

刘小生 著

陀螺经纬仪定向精度 及稳定性

TUOLUO JINGWEIYI

DINGXIANG JINGDU JI

WENDINGXING



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

江西理工大学著作出版基金资助

陀螺经纬仪定向精度 及稳定性

刘小生 著

北 京
冶金工业出版社
2011

内 容 提 要

本书共分8章,针对国产陀螺经纬仪定向精度不稳定问题进行了系统的理论与实验研究。书中用达朗伯原理推导了陀螺定向运动方程;用模糊数学原理建立了陀螺经纬仪稳定性评价数学模型,提出了一种定量分析陀螺经纬仪稳定性的有效方法,正确地评价了几台GAK-1、TJ84、JT15、FT90陀螺经纬仪的稳定性类型;研究了影响陀螺马达转速稳定的供电电压、频率及其对陀螺摆动中值稳定性的影响;研究了温度变化、磁场变化、振动、磁屏蔽等对陀螺摆动中值稳定性的影响;研究悬挂带、导流丝、陀螺马达等对零位进而对陀螺摆动中值稳定性的影响。最后提出了提高陀螺经纬仪定向精度及稳定性的具体措施。

本书可作为矿山测量、工程测量等相关专业本科生及研究生的参考书,同时可供从事陀螺经纬仪研究与制造的相关人员参阅。

图书在版编目(CIP)数据

陀螺经纬仪定向精度及稳定性/刘小生著. —北京:
冶金工业出版社, 2011. 8

ISBN 978-7-5024-5683-2

I. ①陀… II. ①刘… III. ①陀螺经纬仪一定向
—精度—稳定性 IV. ①TH761. 101

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第145703号

出 版 人 曹胜利

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号, 邮编100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 yjcs@cnmip.com.cn

责任编辑 杨盈园 美术编辑 李 新 版式设计 孙跃红

责任校对 石 静 责任印制 李玉山

ISBN 978-7-5024-5683-2

北京百善印刷厂印刷; 冶金工业出版社发行; 各地新华书店经销

2011年8月第1版, 2011年8月第1次印刷

850mm×1168mm 1/32; 4印张; 104千字; 118页

19.00元

冶金工业出版社发行部 电话: (010)64044283 传真: (010)64027893

冶金书店 地址: 北京东四西大街46号(100010) 电话: (010)65289081(兼传真)

(本书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

前

言

陀螺经纬仪是将陀螺仪和经纬仪结合在一起并利用陀螺力学原理制成的一种定向仪器。目前它已被广泛应用于矿山、铁道、森林、军事和地下工程等部门和行业的定向测量。由于它的使用不受时间、地点和环境条件的限制，同时观测简单方便、效率高，而且能保证较高的定向精度，所以它是一种省时、省力、先进的定向仪器。

目前，我国进口的陀螺经纬仪有德国的 KT-1、瑞士的 GAK-1、匈牙利的 Gi-C11、Gi-B1 等型号；国产陀螺经纬仪有 DJ6-T60、JT60、DJ2-T20、JT15、TJ84、FT90、DTJ-II、TJ83、TJ707、Y/JTD-1、AGT-1 等型号。然而通过生产单位的实际定向使用，一般都认为国产陀螺经纬仪与进口同精度的仪器相比，表现为陀螺定向时零位和精度不够稳定，可靠性较差，以致我国重要工程的陀螺定向几乎都采用国外 GAK-1 等陀螺经纬仪。

为什么国产陀螺经纬仪定向精度会不稳定，陀螺经纬仪定向精度的稳定性与其供电电压、频率、温度、磁场、振动、磁屏蔽、悬挂带、导流丝有何关系，关于这些问题，本书不

II // 前 言

仅进行了系统的理论研究，而且还通过实验进行了验证，并在此基础上提出了提高陀螺定向精度及稳定性的具体措施。所有这些对国产陀螺经纬仪的研制以及陀螺定向应用都具有指导意义。

另外，由于电子技术的飞速发展，国内外已研制了自动化陀螺仪或陀螺全站仪，如德国的 Gyromat - 2000、Gyromat - 3000、日本的 AGP1、我国的 Y/JTD - 1、GAT 等，为此本书把这些仪器作为附录进行了介绍。

本书由江西理工大学教授刘小生博士所著，书中附录 E：GAT 高精度磁悬浮陀螺全站仪资料由长安大学杨志强教授提供。

在本书出版之际，特别感谢煤炭科学研究总院唐山分院范俊智高级工程师及同仁的支持和帮助。由于作者水平有限，书中如有不妥之处，恳请专家和读者批评指正。

作 者
2011 年 5 月

目

录

1 绪论及陀螺运动方程	1
1.1 绪论	1
1.2 陀螺定向运动微分方程	5
2 陀螺经纬仪稳定性检测与评价	11
2.1 概述	11
2.2 陀螺经纬仪的稳定性检测	11
2.3 影响陀螺经纬仪稳定性评价的主要因素及摆动 中值漂移	22
2.4 陀螺经纬仪稳定性评价数学模型	28
2.5 几个实例	33
3 陀螺经纬仪零位稳定性研究	36
3.1 概述	36
3.2 零位与悬挂带的关系	36
3.3 零位与导流丝的关系	41
3.4 零位与陀螺马达的关系	44
3.5 温度变化对零位的影响	45
3.6 零位稳定性对比实验	49
4 温度变化对陀螺定向的影响研究	51
4.1 概述	51
4.2 陀螺仪内部温升对陀螺定向的影响	51

4.3 外界环境温度变化对陀螺定向的影响·····	58
5 陀螺马达转速稳定性对陀螺定向的影响研究·····	65
5.1 陀螺马达的选择·····	65
5.2 陀螺马达转速稳定性对陀螺定向的影响·····	67
5.3 电压变化对陀螺定向的影响·····	69
5.4 频率变化对陀螺定向的影响·····	73
5.5 改进实验与结论·····	76
6 磁场变化对陀螺定向的影响研究·····	78
6.1 概述·····	78
6.2 磁场强度变化对陀螺定向的影响·····	78
7 振动对陀螺定向的影响·····	85
7.1 概述·····	85
7.2 陀螺马达振动对定向的影响·····	85
7.3 外界振动对陀螺定向的影响·····	88
8 结论与建议·····	90
8.1 结论·····	90
8.2 进一步提高国产陀螺仪定向精度及稳定性的建议·····	94
参考文献·····	95
附录：几种自动化陀螺仪或陀螺全站仪简介·····	98
附录 A Gyromat - 2000 全自动精密陀螺仪·····	98
附录 B Gyromat - 3000 全自动精密陀螺仪·····	100
附录 C AGP1 全自动陀螺全站仪·····	102
附录 D Y/JTD - 1 陀螺全站仪·····	105
附录 E GAT 高精度磁悬浮陀螺全站仪·····	107

1.1 绪论

1.1.1 陀螺经纬仪的发展概述^[1]

陀螺经纬仪由陀螺仪和经纬仪两部分组成。经纬仪 1730 年由英国人发明,经过金属经纬仪的漫长过程,20 世纪 20 年代发展为光学经纬仪,20 世纪 60 年代后期以来进入电子经纬仪阶段,进而成为电子速测仪,现已相当先进,并在向智能化方向发展。陀螺仪是陀螺经纬仪的主体,主导着整机的发展进程。陀螺仪的原理由法国物理学家傅科 (Foucault) 1852 年提出,1906 年德国人安休茨 (H. Anschutz) 制成航海陀螺罗盘,1911 年美国入斯派利 (Sperry) 完成了类似的工作,从而为测量陀螺仪的出现奠定了基础。为了适应矿山开发的需要,1920 年德国人舒勒 (M. Schuler) 试制测量陀螺仪,1921 年第一台矿山测量陀螺仪样机诞生。但是真正把它应用于实际测量定向,还是自 20 世纪 50 年代以后,首先在德国,继之为原苏联、英国、匈牙利、瑞士、美国、中国及日本等先后开展了陀螺经纬仪的研究和开发,用以解决矿山测量、工程测量及军事上的测量定向问题,至今已有 60 多年的发展史了。在这段历史中,陀螺仪的发展大体可分为四个阶段。

第一阶段,20 世纪 50 年代在航海陀螺罗盘的基础上研制出矿用液浮式陀螺罗盘,这是陀螺经纬仪发展的初级阶段。这阶段的仪器笨重庞大,定向时间长,精度低。其典型仪器有德国的 MW1、MW2、MW3、MW4,前苏联的 M-1、M-2、MYT-2

和 MB 等。

第二阶段, 20 世纪 60 年代开始, 在矿用陀螺罗盘的基础上发展成陀螺经纬仪。其中较大的改进是停止使用液浮式陀螺球、电磁定中心的结构形式。利用金属悬挂陀螺灵敏部在经纬仪空心竖轴之下, 悬挂带上固定端与经纬仪的壳体相固联, 采用导流丝直接供电方式, 仪器内部结构大为简化, 取消了电磁线圈, 电能消耗降低; 采用携带式蓄电池组和晶体管变流器, 使仪器进一步小型化, 质量减轻, 并相应提高了仪器的观测精度, 一次定向所需要的时间由原来的 2 ~ 5h, 缩短为 0.5 ~ 1h。代表性的仪器有德国的 KT - 1、KT - 2、匈牙利的 Gi - B1、Gi - B2、前苏联的 MT - 1、中国的 DTJ - II 等陀螺仪。

第三阶段, 从 20 世纪 70 年代初以来, 由于陀螺技术不断发展, 精密小型陀螺元件的出现, 考虑到矿山测量定向精度要求和作业环境的特点, 开发了跨放在经纬仪支架上的陀螺附件, 又叫上架式陀螺经纬仪。该仪器的陀螺部分仍采用金属悬挂陀螺灵敏部的结构形式, 因陀螺马达小型化, 消耗功率较低, 所以仪器的体积进一步减小, 质量减轻。典型的仪器有瑞士的 GAK - 1、匈牙利的 Gi - C11、日本的 GP - 1、德国的 TK - 4、我国的 JT15、TJ84、FT90 等陀螺经纬仪。

第四阶段, 进入 20 世纪 70 年代后, 由于电子技术和计算机技术的高速发展, 为了减轻观测者的劳动强度, 研究了各种自动化陀螺仪, 如德国的 Gyromat - 2000、Gyromat - 3000、日本的 AGP1、我国的 GAT、Y/JTD - 1 等, 可以预见陀螺经纬仪今后将向着可靠精密、小型快速和完全自动化的方向发展。

1.1.2 陀螺经纬仪定向研究现状综述

上面概述了陀螺仪的发展简史, 但是要完成高精度方位基准的测定即定向, 并不能单靠硬件来实现, 因为有几个因素的限制:

(1) 机器加工有一定的极限, 使仪器的公差必然地存在。

(2) 电子元件的稳定性与老化问题。

(3) 环境的不稳定性。

(4) 人为造成的误差。

为了实现高精度定向及应用,国内外众多学者作了不懈的努力,其主要研究工作分以下3个方面:

(1) 仪器的改进与研制:这方面的研究主要目的在于提高仪器的精度和稳定性,减轻质量,缩小体积,缩短观测时间,减少系统误差的影响,提高仪器的自动化程度。它是陀螺仪将来发展的根本前途。近些年来这方面已取得了不少成果,具体表现一方面是对现有仪器进行改进,如中南大学张学庄教授等把JT15陀螺经纬仪改造成了AGT-1自动陀螺经纬仪系统^[2];另一方面研制了新的半自动或全自动陀螺经纬仪,如德国WBK厂已生产出Gyromat-2000^[3]、Gyromat-3000全自动陀螺经纬仪^[4],其一次定向精度为 $\pm 3.2''$,定向时间为7min;日本SOKKIA厂已生产出AGP1全自动陀螺全站仪^[5];我国也生产有半自动或全自动陀螺仪,如长安大学和中国航天部一院16所生产的GAT高精度磁悬浮陀螺全站仪,其一次定向精度为 $\pm 5''$,定向时间为8min;解放军1001厂生产的Y/JTD-1陀螺经纬仪^[6]等。

(2) 观测方法和数据处理研究:这项研究的目的一是为实际陀螺定向提供简单合理、精度和可靠性较高的观测方法和数据处理公式;二是为陀螺仪研究制造者提供可靠的分析结果,以便进一步改造仪器的性能。就观测方法而言,大致可分为两类^[7]:一类是跟踪法,另一类是非跟踪法。其中跟踪法又包括适用于各种型号陀螺经纬仪的逆转点法和仅适用于悬挂带扭矩大于陀螺力矩的陀螺经纬仪的阻尼法^[8]。而非跟踪法又可分两大类:一类是既测穿过时间,又测摆幅,如中天法,计时摆幅法I;另一类是穿过时间或摆幅只测一种,其中只测摆幅的观测方法是摆幅法;只测穿过时间的方法有计时摆幅法II、对称计时法、快速三点法^[9]、三点测时法、多点测时法^[10]等。就数据处理而言,它是为了在现有观测数据的基础上获得更好的结果。过去由于受仪

器精度及计算机的限制，一般都是用简单公式进行处理，然而近几年随着计算机技术的飞速发展，陀螺定向的数据处理模型不仅考虑了观测值的偶然误差，而且还考虑了相关的系统性扰动误差、随机漂移等误差影响^[11,12]，另外随着自动化陀螺经纬仪的涌现，出现了积分法等数据处理方法^[13]。

(3) 陀螺经纬仪应用方面的研究：由于受仪器水平的限制，过去陀螺经纬仪主要用于矿井定向和井下导线中加测陀螺边，然而随着陀螺经纬仪精度的提高，陀螺经纬仪的应用已越来越广泛，如在我国陀螺仪已用于各地隧道、地铁施工及导弹发射等需要高精度定向的地方^[14,15]，在国际上德国生产的 Gyromat 陀螺仪指导了英法 43km 长的海底隧道施工，使得隧道贯通横向误差为 0.361m，纵向误差 0.069m，高程误差为 0.058m；又如美国制造的四位陀螺罗盘为美国高级惯性实验室、导弹发射等建立了一等天文测量精度的绝对方位基准。

1.1.3 研究的内容及意义

从前面综述中可知，在陀螺经纬仪定向及应用的 3 个研究方向中，陀螺经纬仪的应用完全取决于陀螺经纬仪的精度及稳定性，只有稳定性好和精度高的陀螺经纬仪才能被广泛应用，如瑞士 GAK-1 陀螺仪就是实例。关于陀螺经纬仪定向的观测方法和数据处理，从国内外的文献来看，在用中等以上精度的陀螺经纬仪定向时，定向结果表明各种观测方法，既无论是跟踪法，还是固定经纬仪照准部的各种计时法，定向精度大致相当^[7]。同样采用不同的数据处理模型对陀螺定向观测值进行数据处理时，精度也无明显差别^[16,17]。由此可见要提高陀螺经纬仪定向精度和推广陀螺经纬仪的应用，关键是要提高陀螺经纬仪的精度及稳定性，特别是稳定性研究，作者认为对国产陀螺经纬仪尤为重要。因为我国自 20 世纪 50 年代末开展陀螺经纬仪研究以来，先后有多家高校、科研院所和生产厂家试制和生产过陀螺经纬仪，即使在目前仍然有煤炭科学研究总院唐山分院、徐州光学仪器厂、天

津七〇七所、西安测绘研究所、长安大学、解放军 1001 厂等单位生产十几种型号的陀螺仪，其仪器的标称精度最高达一次定向中误差为 $\pm 5''$ ，最低也达到 $\pm 60''$ ，仪器既有普通手工操作的，又有半自动或全自动的。然而通过生产单位的实际使用，普遍反映国产陀螺仪与国外同精度的仪器相比，表现为零位和精度不够稳定，可靠性较差，以致我国重要工程的陀螺定向几乎被国外 GAK-1 及 Gyromat-2000 等仪器所垄断。

为什么国产陀螺经纬仪会不稳定，陀螺经纬仪的稳定性与其陀螺马达供电电压、频率、振动、温度和外界磁场有何关系，陀螺经纬仪的零位稳定性与哪些因素有关，关于以上问题，目前国内很少报道，即使进行了一些讨论，也主要是在数量上找规律，没有从影响机理上进行研究。为了提高陀螺经纬仪的精度及稳定性，本书进行了系统的理论和实验研究。另外为了使讨论的问题具有完整性，本书先用动静法推导了陀螺定向运动方程，其次提出了检验陀螺经纬仪稳定性的方法和标准，并用模糊数学原理对陀螺经纬仪的稳定性进行了评价。

1.2 陀螺定向运动微分方程

为了从理论上分析陀螺经纬仪的稳定性，必须要知道陀螺定向运动方程，过去一般采用欧拉动力方程来推导其运动方程，但考虑到此方法不仅不直观，而且推导繁琐，因此作者采用了简便的动静法（达朗伯原理）来推导。

1.2.1 达朗伯原理简介^[18]

达朗伯原理就是把动力学问题从形式上转化为静力学问题，应用静力学的理论和方法求解。

设有一非自由质点，质量为 m ，受有主动力 $\mathbf{F}$ 和约束反力 $\mathbf{R}$ ，而运动加速度为 $\mathbf{a}$ ，根据牛顿第二定律，该质点的运动方程为

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

或

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} - m\mathbf{a} = 0 \quad (1-1)$$

若令 $\mathbf{Q} = -m\mathbf{a}$ 并称为惯性力, 则式 (1-1) 为

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{Q} = 0 \quad (1-2)$$

即作用在质点上的主动力和约束力及假想的惯性力在形式上构成平衡力系, 这就是达朗伯原理。

如果物体作转动运动, 则在作用于物体的外力矩之外, 另加上惯性力矩, 即可使动力学问题变为静力学问题求解。其中转动惯性力矩 $\mathbf{M}_{\text{惯}}$ 的方向与角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的方向相反, 其表达式为

$$\mathbf{M}_{\text{惯}} = -J\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1-3)$$

另外, 由于陀螺仪具有动量矩 $\mathbf{H}$, 当有外力矩 $\mathbf{M}$ 时, 陀螺仪出现角速度 $\boldsymbol{\omega}$, 其方向按右手旋进规则确定, 表达式为 $\mathbf{M} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{H}$ 。

1.2.2 坐标系及角速度

设悬挂式陀螺经纬仪架在地理纬度为 φ 的地球表面某一点, 使用时仪器基座相对地面不动, 陀螺房与悬挂带的接点为 O , 通过 O 作固定在地球上的坐标系, OX 沿水平方向指向北, OY 沿着水平方向指向西, OZ 垂直向上, 如图 1-1 所示, 再设沿着各轴的单位向量分别是 $\mathbf{i}_I$ 、 $\mathbf{j}_I$ 、 $\mathbf{k}_I$, 则地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\text{IE}}$ 在这个坐标系上的投影为

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{IE}} = \omega_{\text{IE}} \cos \varphi \mathbf{i}_I + 0 \cdot \mathbf{j}_I + \omega_{\text{IE}} \sin \varphi \cdot \mathbf{k}_I \quad (1-4)$$

设另有一动坐标 O_{xyz} 固定在陀螺房上, 其原点也是 O (位于悬挂带与陀螺房交点) 点, Ox 轴与陀螺转子轴平行, 指向与转子自转动量矩 $\mathbf{H}$ 一致, Oz 轴沿陀螺的垂直回转轴, Oy 在转子赤道面内, 指向按右手系确定。

一般认为固定在地球上的动坐标系 Ox 为陀螺仪轴应找的方向, 当陀螺仪轴偏离了子午线 Ox 方向时, 可以用 α 、 β 角来描述它, α 角为水平面内转子轴方向 Ox 对子午面的偏角, β 为

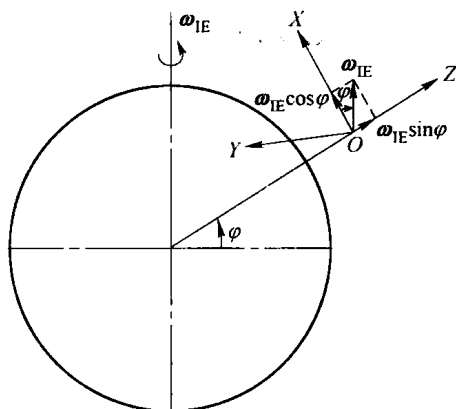


图 1-1 地球自转矢量的分解

铅垂面内转子轴方向 Ox 对水平面的偏角。可见要确定陀螺仪转子轴的位置需要两个独立的变量，即动坐标系 $Oxyz$ 第一次绕 Oz 轴转动 α 角，到达 $Ox_1y_1z_1$ 的位置，第二次绕 Oy_1 轴转动 β 角，到达 $Oxyz$ 的位置，如图 1-2 所示，相应的变换矩阵为

$$C_{x_1}^{x_1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

$$C_{x_1}^x(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

由 $OXYZ$ 到 $Oxyz$ 的总变换矩阵为

$$C_X^x = C_{x_1}^x \cdot C_{x_1}^{x_1} \quad (1-7)$$

把式 (1-5)、式 (1-6) 代入式 (1-7) 得

$$C_X^x = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & \sin\alpha \cdot \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha \cdot \sin\beta & -\sin\alpha \cdot \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

设沿 $Oxyz$ 坐标系各轴的单位向量分别为 i 、 j 、 k ，则地球自

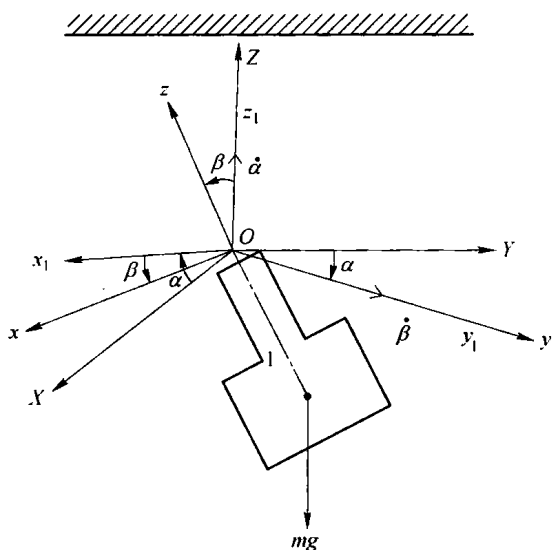


图 1-2 陀螺仪轴对地球的相对运动

转角速度 ω_{IE} 在动坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 中的表达式为

$$\omega_{IE} = (\omega_{IE} \cos \varphi \quad 0 \quad \omega_{IE} \sin \varphi) C_X^x \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

把式 (1-8) 代入式 (1-9) 得

$$\omega_{IE} = \begin{pmatrix} \omega_{IE} \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta - \omega_{IE} \sin \varphi \cos \alpha \sin \beta \\ \omega_{IE} \cos \varphi \sin \alpha \cos \beta - \omega_{IE} \sin \varphi \sin \alpha \sin \beta \\ \omega_{IE} \cos \varphi \sin \beta + \omega_{IE} \sin \varphi \cos \beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (1-10)$$

另外坐标系转动的角速度在 $Ox_1y_1z_1$ 中的表达式为

$$\omega = (-\dot{\alpha} \sin \beta \quad \dot{\beta} \quad \dot{\alpha} \cos \beta) \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

考虑到 α 、 β 、 ω_{IE} 很小，因此可认为 $\sin \beta \approx \beta$ 、 $\cos \beta \approx 1$ ，而 β 与 ω_{IE} 或 α 的二次项乘积一般小于方程中最大项的 1%，故可忽略，因此，式 (1-10)、式 (1-11) 可简化为

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{IE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{IE}} \cos \varphi \cos \alpha \\ \boldsymbol{\omega}_{\text{IE}} \cos \varphi \sin \alpha \\ \boldsymbol{\omega}_{\text{IE}} \sin \varphi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta} \mathbf{j} + \dot{\alpha} \mathbf{k} \quad (1-13)$$

1.2.3 外力矩

1.2.3.1 重力矩

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -l \\ mg \sin \beta & 0 & -mg \cos \beta \end{pmatrix} = -mg \sin \beta \mathbf{j} \quad (1-14)$$

1.2.3.2 空气阻尼矩

设空气阻尼系数为 n ，阻尼矩与摆动角速度大小成正比，方向与角速度方向相反，即 $\mathbf{M}_N = -n\boldsymbol{\omega} = -n\dot{\beta}\mathbf{j} - n\dot{\alpha}\mathbf{k}$ ，由于 $n\dot{\beta}$ 比 $n\dot{\alpha}$ 小得多，因此

$$\mathbf{M}_N = -n\dot{\alpha}\mathbf{k} \quad (1-15)$$

1.2.3.3 悬挂带系扭矩

设悬挂带扭矩系数为 D_B ，悬挂带初始零位为 $\Delta\alpha$ ，则扭力矩方向为 Oz 轴，大小为

$$\mathbf{M}_D = D_B \Delta\alpha \mathbf{k} \quad (1-16)$$

1.2.4 运动微分方程^[19]

在列方程前，先确定 α 、 β 、 $\boldsymbol{\omega}_{\text{IE}}$ 的符号，对于方位角 α 顺时针旋转即由 OX 轴向东为“+”，地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\text{IE}}$ 与 α 旋转方向相反即为“-”；对于高度角 β 俯角为“-”。于是可得 y 轴， z 轴上的惯性力矩、外力矩、陀螺力矩，如图 1-3 所示。

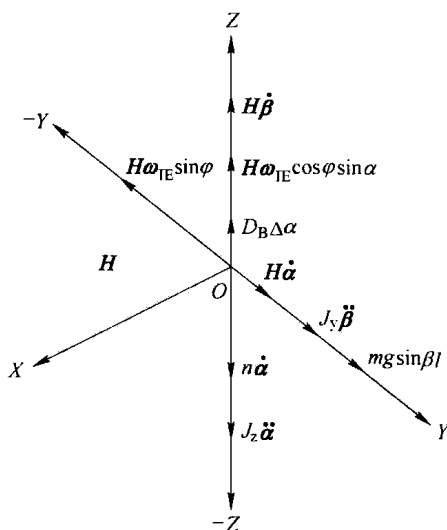


图 1-3 陀螺运动时力矩矢量

其中有坐标旋转角速度 $\dot{\alpha}$ 和 $\dot{\beta}$ 产生的陀螺动量矩 $H\dot{\alpha}$ 和 $H\dot{\beta}$ ，对应角加速度 $\ddot{\alpha}$ 和 $\ddot{\beta}$ 产生的惯性力矩项 $J_z\ddot{\alpha}$ 和 $J_y\ddot{\beta}$ ；地球自转角速度分量引起的陀螺力矩项 $H\omega_{IE}\sin\varphi$ 和 $H\omega_{IE}\cos\varphi\sin\alpha$ 。此外，还有外力矩项，包括重力矩 $mg\sin\beta l$ ，空气阻尼矩 $n\dot{\alpha}$ ，悬挂带系扭矩 $D_B\Delta\alpha$ 等，各力矩的方向如图 1-3 所示。由图 1-3 可以知道，根据达朗伯原理可得陀螺运动微分方程

$$J_y\ddot{\beta} - H\omega_{IE}\sin\varphi + H\dot{\alpha} + mg\sin\beta l = 0 \quad (1-17)$$

$$-J_z\ddot{\alpha} + H\omega_{IE}\cos\varphi\sin\alpha - n\dot{\alpha} + H\dot{\beta} + D_B\Delta\alpha = 0 \quad (1-18)$$

式中， J_y 、 J_z 分别是灵敏部绕 Oy 和 Oz 轴的转动惯量， H 为陀螺动量矩，其他符号意义同前。

另外，为了计算方便，式 (1-18) 两边乘以 -1 得

$$J_z\ddot{\alpha} - H\omega_{IE}\cos\varphi\sin\alpha + n\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - D_B\Delta\alpha = 0 \quad (1-19)$$

式 (1-17)、式 (1-19) 即为陀螺定向运动微分方程。