工业和信息化普通高等教育
"十二五"规划教材立项项目

21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

信号与系统分析

解培中 周波 编著
邱晓晖 审阅

Signals and Systems Analysis

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

精品系列

工业和信息化普通高等教育
“十二五”规划教材立项项目

21世纪高等院校信息与通信工程规划教材

21st Century University Planned Textbooks of Information and Communication Engineering

信号与系统分析

解培中 周波 编著

邱晓晖 审阅

Signals and Systems Analysis

人民邮电出版社
北京

精品系列

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统分析 / 解培中，周波编著. -- 北京：人民邮电出版社，2011.9
21世纪高等院校信息与通信工程规划教材
ISBN 978-7-115-26076-5

Ⅰ. ①信… Ⅱ. ①解… ②周… Ⅲ. ①信号分析－高等学校－教材②信号系统－系统分析－高等学校－教材
Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第145812号

内容提要

本书共5章，主要内容包括信号与系统的基本概念，信号与系统的时域分析，连续时间信号与系统的频域分析，连续时间系统的复频域分析，离散信号与系统的变换域分析。

本书系统介绍了信号与系统的基本概念、基本理论和基本分析方法，可作为普通高等院校信号与系统相关课程的教材使用，也可供工程技术人员参考。

21世纪高等院校信息与通信工程规划教材

信号与系统分析

◆ 编　　著　解培中　周　波
审　　阅　邱晓晖
责任编辑　蒋　亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.75　　2011年9月第1版
字数：312千字　　2011年9月河北第1次印刷

ISBN 978-7-115-26076-5

定价：27.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　言

我们正处在一个信息化的时代，在日常生活和工作中都离不开信息，需要对各种信息进行获取、存储、传输和处理。信号与系统的理论正是来源于信号传输和信号处理等工程实际问题，经过科学抽象和理论概括而形成的。随着现代科学技术的发展，信号与系统的理论也在不断地得到丰富和完善。

信号的理论包括信号分析、信号处理和信号综合，系统的理论包括系统分析和系统综合。本书只讨论信号与系统的分析，信号与系统分析作为一门技术基础课，在电子信息类专业课程的系统学习中起着承上启下的作用。

本书系统地介绍信号与系统的基本概念、基本理论和基本分析方法。全书共 5 章。第 1 章介绍信号与系统的基本概念，内容包括信号的描述与分类、系统的描述与分类、信号与系统分析概述；第 2 章介绍信号与系统的时域分析，内容包括典型连续时间信号、典型离散时间信号、连续时间信号的基本运算、离散时间信号的基本运算、信号的时域分解、连续系统的冲激响应、离散系统的单位脉冲响应、连续系统的零状态响应、离散系统的零状态响应、系统的全响应；第 3 章介绍连续时间信号与系统的频域分析，内容包括周期信号分解为傅里叶级数、周期信号的频谱、非周期信号的频谱密度函数——傅里叶变换、傅里叶变换的性质及其应用、希尔伯特变换及小波变换简介、取样信号的频谱、连续时间系统的频域分析、信号的无失真传输和理想滤波器；第 4 章介绍连续时间系统的复频域分析，内容包括拉普拉氏变换、拉氏变换的性质、拉氏反变换、连续系统的复频域分析、系统函数、连续系统的模拟；第 5 章介绍离散信号与系统的变换域分析，内容包括 Z 变换、Z 变换的性质、Z 反变换、离散系统的 Z 变换分析、离散系统函数与系统特性、离散系统的模拟。

本书可作为普通高等院校信号与系统相关课程的教材使用，尤其适合应用型本科院校 48 课时信号与系统课程的教材使用。本书具有以下特点：

（1）不要求学生具备电路分析的基础，许多概念的引入脱离电路。

（2）将一般的信号与系统教材中有关电路的部分作为系统的一个例子单独列为一节，作为教学中的可选用内容。

（3）适当加入新技术作为基本概念的应用举例。

（4）按照“适用、实用”原则编写教材。

本书既有一定的知识宽度，但不追求理论的全面和深度，着重体现理论应用性。内容主

线为信号与系统的基本概念、时域分析、频域分析、复频域分析。编排上采用先时域后变换域，先连续信号后离散信号的顺序，符合由浅入深、循序渐进的认知规律。

本书由解培中、周波编著，邱晓晖老师审阅了全书。本书在编写过程中得到南京邮电大学各级领导和同事的帮助与支持，并对本书提出了不少有益的建议，在此表示衷心感谢。

本书虽然经多次讨论并反复修改，但由于时间仓促，书中难免有不妥甚至错误之处，欢迎广大读者提出宝贵意见。

编者

2011 年 8 月

目　录

第1章 信号与系统的基本概念

我们正处在一个信息化的时代，在日常生活和工作中都离不开信息，需要对各种信息进行获取、存储、传输和处理。信号与系统的理论正是来源于信号传输和信号处理等工程实际问题，经过科学抽象和理论概括而形成的。随着现代科学技术的发展，信号与系统的理论也在不断地得到丰富和完善。

信号的理论包括信号分析、信号处理和信号综合，系统的理论包括系统分析和系统综合。本书只讨论信号与系统的分析，信号与系统分析作为一门技术基础课，在电子信息类专业课程的系统学习中起着承上启下的作用。

本章作为学习全书的基础，重点介绍信号与系统的定义、描述、分类及基本特性，简要介绍信号与线性时不变系统分析的基本内容、方法及应用，以便学习者对信号与系统理论的全貌、本质内涵和学习方法有一个大致的了解。

1.1 信号的描述与分类

1.1.1 信号的定义与描述

我们每天都在接触形形色色的信号，如鸣笛声、交通灯、心电图……那么，什么是信号（signal）呢？

严格地说，信号是传递信息的载体，是变化的物理量。在数学上，信号可以表示为一个或多个变量的函数。例如：图 1-1-1 所示为鸟鸣信号的波形，是空气压力随时间而变化的函数 $f(t)$；图 1-1-2 所示为静止的单色图像，是亮度随空间位置而变化的函数 $b(x,y)$；而活动的单色图像是亮度随空间位置和时间而变化的函数 $b(x,y,t)$。

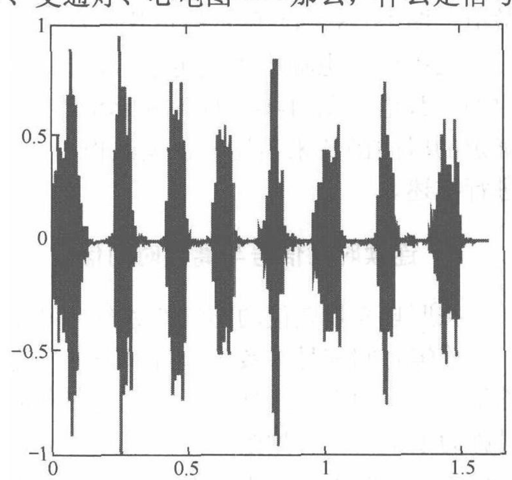

图 1-1-1 鸟鸣信号

常见的信号有声音信号、光信号和电信号，其中电信号的应用最为广泛。在本课程的学习中，一般情况下可以把遇到的信号理解为随时

间变化的电压或电流（也可以是电荷或磁通），由于是随时间而变化的，在数学上常用时间 t 的函数 $f(t)$来表示，因此，“信号”与“函数”这两个名词常常通用。

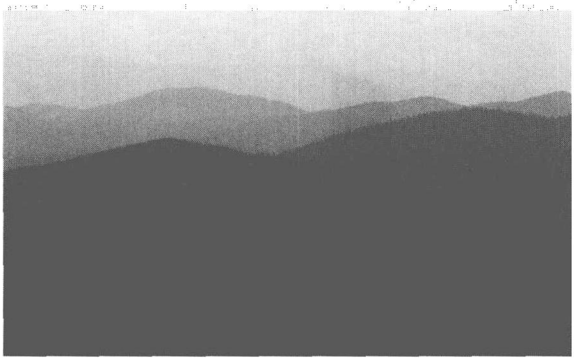

图 1-1-2　静止的单色图像

信号的特性可以从时域和频域两个方面进行描述。

时域特性是指信号的幅度随时间变化的情况，具体表现为出现的起始时刻、持续的时间、变化的快慢、重复的周期等。

从频域分析的角度来看，现实存在的信号都可以看做是由许多不同频率的正弦信号叠加而成的，频域特性就是指构成实际信号的各正弦分量的振幅和初相随频率变化的情况。

信号可以用函数解析式表示，也可以用波形或频谱表示。

1.1.2　信号的分类

可以从不同的角度对信号进行分类。

1．确定信号与随机信号

按照信号幅值的确定性划分，可分为确定信号与随机信号。

确定信号是指能够以确定的时间函数表示的信号，在定义域内的任意时刻都有确定的函数值。图 1-1-3（a）所示的正弦信号就是确定信号的一个例子。

随机信号也称为不确定信号，它不是时间的确定函数，在定义域内的任意时刻没有确定的函数值。图 1-1-3（b）所示混有噪声的正弦信号就是随机信号的一个例子，它无法以确定的时间函数来描述，也无法根据过去的记录准确地预测未来情况，而只能用统计规律进行描述。

2．连续时间信号与离散时间信号

按照自变量取值的连续性划分，可分为连续时间信号与离散时间信号。

连续时间信号在数学上可以表示为连续时间变量 t 的函数 $f(t)$，简称连续信号，其特点是除了若干个间断点之外在任意时刻都有定义。其中幅值可以在一定范围内任意取值的连续信号称为模拟信号，如图 1-1-4（a）所示；幅值只能取分度值的整数倍的连续时间信号称为量化信号，如图 1-1-4（b）所示，例如数字电压表所测得的就是量化信号。

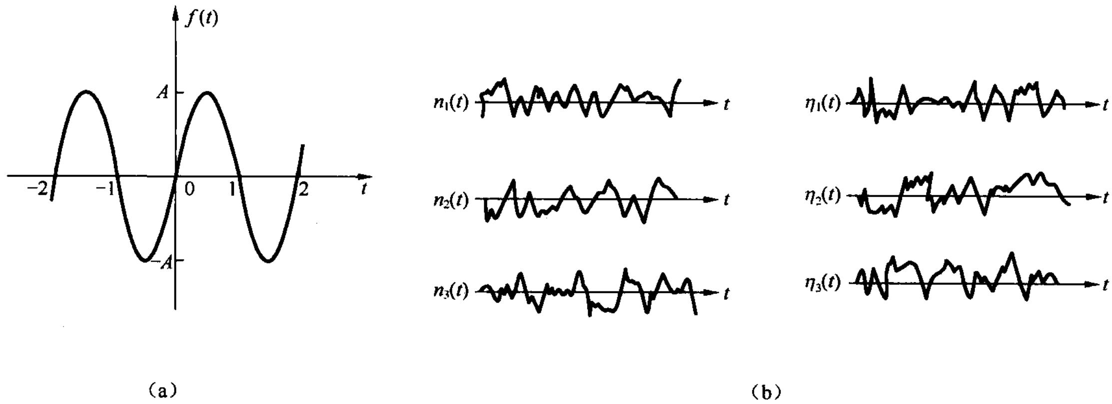

图 1-1-3　确定信号与随机信号的波形

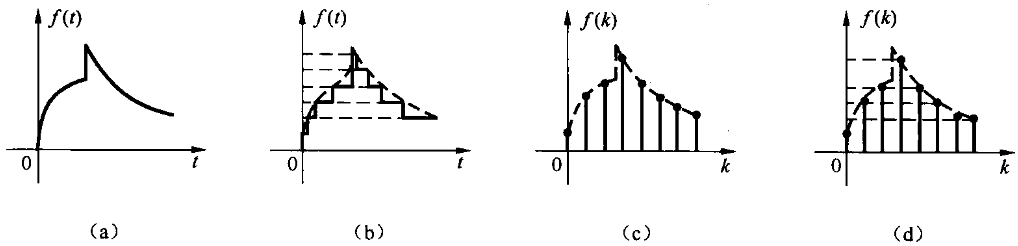

图 1-1-4　连续时间信号与离散时间信号

离散时间信号简称离散信号，它只在离散的时刻上才有定义，是离散时间变量 t_k 的函数，可以看做是对连续信号进行理想抽样的结果。通常抽样的间隔时间 T 是均匀的，即 $T=t_{k+1}-t_k$ 为常量，故可以用 $f(kT)$ 来表示离散时间信号，简写为 $f(k)$，离散变量 k 取整数，可以不限于代表时间。图 1-1-4（c）和图 1-1-4（d）所示均为离散时间信号，其中图 1-1-4（d）所示信号的幅值也是量化的，称为数字信号。

3．周期信号与非周期信号

按照信号的重复性划分，可以分为周期信号与非周期信号。

周期信号定义在（$-\infty$，$+\infty$）区间，且每隔一个固定的时间间隔重复变化。连续周期信号与离散周期信号的数学表示式分别为

$$f(t)=f(t+T_0),\qquad -\infty<t<\infty \tag{1-1-1}$$

$$f(k)=f(k+N),\qquad -\infty<k<\infty，k\text{ 和 }N\text{ 取整数} \tag{1-1-2}$$

满足以上式中的最小正数 T_0、N 称为周期信号的基本周期或基波周期（fundamental perriod）。

非周期信号是不具有重复性的信号。

【例 1-1-1】　判断离散余弦信号 $f(k)=\cos(\Omega_0 k)$ 是否为周期信号。

解　由周期信号的定义，如果 $f(k)=\cos\Omega_0(k+N)=\cos(\Omega_0 k)$，则 $f(k)$ 是周期信号。因为

$$\cos\Omega_0(k+N)=\cos(\Omega_0 k+\Omega_0 N)$$

若为周期信号，应满足

$$\Omega_0 N = m \times 2\pi\text{，}m\text{ 为整数}$$

或
$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} = \text{有理数}$$

因此，只有在 $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ 为有理数时，$f(k) = \cos(\Omega_0 k)$ 才是一个周期信号。

周期分别为 T_1、T_2 的两个周期信号相加，当 T_1、T_2 之间存在最小公倍数 T 时，所得到的信号仍然为周期信号，其周期为 T，即 $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$，其中 n_1 和 n_2 为整数，或者说 n_2/n_1 为有理数；反之，若 n_2/n_1 为无理数，则两个周期信号之和为非周期信号。

【例 1-1-2】 判断下列信号是否为周期信号，如果是周期信号，试计算其周期。

（1）$f_1(t) = 2 + 3\cos\left(\frac{2}{3}t + \theta_1\right) + 5\cos\left(\frac{7}{6}t + \theta_2\right)$

（2）$f_2(t) = 2\cos(2t + \theta_1) + 5\sin(\pi t + \theta_2)$

（3）$f_3(t) = 3\cos(3\sqrt{2}t + \theta_1) + 7\cos(6\sqrt{2}t + \theta_2)$

解 （1）$T_1 = 3\pi$、$T_2 = \frac{12}{7}\pi$，$\frac{T_1}{T_2} = \frac{7}{4}$ 为有理数，故 $f_1(t)$是周期信号，其周期是 T_1、T_2 的最小公倍数 12π。

（2）$T_1 = \pi$、$T_2 = 2$，$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$ 为无理数，故$f_2(t)$不是周期信号。

（3）$T_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$、$T_2 = \frac{2\pi}{6\sqrt{2}}$，$\frac{T_1}{T_2} = 2$ 为有理数，故$f_3(t)$是周期信号，其周期是 T_1、T_2 的最小公倍数$\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$。

4．能量信号与功率信号

按照信号平方的可积性划分，信号可以分为能量信号与功率信号。进行这种划分的目的是为了了解信号的作用效果，比如人的耳朵所能区分的声音强度就是与声音信号幅度的平方成正比的。

如果把信号$f(t)$看做是随时间变化的电压或电流，则它在1Ω的电阻上的瞬时功率为$|f(t)|^2$，定义信号$f(t)$在时间区间（$-\infty$，∞）内消耗的总能量为

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{1-1-3}$$

定义信号的平均功率为

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{1-1-4}$$

若信号的能量为非零的有限值，即 $0<E<\infty$，此时 $P=0$，则该信号为能量有限信号，简称能量信号；

若信号的平均功率为非零的有限值，$0<P<\infty$，此时 $E\to\infty$，则该信号为功率有限信号，

简称功率信号。

一个信号不可能既是能量信号又是功率信号，但可能既不是能量信号也不是功率信号。

【例 1-1-3】　判断下列信号是否为能量信号、功率信号。

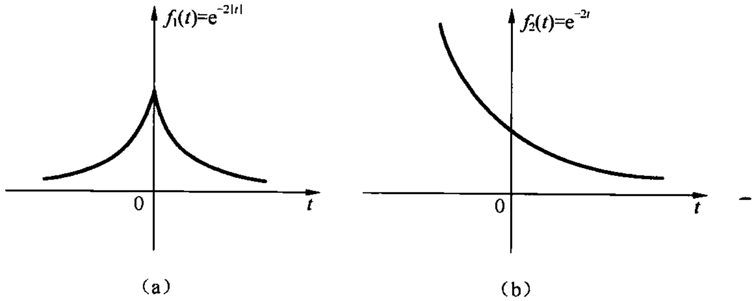

图 1-1-5　例 1-1-3 题图

解　(1)(a) 图信号 $f_1(t)$ 的能量为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(e^{-2|t|})^2\,dt=\int_{-\infty}^{0}e^{4t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-4t}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-4t}\,dt=\frac{1}{2}$$

信号 $f_1(t)$ 的能量是有限值，所以该信号是能量信号。

(2)(b) 图信号 $f_2(t)$ 的能量为

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(e^{-2t})^2\,dt=\lim_{T\to\infty}-\frac{1}{4}\left[e^{-4T}-e^{4T}\right]=\infty$$

其平均功率可由罗必塔法则求得

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{4T}-e^{-4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{4e^{4T}}{8}=\infty$$

信号 $f_2(t)$ 的平均功率为无穷大，所以该信号既非能量信号又非功率信号。

一般来说，直流信号与周期信号都是功率信号。周期信号的平均功率可以在一个周期内计算。

非周期信号则 3 种可能都有：在有限的时间范围内有一定的幅值，而当 $|t|\to\infty$ 时幅值为零的一类属于能量信号，如图 1-1-6 所示，这类信号也称为脉冲信号；当 $|t|\to\infty$ 时幅值不为无穷大，并且至少有一边为有限值的一类属于功率信号，如图 1-1-7 所示；当 $|t|\to\infty$ 时只要有一边幅值为无穷大的一类属于非能量非功率信号，如图 1-1-8 所示。

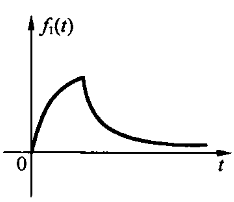

图 1-1-6　非周期能量信号

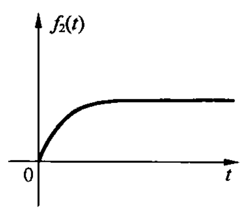

图 1-1-7　非周期功率信号

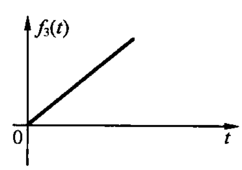

图 1-1-8　非周期非能量非功率信号

对于离散时间信号 $f(k)$，其能量 E 与功率 P 的定义分别为

$$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\left|f(k)\right|^2 \qquad (1\text{-}1\text{-}5)$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\left|f(k)\right|^2 \qquad (1\text{-}1\text{-}6)$$

判别方法与连续信号相同。

【例 1-1-4】 判断离散时间信号 $f(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$, $k\geqslant 0$ 是否为能量信号或功率信号。

解 该信号的能量为

$$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\left|f(k)\right|^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$
$$=\frac{1}{1-0.25}=\frac{4}{3}$$

信号的能量是有限值，所以该信号是能量信号。

1.2 系统的描述与分类

1.2.1 系统的概念

系统是由若干互相关联的单元组成的具有一定功能的有机整体。如通信系统、自动控制系统、计算机网络、机器人、软件等。在各种系统中，电系统更具有代表性，因为大多数的非电系统都可以用电系统来模拟或仿真。

一个大型的系统可以嵌套若干级子系统，如图 1-2-1 所示的通信系统。最基本的子系统称为单元，单元由元件组成。相同的单元或元件按照不同的连接方式可以构成不同的系统，例如，一个电阻和一个电容可以构成一个高通滤波器，也可以构成一个低通滤波器。在本课程的学习中，一般情况下不去关心系统的具体组成，而是把它当做一个整体来对待，只关心它的外部特性，即系统的输入—输出关系。通常也把系统的输入称作激励（施加给系统的作用），输出称作响应（系统做出的反应）。

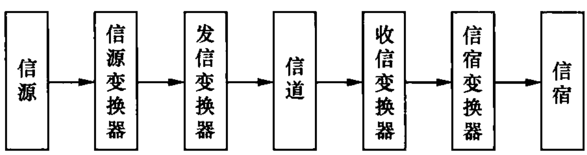

图 1-2-1 通信系统

1.2.2 系统的数学模型

要分析一个系统，首先要建立描述该系统基本特性的数学模型，然后用数学方法进行求解，并对所得结果做出物理解释，赋予物理意义。例如，图 1-2-2 所示电路由电阻、电感串联构成，其激励信号为电压源，响应信号为回路电流，根据元件的伏安特性与基尔霍夫电压

定律（KVL）可建立如下的微分方程

$$Ri_{\mathrm{L}}(t)+L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t}=v_{\mathrm{s}}(t) \tag{1-2-1}$$

这就是该电路系统的数学模型。

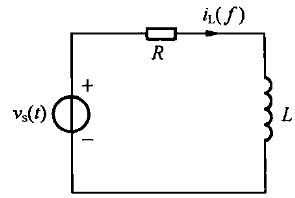

图 1-2-2　RL 电路

通常可以采用输入—输出关系或状态空间法描述系统的数学模型。输入—输出描述法着眼于系统输入与输出之间的关系，适用于单输入、单输出的系统。状态空间描述法除了可以描述输入与输出之间的关系之外，还可以描述系统内部的状态，既可用于单输入、单输出的系统，又可用于多输入、多输出的系统。

系统分析着重于分析系统的输入—输出关系，即外部特性，而不涉及系统的内部组成，因此除了利用数学表达式描述系统模型外，还可以借助方框图表示系统模型。图 1-2-3（a）所示为最常见的单输入—单输出系统，图 1-2-3（b）所表示的是多输入—多输出系统。

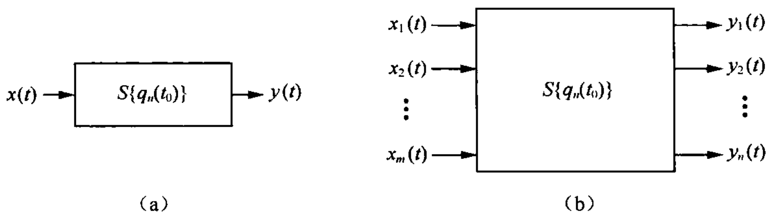

图 1-2-3　系统的方框图

图中 $x(t)$为输入信号，$y(t)$为输出信号，箭头表示信号的流向。方框中的 $q_n(t_0)$为研究的起始时刻（用 t_0 表示，为研究起来方便一般取为 0）系统的一组初始状态，反映了系统内部的初始储能状况，其数目 n 等于描述该系统的微分方程的阶数，也称为系统的阶数。

1.2.3　系统的分类

在信号与系统分析中，常按照系统的数学模型和基本特性，将系统分为连续时间系统与离散时间系统，线性系统与非线性系统，时不变系统与时变系统，因果系统与非因果系统等。

1. 连续时间系统与离散时间系统

我们把输入、输出都是连续时间信号的系统称为连续时间系统；输入、输出都是离散时间信号的系统称为离散时间系统。如图 1-2-2 所示的 RL 电路是连续时间系统，而数字计算机则是离散时间系统。连续时间系统的数学模型是微分方程，离散时间系统的数学模型是差分方程。

需要说明的是，有些出版物以构成系统的主要元器件是否为模拟器件为标准，来划分连续时间系统与离散时间系统，这种分类方法是以系统内部的工作原理为出发点的，而本课程的侧重点在于研究系统的外部特性，根据输入、输出信号的形式划分系统的类型能更清楚地表达这一主题。一般情况下，连续时间系统只能处理连续时间信号，离散时间系统只能处理离散时间信号。但是在加入模数 A/D 转换器或数模 D/A 转换器后，就可以用离散时间系统处理连续时间信号，或用连续时间系统处理离散时间信号。

2．线性系统与非线性系统

线性系统是指具有线性特性的系统，线性特性包括齐次性与叠加性。

齐次性也称比例性，可表述为：若系统的输入增大 k 倍，则输出也随之增大 k 倍，即

若 $$x(t) \to y(t), \quad 则 \quad kx(t) \to ky(t) \tag{1-2-2}$$

叠加性也称可加性，可表述为：当若干个输入信号同时作用于系统时，总的输出等于每个输入信号单独作用时所产生的输出相加，即

若 $$x_1(t) \to y_1(t),\ x_2(t) \to y_2(t), \tag{1-2-3}$$

则 $$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$$

同时满足齐次性与叠加性，即为满足线性特性，可表示为

若 $$x_1(t) \to y_1(t),\ x_2(t) \to y_2(t), \tag{1-2-4}$$

则 $$k_1x_1(t) + k_2x_2(t) \to k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$$

其中 k_1，k_2 为任意常数。系统的线性特性可用图 1-2-4 表示。

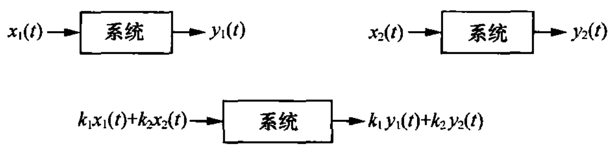

图 1-2-4　系统的线性特性示意图

同样，具有线性特性的离散时间系统可表示为

若 $$x_1(k) \to y_1(k),\ x_2(k) \to y_2(k), \tag{1-2-5}$$

则 $$k_1x_1(k) + k_2x_2(k) \to k_1y_1(k) + k_2y_2(k)$$

线性连续系统的数学模型是线性微分方程，线性离散系统的数学模型是线性差分方程。不具有线性特性的系统称为非线性系统。

工程中许多连续时间系统和离散时间系统都具有初始状态。我们把初始状态为零，仅由外部激励作用引起的响应称为零状态响应，用 $y_{zs}(t)$或 $y_{zs}(k)$表示；外部激励为零，仅由系统内部的初始状态作用引起的响应称为零输入响应，用 $y_{zi}(t)$或 $y_{zi}(k)$表示；外部激励和内部初始状态共同作用引起的响应称为完全响应，简称全响应，用 $y(t)$或 $y(k)$表示。

具有初始状态的线性系统，同时满足下面的 3 个条件：

（1）可分解性：系统的全响应可分解为零输入响应与零状态响应之和；

（2）零状态响应线性：系统的零状态响应必须对所有的输入信号呈现线性特性；

（3）零输入响应线性：系统的零输入响应必须对所有的初始状态呈现线性特性。

否则即为非线性系统。

【例 1-2-1】　已知某零状态系统激励与响应的关系为：$y(t) = 3x(t) + 2$，试判别该系统是否为线性系统。

解　假设 $x_1(t)$单独激励时引起的响应为 $y_1(t)$，$x_2(t)$单独激励时引起的响应为 $y_2(t)$，即

$$y_1(t) = 3x_1(t) + 2, \qquad y_2(t) = 3x_2(t) + 2$$

则当激励

$$x_a(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$$

时，该系统的响应

$$y_a(t)=3x_a(t)+2=3[k_1x_1(t)+k_2x_2(t)]+2$$

而
$$k_1y_1(t)+k_2y_2(t)=k_1[3x_1(t)+2]+k_2[3x_2(t)+2]\neq y_a(t)$$

不满足线性特性，所以该系统为非线性系统。

实际上，该系统可以看做一个具有零位误差的放大器，它既不满足齐次性又不满足叠加性。

【例 1-2-2】 已知系统 $y(t)=3x(t)+2q(0)$，其中 $q(0)$为系统的初始状态，试判别该系统是否为线性系统。

解 （1）系统具有可分解性，其零状态响应和零输入响应分别为

$$y_{zs}(t)=3x(t)，\quad y_{zi}(t)=2q(0)$$

（2）判断其零状态响应是否满足线性，假设 $x_1(t)$单独激励时引起的零状态响应为 $y_{1zs}(t)$，$x_2(t)$单独激励时引起的零状态响应为 $y_{2zs}(t)$，即

$$y_{1zs}(t)=3x_1(t),\qquad y_{2zs}(t)=3x_2(t)$$

则当激励

$$x_a(t)=k_1x_1(t)+k_2x_2(t)$$

时，该系统的零状态响应

$$y_{azs}(t)=3x_a(t)=3[k_1x_1(t)+k_2x_2(t)]$$

而
$$k_1y_{1zs}(t)+k_2y_{2zs}(t)=k_1[3x_1(t)]+k_2[3x_2(t)]=y_{azs}(t)$$

所以，该系统的零状态响应满足线性。

（3）判断其零输入响应是否满足线性，假设初始状态 $q_1(0)$单独作用时引起的零输入响应为 $y_{1zi}(t)$，初始状态 $q_2(0)$单独作用时引起的零输入响应为 $y_{2zi}(t)$，即

$$y_{1zi}(t)=2q_1(0),\qquad y_{2zi}(t)=2q_2(0)$$

则当初始状态

$$q_a(0)=k_1q_1(0)+k_2q_2(0)$$

时，该系统的零输入响应

$$y_{azi}(t)=2q_a(0)=2[k_1q_1(0)+k_2q_2(0)]$$

而
$$k_1y_{1zi}(t)+k_2y_{2zi}(t)=k_1[2q_1(0)]+k_2[2q_2(0)]=y_{azi}(t)$$

所以，该系统的零输入响应满足线性。

该系统同时满足线性系统的 3 个条件，所以是线性系统。

【例 1-2-3】 已知系统的输入输出关系如下，其中 $q(0)$为系统的初始状态，试判别这些系统是否为线性系统，并简单说明理由。

（1） $y(k)=3x(k)+2q(0)x(k)$ （2） $y(k)=3x^2(k)+2q(0)$

（3） $y(k)=kx(k)+q(0)\sin k$

解 （1）不满足可分解性，故系统为非线性系统。

（2）零状态响应 $y_{zs}(k)=3x^2(k)$ 不满足线性，故系统为非线性系统。

（3）满足可分解性，并且零状态响应 $y_{zs}(k)=kx(k)$、零输入响应 $y_{zi}(k)=q(0)\sin k$ 都满足线性，故系统为线性系统。

【例 1-2-4】 已知某线性连续时间系统，当其初始状态 $q(0)$=2 时，系统的零输入响应

$y_{zi}(t)=6e^{-4t}$， $t\geqslant 0$ 。而在初始状态 $q(0)=8$ 及激励 $x(t)$共同作用下产生的完全响应 $y(t)=3e^{-4t}+5e^{-t}$， $t\geqslant 0$。试求：

（1）系统的零状态响应；

（2）系统在初始状态 $q(0)=4$ 以及激励 $3x(t)$共同作用下产生的完全响应。

解 （1）初始状态 $q(0)=8$ 是初始状态 $q(0)=2$ 的 4 倍，根据线性系统的可分解性和零输入响应线性可知：在初始状态 $q(0)=8$ 及激励 $x(t)$共同作用下产生的完全响应为

$$y(t)=4y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

因此，系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=y(t)-4y_{zi}(t)\\&=3e^{-4t}+5e^{-t}-4\times 6e^{-4t}=5e^{-t}-21e^{-4t},\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

（2）再考虑到零状态响应线性，可以求得系统在初始状态 $q(0)=4$ 以及激励 $3x(t)$共同作用下产生的完全响应为

$$\begin{aligned}y(t)&=2y_{zi}(t)+3y_{zs}(t)\\&=2\times 6e^{-4t}+3\times(5e^{-t}-21e^{-4t})=15e^{-t}-51e^{-4t},\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

3．时不变系统与时变系统

时不变系统的外部表现是，若激励延迟一段时间 t_d 成为 $x(t-t_d)$，则系统的零状态响应也延迟同样的时间而成为 $y(t-t_d)$。也就是说，响应和激励之间的关系与激励的起始作用时刻无关，如图 1-2-5 所示。时不变特性可表示为

若 $$x(t)\rightarrow y(t) \tag{1-2-6}$$

则 $$x(t-t_d)\rightarrow y(t-t_d)$$

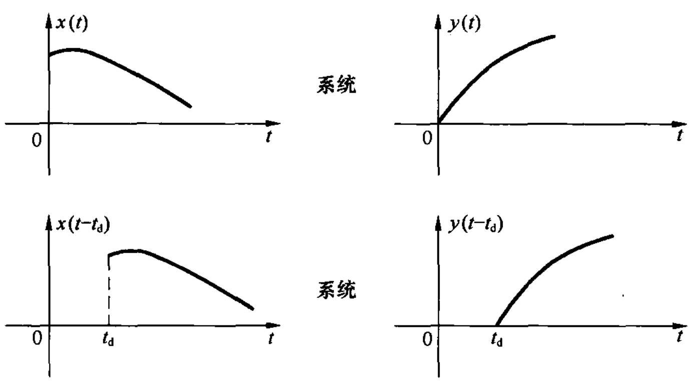

图 1-2-5 系统的时不变性示意图

对于时不变的离散时间系统，只要把连续的自变量替换为离散的自变量，上式完全适用。

不具有时不变特性的系统称为时变系统。一般情况下，时不变性是指系统的结构和元件参数不随时间的推移而改变。