它的结论的否定成立，然后从这个假设出发，根据命题的条件和已知的真命题，经过推理，得出与已知事实(条件、公理、定义、定理、法则、公式等)相矛盾的结果. 这样，就证明了结论的否定不成立，从而间接地肯定了原命题的结论成立."这种证明的方法，叫做反证法.

二、反证法的严密性

数学证明方法可分为直接证法和间接证法，从原命题所给的条件出发，根据已有的公理、定义、法则、公式，通过一系列的推理，一直推到所要证明的命题的结论，这种证法叫做直接证法. 有些命题不易用直接证法证明. 这时可通过证明它的等价命题真，从而断定原命题为真，这种证法叫做间接证法. 反证法就是常见的间接证法的一种.

三、反证法证题的步骤

用反证法证题一般分为三个步骤：

1. 假设命题结论不成立；
2. 从这个结论出发，经过推理论证，得出矛盾；
3. 由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

即提出假设——推出矛盾——肯定结论.

四、反证法的分类

反证法中有归谬法和穷举法两种.

如果原命题的结论的否定只有一种情况，只要把这种情况推翻，就可以肯定原命题结论成立，这种反证法叫做归谬法.

如果原命题的结论的否定不止一种情况，那么就必须把这几种情况一一否定，才能肯定原命题结论成立，这种反证法叫做穷举法.

G 五年高考回放

1 (2009·重庆)命题"若一个数是负数，则它的平方是正数"的逆命题是 ( )

A. “若一个数是负数,则它的平方不是正数”

B. “若一个数的平方是正数,则它是负数”

C. “若一个数不是负数,则它的平方不是正数”

D. “若一个数的平方不是正数,则它不是负数”

[解析] 因为一个命题的逆命题是将原命题的条件与结论进行交换,因此逆命题为“若一个数的平方是正数,则它是负数”.

[答案] B

2 (2009·广东)给定下列四个命题:

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行,那么这两个平面相互平行;

②若一个平面经过另一个平面的垂线,那么这两个平面相互垂直;

③垂直于同一直线的两条直线相互平行;

④若两个平面垂直,那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中,为真命题的是 ( )

A. ①和② B. ②和③

C. ③和④ D. ②和④

[解析] ①假,②真,③假,④真. 故选 D.

[答案] D

3 (2008·山东)给出命题:若函数 $y=f(x)$ 是幂函数,则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中,真命题的个数是 ( )

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

[解析] 易知原命题是真命题,则其逆否命题也是真命题,而逆命题、否命题是假命题. 故它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中,真命题只有一个.

[答案] C

4 (2008·湖南)设有直线 m、n 和平面 α,β,下列四个命题中,正确的是 ( )

A. 若 $m/\!/\alpha$,$n/\!/\alpha$,则 $m/\!/n$

B. 若 $m\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,$m/\!/\beta$,$n/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $\alpha\perp\beta$,$m\subset\alpha$,则 $m\perp\beta$

D. 若 $\alpha\perp\beta$,$m\perp\beta$,$m\not\subset\alpha$,则 $m/\!/\alpha$

[解析] 由立体几何知识,易知 D 正确.

[答案] D

5 (2007·重庆)命题“若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$”的逆否命题是 ( )

A. 若 $x^2\geqslant1$,则 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$

B. 若 $-1<x<1$,则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$,则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$,则 $x^2\geqslant1$

[解析] A 是已知命题的否命题,B 是逆命题,比较 C、D 易知 D 正确.

[答案] D

6 (2007·天津)设 a、b 为两条直线,α、β 为两个平面. 下列四个命题中,正确的命题是 ( )

A. 若 a,b 与 α 所成的角相等,则 $a/\!/b$

B. 若 $a/\!/\alpha$,$b/\!/\beta$,$\alpha/\!/\beta$,则 $a/\!/b$

C. 若 $a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$a/\!/b$,则 $\alpha/\!/\beta$

D. 若 $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,$\alpha\perp\beta$,则 $a\perp b$

[解析] 由立体几何知识,易知 D 正确.

[答案] D

1.2 充分条件与必要条件

A 教材梳理

知识点一 充分条件与必要条件

一般地,“若 p 则 q”为真命题,是指由 p,通过推理可以得出 q,这时,我们就说,由 p 可推出 q,记作 $p\Rightarrow q$. 并且说 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

注意:p 是 q 的充分条件反映了 $p\Rightarrow q$,而 q 是 p 的必要条件也反映了 $p\Rightarrow q$,所以 p 是 q 的充分条件与 q 是 p 的必要条件表述的是同一个逻辑关系,只是说法不同而已. 而 p 是 q 的充分条件只反映 $p\Rightarrow q$,与 q 能否推出 p 没有任何关系.

知识点二 充要条件

1. 充要条件的定义

一般地,如果既有 $p\Rightarrow q$,又有 $q\Rightarrow p$,就记作 $p\Leftrightarrow q$. 此时,我们说,p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.

2. 充要条件的含义

若 p 是 q 的充要条件，则 q 也是 p 的充要条件，虽然本质上是一样的，但在说法上还是不同，因为这两个命题的条件与结论不同.

3. 充要条件的等价说法

p 是 q 的充要条件又常说成是 q 当且仅当 p，或 p 与 q 等价.

B 教材拓展

拓展点一　$p\Rightarrow q$ 的另外几种说法

在逻辑推理中，$p\Rightarrow q$ 还可以表达成以下 5 种说法：

①“若 p，则 q”为真命题；②p 是 q 的充分条件；③q 是 p 的必要条件；④q 的充分条件是 p；⑤p 的必要条件是 q. 这 5 种说法表示的逻辑关系是一样的，只是说法不同而已.

拓展点二　证明 p 是 q 的充要条件时应该注意的问题

证明 p 是 q 的充要条件时，一是要注意既要证明 $p\Rightarrow q$，又要证明 $q\Rightarrow p$，不能忽略任何一个；二是在证明过程中要分清充分性与必要性的条件与结论，不要混淆. 使说法严谨，加强逻辑性.

拓展点三　等价命题的转化与充要条件

因为 p 是 q 的充要条件与 p 和 q 等价是一致的，所以我们可以通过这一结论将我们所要证明的结论或利用的条件进行转化. 例如：p：“二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根”与 q：“二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中判别式 $\Delta>0$”等价. 即我们可以把命题 p 转化为命题 q 来证明. 这就是数学上重要的转化思想.

拓展点四　四种命题的真假与充要条件的关系

如果原命题“若 p，则 q”是真命题，则 p 是 q 的充分条件；如果逆命题“若 q，则 p”是真命题，则 p 是 q 的必要条件，原命题与逆命题都为真，则 p 是 q 的充要条件.

拓展点五　集合关系与条件关系

充分条件、必要条件和充要条件是重要的数学概念，主要用来区分命题的条件 p 与结论 q 之间的下列关系：

1. 从逻辑推理关系上看

(1)若 $p\Rightarrow q$，但 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分而不必要条件；

(2)若 $q\Rightarrow p$，但 $p\nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要而不充分条件；

(3)若 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$(或 $p\Rightarrow q$ 且 $\neg p\Rightarrow\neg q$)，则 p 是 q 的充要条件；

(4)若 $p\nRightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

对充要条件的理解和判断，要搞清楚其定义实质：若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，所谓“充分”，既要使 q 成立，有 p 成立就足够了；若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件，所谓“必要”，即 p 是 q 成立的必不可少的条件，缺之不可！（这一点可以从“$q\Rightarrow p$”与“$\neg p\Rightarrow\neg q$”的等价性得出）

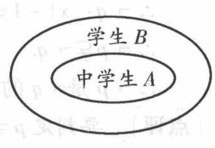
2. 从集合与集合之间关系上看

(1)若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件；

(2)若 $A\supseteq B$，则 A 是 B 的必要条件；

(3)若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件；

(4)若 $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$，则 A 既不是 B 的充分条件，也不是 B 的必要条件.



设 $A=\{x|x\in p\}$，$B=\{x|x\in q\}$，即 x 具有性质 p，则 $x\in A$；若 x 具有性质 q，则 $x\in B$. 如果 $A\subseteq B$，就是说若 $x\in A$，则 $x\in B$，即 x 具有性质 p，则 x 必具有性质 q，即 $p\Rightarrow q$；例如：$A=\{$中学生$\}$，$B=\{$学生$\}$，$A\subseteq B$，即某人是中学生，必是学生，但 $A\nsupseteq B$，即某人是学生，但不一定是中学生，所以“某人是中学生”是“某人是学生”的充分不必要条件. 这样，从集合的角度既加深了我们对充分条件的直观性理解，也可以用 Venn 图（如图）表示.

类似地，$A\supseteq B$ 与 $q\Rightarrow p$ 等价；$A=B$ 与 $p\Leftrightarrow q$ 等价.

C 典型题解

▶问题一　充分、必要条件的判定

例题 1　指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件：

(1)p：整数 a 能被 6 整除，q：整数 a 能被 3 整除；

(2)p：$\triangle ABC$ 有两个角相等，q：$\triangle ABC$ 是等腰三角形；

(3)p：$a^2+b^2>2ab$，q：$|a+b|<|a|+|b|$.

[解析]　解决此类问题，关键是要判定命题“若 p，则 q”和命题“若 q，则 p”的真假.

[答案]　解：(1)$\because p\Rightarrow q$，而 $q\nRightarrow p$，

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.

(2)$\because p\Leftrightarrow q$，$\therefore p$ 是 q 的充要条件.

(3)$\because a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$，$\therefore a\neq b$，而 $|a+b|<|a|+|b|$ 须满足 a 与 b 异号，即 p 与 q 无关，$\therefore p$ 是 q 的既不充分也不必要条件.

例题 2　(1)若 p：两条直线的斜率互为负倒数，q：两条直线互相垂直，则 p 是 q 的什么条件？

(2)若 p：$|3x-4|>2$，q：$\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件？

[解析] 注意一定要判定两个命题的真假,才可以下结论.(2)可以利用集合中子集与推出的关系判定.

[答案] 解:(1)∵ 两条直线的斜率互为负倒数,∴ 两直线垂直.∴ $p\Rightarrow q$. 又∵ 一条直线的斜率不存在,另一条直线的斜率为0,两直线也垂直,∴ $q\nRightarrow p$.

∴ p 是 q 的充分不必要条件.

(2)解不等式 $|3x-4|>2$,得 $p:\left\{x\,\middle|\,x>2\text{ 或 }x<\dfrac{2}{3}\right\}$,

∴ $\neg p:\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

解不等式 $\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$,得 $q:\{x|x>2\text{ 或 }x<-1\}$.

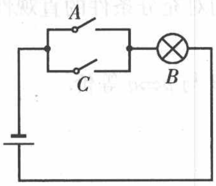
∴ $\neg q:\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

∴ $\neg p\subsetneqq\neg q$.

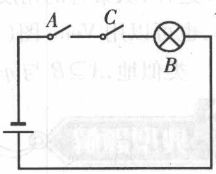
∴ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件.

[点评] 要判定 $p\nRightarrow q$ 可以用举反例的方法,用子集来判定推出关系有时很方便.

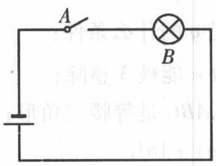
例题 3 在下面的电路图中,闭合开关 A 是灯泡 B 亮的什么条件?



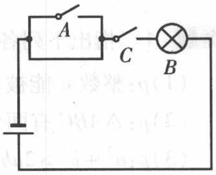
①



②



③



④

[解析] 本题主要考查充分必要条件在物理学中的应用,解题关键是理解充分条件与必要条件的含义.我们把闭合开关 A 称为条件 p,而把灯泡 B 亮称为结论 q 时,结合简单的电学知识,就可以得到正确的解答.

[答案] 解:如图①,闭合开关 A 或闭合开关 C,都可使灯泡 B 亮.反之,若要灯泡 B 亮,不一定非要闭合开关 A.因此,闭合开关 A 是灯泡 B 亮的充分但不必要条件;

如图②,闭合开关 A 而不闭合开关 C,灯泡 B 不亮.反之,若要灯泡 B 亮,开关 A 必须闭合,说明闭合开关 A 是灯泡 B 亮的必要但不充分条件;

如图③,闭合开关 A 可使灯泡 B 亮,而灯泡 B 亮,开关 A 一定是闭合的,因此,开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充要条件;

如图④,闭合开关 A 但不闭合开关 C,灯泡 B 不亮;反之,灯泡 B 亮也不必闭合开关 A,只要闭合开关 C 即可,说明闭合开关 A 是灯泡 B 亮的既不充分也不必要条件.

[点评] "充分"即"有它即可";"必要"即"无它不可".

▶问题二 充分、必要条件的传递性

例题 4 已知 p,q 都是 r 的必要条件,s 是 r 的充分条件,q 是 s 的充分条件,那么:

(1)s 是 q 的什么条件?

(2)r 是 q 的什么条件?

(3)p 是 q 的什么条件?

[解析] 解答此类题目最好根据题目叙述,画出关系简图,进行解答.

[答案] 解:根据题目叙述,画出 p、q、r、s 的结构简图如图所示.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r] & r \arrow[r] \arrow[d] & p \\ & q \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

(1)由图易知,$s\Rightarrow r\Rightarrow q$,且 $q\Rightarrow s$,∴ s 是 q 的充要条件.

(2)∵ $r\Rightarrow q$,$q\Rightarrow s\Rightarrow r$,∴ r 是 q 的充要条件.

(3)∵ $q\Rightarrow s\Rightarrow r\Rightarrow p$,而 $p\nRightarrow q$,∴ p 是 q 的必要不充分条件.

▶问题三 充分、必要条件的求解

例题 5 已知 $p:\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要条件,求实数 m 的取值范围.

[解析] 注意"$\neg p$"可以用补集来表示,"$\neg q$"也一样.

[答案] 解:由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$,得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$,

∴ $\neg q:A=\{x|x>1+m\text{ 或 }x<1-m\}$.

由 $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,得 $-2\leqslant x\leqslant 10$,

∴ $\neg p:B=\{x|x>10\text{ 或 }x<-2\}$.

∵ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要条件,

∴ $A\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}m>0,\\1-m\leqslant -2,\\1+m\geqslant 10,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 9$.

[点评] 在解决这类根据充分、必要条件求解的题目时,特别要注意推出的方向,并充分利用推出与子集的关系.

▶问题四 充要条件与等价思想

例题 6 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边,求证:方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $\angle A=90°$.

[解析] 本题主要考查充要条件的证明方法,关键区分条件与结论,分两个方面加以证明.

[答案] 证明:充分性:∵ $\angle A=90°$,∴ $a^2=b^2+c^2$,于是方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 可化为 $x^2+2ax+a^2-c^2=0$.