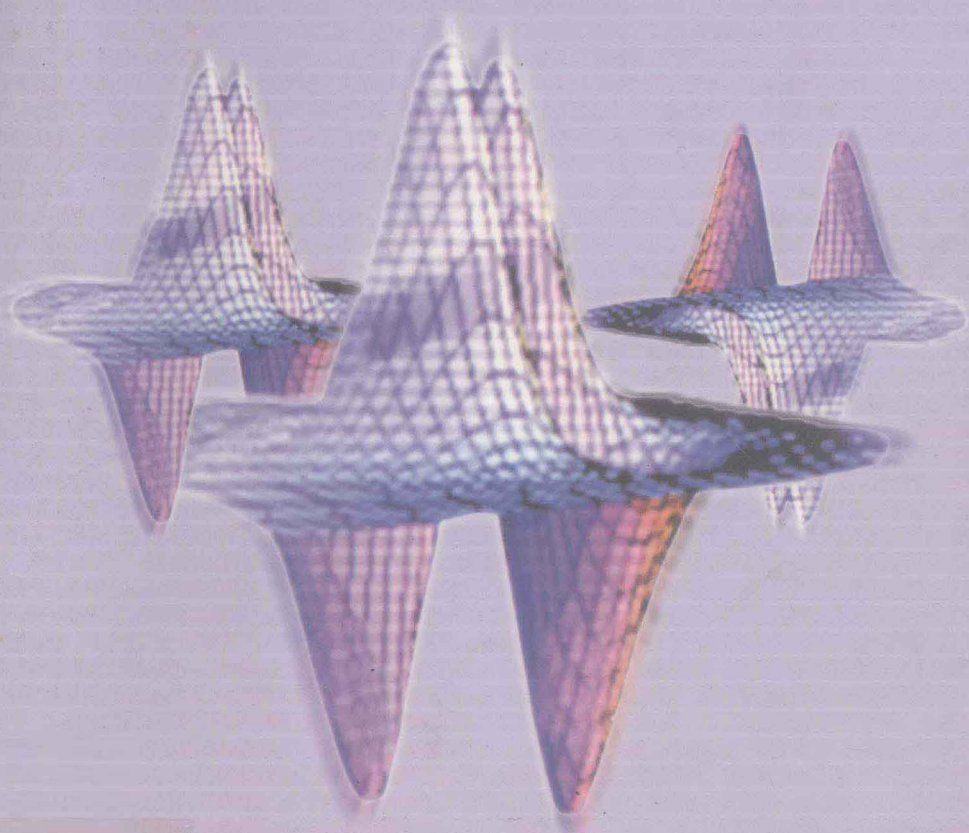


● 高等院校使用教材

微 积 分 实 验

蔡淑云 李盛德 主编
杜忠复 主审



吉林人民出版社

高等院校使用教材

微 积 分 实 验

蔡淑云 李盛德 主编

杜忠复 主审

吉林人民出版社

(吉)新登字 01 号

微积分实验

主 编	蔡淑云 李盛德		
责任编辑	刘玉文	封面设计	伊 丽
责任校对	蔡淑云	版式设计	伊 丽

出 版 者	吉林人民出版社 0431—5649710 (长春市人民大街 124 号 邮编 130021)
发 行 者	吉林人民出版社
印 刷 者	吉林林学院印刷厂

开 本	787×1092 1/16
印 张	14.25
字 数	340 千字
版 次	2002 年 9 月第 1 版
印 次	2002 年 9 月第 1 次印刷
印 数	1—2 000 册

标准书号	ISBN 7-206-03073-4/G·1074
定 价	29.50 元

如图书有印装质量问题,请与承印工厂联系。

前 言

为了把培养学生的数学素质,综合、创新能力的教育教学改革的任务落到实处,“数学实验”已成为高等学校 21 世纪改革数学教育的一门新课程。

当代社会发展正经历着由工业社会向信息社会过渡的变革。计算机技术的发展已经对人类社会的全部生活产生了十分巨大的影响。计算机的发现以及随着科学技术的迅猛发展,各学科的理论及其应用,在处理和解决问题的方法和手段上更加数学化,对数学理论与技术的依赖程度已达到了惊人的地步,数学科学与技术被科学研究和生产管理等各个领域成功的运用表明,现代数学已不再仅仅是其它学科的基础和工具,而是直接发挥着第一生产力的作用。比如:飞行器的空洞实验,石油勘探,医药与生物环保,社会经济(韩国经济的最佳模型),遗传密码的破译,病虫害的控制,粮食产量的预测,军事国防方面(海湾战争导弹的制导)等等,“被如此称颂的高科技本质上是一种数学技术”。今日数学已不仅是一门科学,还是一种关键的普遍适用的技术。对于 21 世纪信息社会“计算机无处不在”,“数学无处不在”。

对于非数学专业学生数学素质培养的要求已不仅仅是具有较深厚的数学理论知识和较强的推理证明能力,而是还要求具有应用数学方法,借助于计算机技术解决实际问题的意识和能力。面对这种数学教育教学的新问题,我们结合对传统数学教育教学的反思和当前国内外高等学校数学教育教学改革的发展态势,编写了“微积分实验”这本教材。

本书内容分为三部分。第一部分演示与基础实验,这部分是与高等数学理论课同步开设的重要教学环节,将数学教学与计算机应用结合起来,既辅助了理论课的教学,又培养了学生进行科学计算与数据处理的能力,同时可以激发学生学习数学的兴趣。第二部分应用与综合实验,可以加强学生“用数学”的教育,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。两部分实验安排层次分明,由浅入深,演示与基础实验是主体,应用与综合实验是延伸与扩展,是“数学建模”的接口。第三部分附录是四个数学软件的操作简介。

本书编写的特点为:

1. 结构上:

(1)实验目的与要求。写明通过实验所要达到的目的

(2)实验的基本知识。说明完成这个实验应具备的数学基础知识和相关知识。

(3)实验使用的软件。Mathematica 版本。

(4)实验的具体内容。实验的内容具体。

2.本书的主要对象：主要是大学一、二年级学生，也可以是高年级学生。

3.使用安排上：教学时数为16—24学时。既可以与高等数学教学内容同步完成，也可以单独设课。在教师指导下一般只完成部分实验，可根据学生实际选择实验内容，对内容进行适当的删减，其它由学生自己课外独立完成。

4.内容处理上：演示与实验没有给出任何图象，甚至有些题目不直接给出结果，目的给学生留有余地和悬念，使其动手操作时感受“做数学”的快乐和惊讶。

5.如果你对复杂的运算望而却步，或者是由于需要必须用到大量的数学运算，或者对学习高等数学感到枯燥乏味，或者缺乏空间想象力，或者对一些思想与定义等不理解，或者觉得学习高等数学不知何用，这本书正是为其量身打造。既提高了学生学习高等数学的兴趣，又培养了学生的数学素质和综合能力。即使你不是数学科班出身，即使你的数学成绩平平，只要学完本书，你会发现，在数学的天地里也有一片世外桃源。

本书是吉林省教委立项课题“21世纪高等职业教育数学课程体系的设置改革与建设”及北华大学重点立项课题“非数学专业数学实验的认识与实践”、“高等数学课程教学体系与教学方法的改革”研究成果。

编写“微积分实验”是一项崭新的工作，缺乏经验，虽经努力，但限于水平，仍存在不少问题，希望专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来。

在“微积分实验”教学试点工作与教材编写、出版过程中得到了北华大学学校领导、教务处领导和公共基础部领导的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

编者

2002年5月

目 录

上 篇 演示与基础实验

实验一	函数与作图	1
实验二	极限计算与方程在某个区间中的根	6
实验三	导数的定义、求函数的导数	9
实验四	Taylor 展开与函数极值	12
实验五	定积分几何意义、积分计算	15
实验六	空间立体图形的绘制	18
实验七	多元函数的偏导数、二元函数的曲面图形、等高线图	22
实验八	重积分计算、积分区域投影	25
实验九	莫比乌斯带、曲面图形	28
实验十	无穷级数与函数逼近、函数展开成幂级数	30
实验十一	微分方程解析解与数值解	32
实验十二	微积分的创立	34

下 篇 应用与综合实验

实验一	牛顿迭代法	35
实验二	极值、最值	38
实验三	平面、曲面的面积	41
实验四	切平面与法线	44
实验五	数据的曲线拟合	47
实验六	导弹追踪及其模拟	50
实验七	梯子长度问题	54
实验八	滑梯问题	58
实验九	投篮角度问题	63
实验十	路程估计问题	68

附 录 数学软件使用简介

1. Mathematica 的运行	72
2. Mathematica 的基本菜单操作	82
3. Mathematica 软件的其它使用	116
4. Matlab 软件	141

5. Maple 软件	164
6. SaS 软件	187
参考文献	217

上篇 演示与基础实验

实验一 函数与作图

一、实验目的及要求

1. 学习 Mathematica 软件的启动和退出,掌握 Mathematica 的绘图语句。
2. 从图形上认识一元函数及观察其特性。

二、实验的基本知识

1. 函数的概念
2. 函数的特性
3. 函数的参数方程和极坐标方程

三、实验使用的软件

Mathematica4.0 版本

1. Mathematica 的启动与退出

(1) 在 Windows 环境下安装好 Mathematica 用鼠标双击 Mathematica 图标即可进入 Mathematica。

(2) 在工作区中输入你想要运算的表达式或指令,按 shift + Enter 组合键输出结果,如输入 $2 + 2$,然后按 shift + Enter,出现

In[1]: = $2 + 2$

Out[1] = 4

(3) 结束工作后,可选择 File 菜单中的 Exit 选项或单击关闭按钮,Mathematica 询问你是否保存对打开工作区内容的修改,选择 Yes,保存文件;选择 No,放弃保存;选择 Cancel,取消这次操作退出并返回 Mathematica。

(4) 打印机输出

在打印机上输出全部作业:命令操作实现后,单击打印机按钮或 File 菜单中的 Print 命令出现打印机对话框,显示选定全部,按确定按钮。

(5) 在打印机上输出图形

① 绘出图形:如 `In[1]: = Plot[Sin[x], {x, -2Pi, 2Pi}]` (图略)

② 单击图形所在的右侧大方括号,将输出图形选定了。

③ 单击打印机按钮或 File 菜单中的 Print 命令,出现打印机对话框,显示选定范围,按确定按钮。

2. 本实验所用运算符号、函数、可选项及意义

(1) 算术运算符号

“+” 加、“-” 减、“*” 乘、“/” 除、“^” 指数(乘也可用空格)

(2) 数学函数

<code>Sqrt[x]</code>	x 开方
<code>Exp[x]</code>	e 的 x 次方
<code>Log[x]</code>	x 的自然对数
<code>Log[b, x]</code>	以 b 为底, x 的对数
<code>Abs[x]</code>	x 的绝对值
<code>Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x],</code>	三角函数
<code>ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x], ArcCot[x]</code>	反三角函数

(3) 常数

Pi	$\pi = 3.1415926\cdots$
E	$e = 2.71828\cdots$
Infinity	无穷大

(4) 可选项

Frame	在图形周围是否加框, <code>Frame -> True</code> , 画出边框
Gridlines	给图形加网格, 选项值为 Automatic
PlotRange	指定绘图的范围
<code>PlotRange -> All</code>	绘出所有点
<code>PlotRange -> {y₀, y₁}</code>	画出函数值在 $[y_0, y_1]$ 范围内的图形
<code>PlotRange -> {{x₀, x₁}, {y₀, y₁}}</code>	画出区间在 $[x_0, x_1]$ 上, 函数值在 $[y_0, y_1]$ 之间的图形(矩形区)
PlotStyle	设置曲线的样式(包括颜色、线条宽度等)
<code>RGBColor[r, g, b]</code>	红、绿、蓝三色的强度, r, g 和 b 取 0 到 1 之间的数
AspectRatio	图形高度与宽度的比例, 选项值为 Automatic 默认为 $1/\text{GoldRatio}$
<code>AxesLabel -> {"x", "f(x)"}</code>	给 x 轴, y 轴加标记
<code>PlotLabel -> {" 标记"}</code>	给图形加标记
Thickness	改变图形的粗细

四、实验的具体内容

1. Mathematica 的函数作图命令

(1) 作图命令的一般形式:

`Plot[函数, {自变量名, 自变量最小值, 自变量最大值}]`

例如: 要画定义在区间 $[-2, 2]$ 上的函数 $f(x) = x^2 + 5x - 5\sin x$ 的图形, 我们就可以用下面的命令来实现:

`Plot[x^2 + 5 * x - 5 * Sin[x], {x, -2, 2}]`

(2) 若要规定因变量的范围, 则要用命令:

`Plot[函数表达式, {自变量名, 自变量最小值, 自变量最大值}, PlotRange -> {因变量最小值, 因变量最大值}]`

例如: 画上面函数的图形时要规定因变量范围为 $[0, 5]$, 则用命令:

`Plot[x^2 + 2 * x - 5 * Sin[x], {x, -2, 2}, PlotRange -> {0, 5}]`

(3) 若在区间 $\{x, x_{\min}, x_{\max}\}$ 上同时画几个函数的图形, 则用命令:

`Plot[{函数 1, 函数 2, ...}, {x, x_{\min}, x_{\max}}]`

例如: 画函数 $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的图形, 则用命令:

`Plot[{Sin[x], Sin[2 * x]}, {x, 0, 2Pi}]`

(4) 若要按选项画出函数 x 的图形, 则用命令:

`Plot[函数表达式, {自变量名, 自变量最小值, 自变量最大值}, 选项]`

(5) 参数绘图命令:

`ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 下限, 上限}]`

(6) 极坐标绘图命令:

`r[t_] := f`

`ParametricPlot[{r[t] * Cos[t], r[t] * Sin[t]}, {t, 下限, 上限}]`

绘出 $y = \sin x$ 在区间 $[0, 3]$ 上的图形, 给图形加上框线和网络, 则用命令:

`Plot[Sin[x], {x, 0, 3}, Frame -> True, GridLines -> Automatic]`

2. 再现图形, 组合图形和修改图形命令

`Show[Pic]` 显示图形

`Show[Pic, 选项名 -> 选项值]` 设置图形的各种选项并显示图形

`Show[Pic1, Pic2, ..., Picn]` 将图形 Pic1, Pic2, ..., Picn 在一起显示

3. 在计算机上利用 Mathematica 作图

例 1: 观察 $y = \cos x$ 的有界性, 周期性

`In[1]: = Plot[Cos[x], {x, -2Pi, 2Pi}]`

例 2: 观察 $y = \tan x$ 的周期性, 奇偶性

In[2]: = Plot[Tan[x], {x, -10, 10}]

In[3]: = Plot[Tan[x], {x, -10, 10}, PlotRange -> {-5, 5}]

In[4]: = Plot[Tan[x], {x, -10, 10}, PlotRange -> {0, 5}]

观察上面三个语句, 会发现加入可选项设定时, 图形效果更好一些。

例3: 给 $y = \cos x$ 的图形下 x 轴 y 轴加标记

Plot[Cos[x], {x, 0, 7}, AxesLabel -> {"x", "Cos[x]"}]

给 $y = \cos x$ 图形加框和网格

Plot[Cos[x], {x, 0, 7}, Frame -> True, GridLines -> Automatic]

改变 $y = \cos x$ 图形的粗细及颜色

Plot[Cos[x], {x, 0, 7}, PlotStyle -> {{Thickness[0.02], RGBColor[1, 0, 0]}]}

例4: 画 $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin 3x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图形, 并用红、绿、蓝三种颜色画出, 观察周期的变化

In[5]: = Plot[{Sin[x], Sin[2x], Sin[3x]}, {x, 0, 2Pi}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]

例5: 观察 $\sin[1/x]$ 在 $x = 0$ 附近回转无穷次

In[6]: = Plot[Sin[1/x], {x, -1, 1}]

例6: 绘出 $y = x + \sin x$ 叠加的图形

先观察 $y = x$, $y = \sin x$, 再观察 $y = x + \sin x$

In[7]: = a1 = Plot[x, {x, -5, 5}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0]}]

In[8]: = a2 = Plot[Sin[x], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 1, 0]}]

In[9]: = a3 = Plot[x + Sin[x], {x, -5, 5}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}]

In[10]: = Show[a1, a2, a3]

例7: 画星形线 $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ 及摆线 $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ 的图形

In[11]: = ParametricPlot[{2Cos[t]^3, 2Sin[t]^3}, {t, 0, 2Pi}, AspectRatio -> Automatic]

In[12]: = ParametricPlot[{2(t - Sin[t]), 2(1 - Cos[t])}, {t, 0, 4Pi}]

例8: 绘出心形线 $r = 2(1 - \cos t)$ 及三叶玫瑰线 $r = 2\cos 3t$ 的图形

In[13]: = r[t_]:= 2(1 - Cos[t])

In[14]: = ParametricPlot[{r[t] * Cos[t], r[t] * Sin[t]}, {t, 0, 2Pi}]

In[15]: = r[t_]:= 2Cos[3t]

In[16]: = ParametricPlot[{r[t] * Cos[t], r[t] * Sin[t]}, {t, 0, 2Pi},
AspectRatio -> Automatic]

例9: 画分段函数 $f(x) = x, x < 1, f(x) = 1 + 1/x, x \geq 1$ 的图形

In[17]: = f[x_]:= x/x < 1; f[x_]:= 1 + 1/x/x > = 1

In[18]: = Plot[f[x], {x, -3, 3}]

例 10: 确定一个合适的观察矩形区, 画出函数 $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ 的图形

解: 函数的定义域为 $[-2, 2]$, 值域为 $[0, 2\sqrt{2}]$

因此函数的图形不会超过矩形域 $[-2, 2] \times [0, 2\sqrt{2}]$

可取观察区为 $[-3, 3] \times [-1, 4]$

启动 Mathematica 后, 键入

In[19]: = Plot[Sqrt[8 - 2 * x^2], {x, -3, 3}, PlotRange -> {-1, 4}] 后按
Insert 或 Shift + Enter 键, 在显示屏上就能看到函数图形的全貌。

例 11: 作函数 $y = 1/(1 - x)$ 的图形

解: 取观察区为 $[-9, 9] \times [-9, 9]$ 作图

In[20]: = Plot[1/(1 - x), {x, -9, 9}, PlotRange -> {-9, 9}]

取观察区为 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 作图

In[21]: = Plot[1/(1 - x), {x, -3, 3}, PlotRange -> {-3, 3}]

将两图形进行比较

习 题 一

1. 选定合适的区间及可选项作下列函数的图形

(1) $y = \cot x$

(2) $y = \arctan x$

(3) $y = \cos x + e^x$

(4) $y = 1 + 36x/(1 + 3x)^2$

(5) $x = 4\cos t \quad y = 3\sin t$

(6) $r = 2\sin(2t)$

(7) $r = e^{0.2t}$

(8) $y = 1 + x, x < 1 \quad y = x^2, x \geq 1$

2. 利用 Mathematica 作函数 $g(x) = \sin(\pi/x)$ 的图形, 选显示区域 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 对坐标原点处作局部放大, 观察 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 的变化情况。

3. 函数 $y = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 又问当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 这个函数是否为无穷大? 为什么? 用 Mathematica 作出图形并验证你的结论。

实验二 极限计算及方程在某个区间中的根

一、实验目的及要求

1. 学习并掌握 Mathematica 求极限语句。
2. 在计算机上观察当 x 趋向无穷时函数变化趋势。
3. 研究零点定理。

二、实验的基本知识

1. 极限的概念, 连续的概念
2. 闭区间上连续函数的性质

三、实验使用的软件

Mathematica 4.0 版本

本实验所用函数、可选项及意义

1. `Table[f, {i, min, max, step}]` 给出 f 的数值表, i 从 $\min$ 到 $\max$, 以 step 为步长, 步长为 1 时可以省略。

2. `List` 是一组数据的名称

`ListPlot[{ {x1, y1}, {x2, y2}, ---}]` 画出数据点 $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots$

`ListPlot[{y1, y2, ---, yn}]` 画出数据点 $\{1, y_1\}, \{2, y_2\}, \dots, \{n, y_n\}$

`ListPlot[数据, PlotJoined -> True]` 画一条通过数据点的光滑曲线。

四、实验的具体内容

1. 观察 $f(x) = x \sin(1/x)$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限

(1) 观察 $f(x) = x \sin(1/x)$ 的图象

`Plot[x * Sin[1/x], {x, -1, 1}]`

(2) 令 $x = a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots, 100$, 作函数的取值表, 画散点图, 看其子列的趋向情况

`tsin = Table[Sin[n]/n, {n, 1, 100}];`

`ListPlot[tsin]` (在计算机上观察)

2. 用 Mathematica 求极限的一般形式:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 形式为: `Limit[ f ( x ) , x - > x_0 ]`

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 形式为: `Limit[ f ( x ) , x - > x_0, Direction - > 1 ]`

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 形式为: `Limit[ f ( x ) , x - > x_0, Direction - > - 1 ]`

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 形式为: `Limit[ f ( x ) , x - > Infinity]`

例 1: 计算

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 1)/(4x^2 - 7x + 1)$ (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin (1/x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x$ (6) $\lim_{x \rightarrow 1} x g(x)$

解:

`In[1]: = Limit [ Sin[x] /x , x - > 0]`

`Out[1] = 1`

`In[2]: = Limit [(x^2 - 1)/(4x^2 - 7 * x + 1), x - > Infinity]`

`Out[2] = 1/4`

`In[3]: = Limit [Sin [1/x], x - > 0]`

`Out[3] = Interval[{ - 1, 1}]` (* 在 $(-1, 1)$ 之间振荡 *)

`In[4]: = Limit[1/x, x - > 0, Direction - > 1]`

`Out[4] = - Infinity`

`In[5]: = Limit[1/x, x - > 0, Direction - > - 1]`

`Out[5] = - Infinity`

`In[6]: = Limit[xg[x], x - > 1]`

`Out[6] = Limit[xg(x), x - > 1]` (* 因 $g[x]$ 没有定义, 无法计算 *)

例 2: 利用 Mathematica 作出函数 $y = (1 + 1/x)^{x+1} (1 \leq x \leq 100)$ 的图形, 观察当 $x \rightarrow \infty$ 时, y 的变化趋势, 并求出极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^{x+1}$.

解: `Plot[(1 + 1/x)^(x + 1), {x, 1, 100}]`

在计算机上显示随 x 的增大图形的变化。

`Limit[(1 + 1/x)^(x + 1), x - > Infinity]`

3. 用两分法求方程在某个区间中的根

在利用零点定理(根的存在定理)求根的例子中, 我们通过缩小求根区间的方法来求方程根的较精确的近似值。

两分法求根的步骤:

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且在端点处取非零异号的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$, 即 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 此时在区间 (a, b) 内有根。我们来求这个根, 要求精确到误差小于 ϵ 。

- (1) 记 $x_1 = a$ 和 $x_2 = b$, 如果 $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, 根在区间 (x_1, x_2) 内。
 (2) 取中值 $x = (x_1 + x_2)/2$
 (3) 如果 $|x_2 - x_1| > \text{eps}$, 则计算 $f(x)$, 如果 $f(x_1) \cdot f(x) < 0$, 根应在区间 (x_1, x) 内, 否则根应在区间 (x, x_2) 内, 而区间长度已经缩小一半。
 (4) 再转到步骤 2 继续运算
 例 3: $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$, 求根区间为 $(1, 2)$, 并要求精确到小数点后第 4 位, 即 $\text{eps} = 10^{-4}$. 则用两分法程序计算 15 次循环可得最后结果 $x = 1.2211$, 精确度达 10^{-4} 以上, 简便步骤如下:

求两点函数值:

$$\text{In}[1]: = f[x_]: = 4 * x^3 - 6 * x^2 + 3 * x - 2$$

$$\text{In}[2]: = f[1]$$

$$\text{In}[3]: = f[2]$$

$$\text{In}[4]: = f[(1 + 2)/2]$$

循环下去即可, 15 次后可得最后结果 $x = 1.2211$, 精确度达 10^{-4} 以上。

习 题 二

1. 用 Mathematica 命令求下列极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2/(x^2 - 1) - 1/(x - 1))$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} ((x^2 + 3x)^{1/2} - x)$
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos m/x)^x$ (4) $\lim_{h \rightarrow 0} [(1 + h)^{1/3} - 1]/h$
 (5) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln \sin x / (\pi - 2x)^2$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - \sin x) / \sin^3 x$

2. 证明下列方程至少有一个实根, 并用两分法求精确到小数 3 位的根:

- (1) $x^3 - x^2 - 4 = 0$ (2) $(x - 5)^{1/2} = 1/(x + 3)$

实验三 导数的定义 求函数的导数

一、实验目的及要求

1. 加强对导数定义及几何意义的理解。
2. 学习并掌握 Mathematica 求导的语句。

二、实验的基本知识

1. 导数的概念及几何意义。
2. 函数的求导方法。

三、实验使用的软件

Mathematica 4.0 版本

D 求导

Dt 求微分

Solve 解方程

四、实验的具体内容

1. 导数的定义

(1) 数值演示

由切线定义中我们知道,一条曲线 C 在点 M 处的切线是过该点的割线 MN 当点 N 沿着曲线 C 趋向点 M 时,割线 MN 绕 M 点旋转所趋向的极限位置,那么切线的斜率也就是过 M 的割线 MN 的斜率的极限。我们任取一个函数 $f(x) = x^2$,考虑在 0.5 处的导数的逼近过程,当 x 从 1.5 逼近 0.5 时,我们通过如下的割线斜率表发现:割线的斜率确实趋向切线的斜率。

```
In[1]: = Table[(x^2 - 0.5^2)/(x - 0.5), {x, 1.5, 0.5, - 0.02}]
```

在计算机上显示割线斜率表。

而 $f'(0.5) = 1$

将表中的值与 1 进行比较。

(2) 图形演示:

绘制 f 在 0.5 处的切线图及 f 在 $[0.5, 1.5]$ 间割线束图后合并显示,从图中我们不难发现切线确实为一系列的割线运动的极限位置。(图形制作学生自己完

成)

(3) 动画演示:

我们先选中上面的所有图形,并选择

Graph $\rightarrow$ Animate Selected Graphics 菜单演示动画,从中观察割线逼近切线的过程及割线斜率逼近导数的过程。

2. 利用 Mathematica 求函数的导数

(1) 求导的命令为:

$D[\text{待求导函数}, \{\text{变量}, \text{求导的阶数 } n\}]$

若 $n = 1$ 可省略求导阶数不写。

例 1: 求 $y = \cos x$ 的导数

在 Mathematica 下, 键入 $D[\text{Cos}[x], x]$ 屏幕会显示

In[1]: = $D[\text{Cos}[x], x]$

Out[1] = $-\text{Sin}[x]$

例 2: 求 $y = \cos x$ 的三阶导数

键入

$D[\text{Cos}[x], \{x, 3\}]$ 按 Shift + Enter 屏幕显示

In[2]: = $D[\text{Cos}[x], \{x, 3\}]$

Out[2] = $\text{Sin}[x]$

例 3: 求函数 $y = x^{10} + 2(x - 10)^9$ 的 11 阶导数, 可用命令

$D[x^{10} + 2(x - 10)^9, \{x, 11\}]$

例 4: 求 $y = \ln[(x - 1)/2] - \ln[(x + 1)/2]$ 的导数, 可用命令

$D[\text{Log}[(x - 1)/2] - \text{Log}[(x + 1)/2], x]$

若用命令

$\text{Simplify}[D[\text{Log}[(x - 1)/2] - \text{Log}[(x + 1)/2], x]]$ 会得出一个较为简单的结果。

(2) 求函数微分的语句

$D_t[\text{函数表达式}]$

例 1: 求 $y = \sin 2x$ 的微分 dy

键入:

$D_t[\text{Sin}[2x]]$ 可求得 dy

要求 $dy|_{x=0}$, 则用命令:

$(D[\text{Sin}[2x], x] /. x \rightarrow 0) Dt[x]$

例 2: 求 $y = x^n$ 对 x 的微分, 则用命令:

$\text{SetAttributes}[n, \text{Constant}]$