

The Review of New Political Economy

汪丁丁 主编

新政治经济学评论 18

李子联

城市化进程与犯罪率：基于经济因素的视角

何梦笔

经济学述行性的神经语言学解释

黄湘

戴震、凌廷堪、章学诚与现代性在晚期中华帝国的兴起

浙江大学民营经济研究中心

浙江大学经济学院

浙江大学跨学科社会科学研究中心



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

The Review of New Political Economy

汪丁丁 主编

新政治经济学评论 18

浙江大学民营经济研究中心

浙江大学经济学院

浙江大学跨学科社会科学研究中心

图书在版编目 (CIP) 数据

新政治经济学评论. 18/汪丁丁主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2011. 8

ISBN 978 - 7 - 308 - 09053 - 7

I. ①新… II. ①汪… III. ①政治经济学 - 文集
IV. ①F0 - 53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 172455 号

新政治经济学评论. 18

汪丁丁 主编

责任编辑 叶 敏

装帧设计 王小阳

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 北京京鲁创业科贸有限公司

印 刷 杭州杭新印务有限公司

开 本 787mm × 1092mm 1/16

印 张 9.75

字 数 196 千

版 印 次 2011 年 9 月第 1 版 2011 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 308 - 09053 - 7

定 价 35.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

The Review of New Political Economy

新政治经济学评论

新政治经济学评论

The Review of New Political Economy

主 编：汪丁丁

副主编：金祥荣 潘士远 朱希伟 汪淼军

编辑部主任：叶建亮

编辑部成员：（按姓氏笔画排列）

丁 利 王志毅 叶建亮 叶 航 朱希伟 宋华盛 汪淼军
罗卫东 罗德明 钱彦敏 曹正汉 黄先海
蒋岳祥 董毅青 潘士远 魏宝社



北京启真馆

目 录

论文

1. 对 Borda 投票规则渐近性质的探讨 ◆ 徐志浩 · 1
2. 城市化进程与犯罪率——基于经济因素的视角 ◆ 李子联 · 26
3. 利他惩罚——通往演化彼岸的桥 ◆ 戴大荣 · 44
4. 内化道德的理论与实验研究综述 ◆ 关宏宇 朱宪辰 申瑜斐 · 68
5. 经济学述行性的神经语言学解释 ◆ 何梦笔（著） 王兆刚（译） · 89
6. 行为、知识和演化 ◆ 魏宝社 · 114
7. 戴震、凌廷堪、章学诚与现代性在晚期中华帝国的兴起 ◆ 黄 湘 · 137

Content

Papers

- 1 Essay on the Asymptotic Property of Borda Rule ◆ *Xu Zhihao* · 1
- 2 Urbanization Process and Criminal Rate: A Study on
Economic Factors ◆ *Li Zilian* · 26
- 3 Altruistic Punishment: the Bridge Leading to the Other Side
of the Evolution ◆ *Dai Darong* · 44
- 4 The Overview of Experimental and Theoretical Study on Internalized
Norms and Moral ◆ *Guan Hongyu Zhu Xianchen Shen Yujie* · 68
- 5 A Neurolinguistic Approach to Performativity in
Economics ◆ *Carsten Herrmann-Pillath* Translated by *Wang Zhaogang* · 89
- 6 Behavior, Pattern-based Knowledge and Evolution ◆ *Wei Baoshe* · 114
- 7 Dai Zhen, Ling Tingkan, Zhang Xuecheng: The Rise of
Modernity in Late Imperial China ◆ *Huang Xiang* · 137

论文

对 Borda 投票规则渐近性质的探讨

◎ 徐志浩*

摘要: Borda 投票规则因将投票人的次优选择纳入排序考虑而更接近“平等、充分表达意愿”的投票目的,但也受到“不满足 Arrow ‘独立性’标准”、“意愿表达仍不充分”等批评。本文通过形式化的推导,证明在投票人偏好均匀分布且候选项随机产生的条件下, Borda 规则的投票结果对个人、社会真实偏好及其排序几乎处处收敛,由此回应“不满足独立性标准”的批评。投票模拟显示, Borda 规则相比多数票规则具有明显的效率优势。最后,给出 Borda 规则的一般改进形式:打分间隔与投票人效用分布保持足够一致。

关键词: Arrow 标准; Borda 投票; 偏好表达

一 引言

投票是社会成员针对某些涉及公共利益的项目、规则或政策表达自身偏好的非常直接的方式。公共选择的理论认为“加总”投票结果就是集中个人意愿,形成社会意志,从而作出对公共问题的判断。尽管几乎没有人否认在民主社会下,与某个公共事务有关的所有社会成员都有权表达意愿,但对于他们享有多大的意愿表达的自由度以及如何考量并“加总”他们的意愿却没有一致的看法:(1)关于投票人被赋予多大的投票权重,投票规则普遍遵循的是“一人一票”原则,但也有主张对更可能作出正确判断的人给予更大的权重(见 Nitzan and Paroush, 1982; Shapley and Grofman, 1984);(2)关于如何“加总”投票人意愿,分歧则更大,这也是各种投票规则区别彼此的最主要特征。除了“一致通过”和“多数通过”规则间的基本之争,相互间论战最多的恐怕就是 Condorcet 过程和 Borda 计数了(关于他们的争论渊源可参见 Young,

* 徐志浩,北京大学国家发展研究院中国经济研究中心 2010 级硕士生,通信地址:北京大学畅春园 65 楼 133 室;邮政编码:100871; E-mail: xuzhihao322@126.com。作者在此感谢汪丁丁教授在新政治经济学讨论班上对本文提出的有益建议和中国人民大学经济学院聂辉华副教授对本文的前期指导;同时感谢浙江大学数学与应用数学系 2006 级本科的谭越同学所做的计算机模拟辅助工作。文责自负。由于篇幅受限,若读者对 Borda 规则和简单多数规则的投票效率计算机模拟结果及源程序感兴趣,请通过 E-mail 向作者索要。

1995; Condorcet, 1785, 1788; Borda, 1784)^①。

Condorcet 主张的是两两比多数规则 (majority rule) 或是最大似然多数 (maximum likelihood majority) 规则。而 Borda 主张的是考虑所有投票人对所有候选项的偏好程度, 按照从高到低打分, 然后加总每个选项的得分, 最后对所有选项按得分高低进行排序。以存在 m 个候选项为例, 每个投票人对这 m 个选项进行排序并打分, 排在第一的得 $m-1$ 分, 第二的得 $m-2$ 分, 依次递减, 最后一位的选项得 0 分; 接着加总每个选项各自的得分, 并将它们排序, 总分最高者获胜。

然而, Borda 计数规则一经正式提出就遭到了 Condorcet (1788) 的强烈抨击。他坚持自己的“两两比对, 多数获胜原则”, 并举出一个反例, 说明按自己的多数原则选出的候选人是如何在 Borda 规则中落选的 (Young, 1995)^②。同时, 他指出 Borda 投票规则的“要害”——两个候选项的排序关系严重依赖于其他选项。这一点被 Kenneth J. Arrow 所肯定, 并将“两个候选项的社会偏好关系应独立于不相关的候选项 (independence of irrelevant alternatives)”归为一种完美的投票规则的五项标准之一 (Arrow, 1950)^③。

继 Arrow 之后, 公共选择领域的经济学者对 Borda 规则的探讨主要集中在四个方面。

(1) 有关 Borda 规则的投票操控问题。Ludwin (1978) 博弈分析了 Borda 策略性投票过程; Sen (1984) 从数学上严格证明了“Borda 计数及其变形均无法避免策略性投票问题”的结论; Felsenthal (1996) 对 Ludwin 1978 年文章的部分结论作了反驳。

(2) 涉及 Borda 与 Condorcet 规则间的一致性和稳定性的研究以及投票效率的讨论。如 Gardener (1977, 1981), Weber (2002) 以及 Baharad 和 Nitzan (2003)。Weber (1995) 指出, 当选举人数充分大时, Borda 规则几乎是一种完善的投票规则。

(3) 关于 Borda 规则表达个人偏好的充分性。Levin 和 Nalebuff (1995) 指出其运用了一种不充分的“线性偏好”表达方式; Chen 和 Heckelman (2005) 构造了一个多阶段投票模型, 以

① Condorcet 和 Borda 的论述均是在法国科学院会议上的讲稿。Muller 在《公共选择理论》一书中将 Condorcet 和 Borda 规则同归为多数通过规则的其他简单形式。

② 原例见附录 (二)。这里我们考虑一个简单例子: 假定甲、乙、丙、丁、戊五人对 A、B 进行排序投票。甲、乙、丙给出的偏好强弱顺序是 AB, 丁、戊给出的是 BA。那么根据 Condorcet 原则, AB 序列是多数, 根据 Borda 规则 (A 得 3 分, B 得 2 分), 所以都是 A 获胜。现在加入一个选择 C, 假设甲、乙、丙给出的顺序都是 ABC, 丁、戊给出的都是 BCA。按 Condorcet 原则, 仍是 A 获胜, 但按 Borda 规则却是 B 获胜 (A 得 6 分, B 得 7 分, C 得 2 分)。可见按照 Borda 规则, C 的引入可以使社会对 AB 的偏好关系“发生变化”, 尽管引入前后, 每个人对 AB 的偏好关系并没有发生变化。

③ Arrow 投票规则五标准原表述见附录 (三)。

期比 Borda 规则挖掘更多的个人偏好信息；Garcia-Lapresta 和 Martinez-Panero (2002) 则提出了模糊 Borda 改进方法，试图使投票偏好表达更充分。

(4) 继续有关 Borda 等其他规则多大程度上不满足 Arrow 的“独立性”标准的研究。Young (1995) 针对 Arrow (1951) 关于“每种决策规则时不时地都会与此标准相冲突”的论断提出“局部独立性”的概念；Black (1976) 认为前人误解了“Borda 规则违反‘独立性’标准”的评论；Tullock (2005) 富有远见地指出，“Borda 规则不满足 Arrow ‘独立性’标准”这一点在多大程度上是正确的实际上依赖于我们“不能读懂人脑”的缺陷程度。

作为对 (2)、(3) 和 (4) 三个方面研究的粗略延续讨论，本文将独立推导出一个关于 Borda 规则的可以应用的结论，同时结合 Muller 在《公共选择理论》一书中所综述的投票规则“功利主义效率”标准对 Borda 投票规则的效率进行计算机模拟检验。

本文的其余部分将如下安排：在第二部分，首先通过对投票基本目的的重新审视，简要比较 Condorcet 规则和 Borda 规则；其次，在第三部分探讨“偏好充分表达”的可能性；由此引出对本文第四部分的主要结论“在候选项随机产生，个人的偏好分布均匀时，Borda 规则的投票结果具有对个人、社会真实偏好及其排序的依概率渐近性质”的证明，并对“Borda 规则不满足 Arrow ‘独立性’标准”的观点作出回应，同时讨论 Borda 规则“渐近性质”的局限性；再次，通过计算机模拟投票过程，对 Borda 规则的收敛效率进行检验，并将其与最多票数规则的效率进行比较。最后，本文给出 Borda 规则的一般改进形式：打分间隔与投票人效用分布保持足够一致。

二 Condorcet 和 Borda 投票规则的简要比较

之前，大多数讨论 Condorcet 规则和 Borda 规则优劣比较的文献都没有考虑过“到底为什么投票”的问题，就好像它是毋庸置疑的。但笔者认为，重新审视并划分投票的基本目的不仅事关合理选择投票规则，而且对公共选择的基本性质有较大意义。故而，这里以 Condorcet 规则和 Borda 规则为例，简要陈述。

笔者认为，投票过程有两大基本目的：其一是通过多人分析判断减少决策误差，换言之就是为了“更正确地决策”；其二是当个人的分散化异质偏好不能被一一满足时，通过偏好显示和加总形成“社会偏好”，以此作为标准来抉择，使得尽可能多的分散化偏好得以满足，也即“更充分地满足偏好”。

现实中，人们往往关注的是投票的第一个基本目的——“更正确地决策”。Condorcet 的

“两两比对，多数获胜”的规则实质上遵循的就是“谁更可能正确就选谁”的原则。他在1785年向法国科学院宣读他的投票规则的时候引用的例子就是“陪审团裁决”，Condorcet发现陪审团在判断被告是否有罪的这个问题上正确的概率高于每个成员单独判断的概率。Young（1995）指出 Condorcet 多数规则的核心就是近代统计学上的“最大似然估计法”^①。相比之下，暂且撇开 Arrow“独立性标准”的问题，Borda 规则由于采用分别打分、同一选项简单加总的方式，在概率意义上未必能达到“似然最优”。也就是说，从正确决策的角度来看，Borda 规则劣于 Condorcet 规则。不过，笔者认为原始 Condorcet 规则存在一个很大的缺陷，即天然假定“每个人在决策任何一件事时都至少有 50% 的可能会作出正确的判断”。换言之，如果多数人在一半的时间里都不能正确决策^②，那么“真理掌握在少数人手里”的事情就会屡屡发生。

近二三十年，研究者考虑到了不同投票人决策正确率的不同，并进行了 Condorcet 规则的“加权多数”的修正^③，但离现实还是有相当的距离。

另一方面，若从投票的第二个基本目的——“更充分地满足偏好”的角度来看，Condorcet 规则的效果是不及 Borda 规则的。因为偏好没有是非对错，也没有孰优孰劣之分。在承认涉及某项公共事务的所有个人享有平等的发言权的前提下，Condorcet 的“最大似然多数”法则就失去了意义。我们没有理由认为由于一个候选项占据了最多的“第一名”的位置，就应当选择它，因为这只是“不充分意义上的多数”^④的部分偏好。与此对比，Borda 规则通过统一打分区间使得偏好表达平等化，通过一定程度的打分间隔细化使得所有人对所有候选项的偏好都能被惠及到，尽管正如下文将要谈到的，这种“惠及”是不充分的。在不涉及是非对错（如审判）或生死攸关（如通过公投决定开战还是媾合等等）的一般性事务上，Borda 规则可能更为理想。

此外，在这里将“充分表达偏好”与“更正确地决策”的投票目的区分开来也是为了后文展开分析 Borda 规则的渐近性质。

① 作为解释例子，将在附录（四）中给出。

② E. B. Write（1946）写道：“超过一半的人在超过一半的时间里正确，这一点总是受到怀疑。”

③ 简单结论在附录（五）中给出。

④ 这种多数有时优势很微弱，比如 20% 的人选择某个选项 A 作为他们的第一选择。而其他选项各占 18%，16%，16%，15%，15%；另一方面可能只有 5% 的人将 A 作为第二选择，而其他选项各占 40%，30%，9%，8%，8%。

三 偏好充分表达的可能性

(一) 一般意义下个人意愿充分表达的可能性

在讨论 Borda 规则偏好表达的充分性问题之前, 让我们首先来探讨一下一般意义下的“偏好充分表达的可能性”。

设想, 一个人面对一个苹果和一只梨的情形。他可能可以根据以往品尝苹果和梨时所获得的快感大小的经验, 作出这样的判断: “苹果对我的效用大于梨”; 进一步地, 他甚至可以说: “苹果对我的效用等于两只梨”。然而, 他无法准确地说明这种快感或效用是多大。这源于两个原因: 第一, 没有基准, 任何测度都是需要一个“单位”的, 然而效用的测度选择什么物品作为基准呢? 这似乎是基数效用论和序数效用论早就争吵过的问题; 第二, 可能根本不能表达, “只可意会不可言传”的情形在人的主观评价领域是屡见不鲜的。让我们姑且承认存在一个物品 (比如, 梨), 我们可以其效用作为基准单位, 其他物品的效用根据与其比较的倍数关系得到。人们在品尝苹果的时候, 也许在大脑中确实产生了精确的快感程度, 可以准确地以基准物品梨的效用的倍数来衡量。可是, 这种精确的快感可能是转瞬即逝的, 至少无法停留很长时间——不然的话, 人们何必总要吃苹果呢? ——在需要他用信息 (语言、文字等) 来表达时, 足够的精确性已经不存在了。他可能凭借反复吃苹果和梨的经验来逐步精确化苹果和梨的效用关系, 但几乎永远达不到真实值。可以被他人所证实的是无数不等关系, 一个苹果 (效用) 大于两只梨, 三个桃子效用小于两只梨; 一个苹果大于一只梨的程度强于一只梨大于一个桃子的程度, 诸如此类。

现在, 回到投票过程。人们对一个公共项目的评价自然也是一种效用衡量, 所不同于苹果和梨的是, 对其偏好程度的精确表达将更为困难而几乎不可实现。如前所述, 人们只有通过切身体验才有可能获得精确快感 (效用); 只有在体验后较短时间内可以较准确地表达出那种效用的程度; 同时只有通过不断重复体验, 才有可能逼近两个选择产生效用的精确比例关系。这三点在公共选择上基本都无法满足。故而人们要作出对各种选择比较的判断, 很大程度上是基于 (类似的) 经验。这似乎表明了人们想要通过主观努力来真实表达对公共选择的客观存在的精确偏好是不可能的。除非, 正如 Gordon Tullock 在其 2005 年的 “Problems of Voting” 一文中所提到的那样, 随着科技的发展, 出现了可以准确测度人脑快感的 “超级计算机”。

此外还应当考虑 “理性无知” 的影响。如上所述, 即便充分表达偏好在技术上是可以实现

的，作为经济人的投票人，当他觉得通过巨大的主观努力和使用耗能巨大的技术手段来充分表达意愿与这样做导致的公共选择结果（或由其产生的收益）相比是不合算的，就或许宁愿选择模棱两可的意愿表达，屈就限制自由的投票方式。

尽管如以上种种，就笔者本人目前所涉猎的公共选择领域的文章来看，很少有学者明确地提出（尽管他们可能已经在字里行间默认了）“投票人本身无法准确表达自己对某个选项的意愿”的观点。

（二）Borda 规则下个人意愿表达的充分性

Borda 规则使用整点离散的 $[0, 1, \dots, m-1]$ (m 为候选项个数) 的计数方式一直是近年来经济学者对其批评的焦点。比如，Levin 和 Nalebuff (1995) 就认为 Borda 规则运用了一种不充分的“线性偏好”表达方式。

笔者最初接触 Borda 投票规则时，也产生过类似的疑问。为说明其打分方式可能产生的问题，我们可以看笔者构造的例子（表 1）。

	A	B	C	D	E
甲	0	1	2	3	4
乙	0	1	2	3	4
丙	4	3	2	1	0

如表 1，甲、乙、丙分别为 A、B、C、D、E 五个方案投票打分，合计结果为：A，4 分；B，5 分；C，6 分；D，7 分；E，8 分。显然，按照规则，E 是最优方案，应被选择。

现在，假设出现这样一种情形：丙的偏好差别特别大，其对 A 十分偏好，对 E 十分厌恶。而相反地，甲、乙喜好几乎完全同质，对 A、B、C、D、E 的偏好都处在一般的水平，且几乎无差异，他们只是为遵从 Borda 规则才在微小的偏好差异间进行了排序，并打了分（更极端的情况是甲和乙随机地对几乎无差异的五个方案设定了分值）。

这样，“E 被选择”的最终结果对于甲和乙而言，偏好的满足是一般的（或者说无所谓的），但对于丙而言却使其受到了极大的损害。此时原规则下的偏好的加总是否与实际情况相差甚远呢？

再假设，如果可以放大打分区间，不是 0~5 分，而是 0~99 分，甲乙可能会选择给五个方案分别打 33、34、35、36、37 分。但同样的许可交给丙时，他便极可能打 99、79、59、39、19。再进行加总时，得分为：A，165 分；B，147 分；C，129 分；D，111 分；E，93 分。A 成

为了最优方案,此时与众人的整体偏好可能更相吻合。

也就是说,给定 m 个候选项的情形, Borda 规则通过强制地划分 m 个偏好区间 $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, $\dots$, $[m-1, m)$, 并要求投票人按排序结果把候选项安插进某个区间里,并规定只能取区间的最小值,它不允许投票人擅自扩大打分总区间,或是在单个小区间里取一些“平凡”的数值,更不允许在一个区间里同时出现两个候选项,也就是说,给定候选项个数 m , Borda 规则完成的是个人偏好的不充分显示。

(三) Borda 规则下社会意愿充分表达的可能性

行文至此,似乎产生了矛盾。根据本部分第(一)节,我们认为一般意义下,个人自身的充分意愿表达在现有技术、经济条件下几乎不可能;根据第(二)节,给定候选项个数 m ,在 Borda 规则下,个人意愿表达是不充分的,而且所举的例子说明了这种不充分性怎样影响社会偏好表达。基于此,在 Borda 规则下怎么会还存在社会意愿被充分表达的可能性呢?

事实上,这和三个因素有关:投票的基本目的、投票人的效用分布与候选项的个数 m 。在上一部分的文章中,我们讨论了基于决策正确性和基于偏好满足平等性和充分性的两种投票目的,并指出 Borda 规则下的投票目的主要是为了反映社会各个成员的偏好,并形成“绝对平等”意义上的社会偏好。由于 Borda 规则相比 Condorcet 规则更符合“平等充分表达偏好”的投票目的,从而在特定的条件下, Borda 规则可以更充分地表达社会意愿。

在“平等、充分表达偏好”的投票目的下,所有投票人是被“一视同仁”的,无论其对候选项的判断多么具有“经验”或多么“精准”,都只能在同样大的自由空间里表达意愿。具体到 Borda 规则,就是在统一的打分范围内进行调整。尽管 Borda 规则考虑到了投票人对他的次优偏好的表达,但这种“考虑”同样是有限度的,且是“一视同仁”的。

基于此,社会意愿的充分表达就不完全受制于个人意愿的充分表达。因为,“社会意愿表达”要达到的最终目的往往是一系列候选项的排序结果,而不是造成这种结果的精确数值。我们此前强调的个人意愿表达的精准性和充分性都是为社会意愿的排序结果服务的。个人意愿的充分表达、投票规则的精心设计如果可以实现,固然有助于提高社会意愿排序结果(充分表达)的可靠性,但这种可靠性的提高并不是必然通过上述途径才能实现。笔者的分析结论是,在投票人效用分布均匀的条件下,由于 Borda 规则特殊的线性等距打分方式,随着候选项个数 m 的逐渐扩大,某选项的 Borda 得分在分值区间中的比例位置与该选项所产生的效用在效用区间中的比例位置就会趋同。从而通过 Borda 计数可以渐近地反映真实偏好。又由于在“平等、充分表达偏好”的投票目的下,社会偏好是个人偏好的简单线性加总,从而某选项获得的各个

投票人的 Borda 得分的加总值可以渐近地反映社会的真实偏好。在下一部分的文章中,笔者将通过形式化分析探讨 m 和个人、社会意愿表达的关系。

四 Borda 投票规则的渐近性质

在根据上文思路给出形式化的分析之前,我们首先设立一系列有关“平等表达偏好”的假设并构建一个记号体系。

(一) 假设

(1) 在“平等表达偏好”的原则下,任何投票人对所有可能的公共选择候选项的偏好程度(效用)区间被统一为 $[0, 1)$,也就是说默认每个投票人对世界上事物的最大极限评价为“单位 1”,其他事物对其产生的效用可与“单位 1”比较而得出比例数值^①。

投票人之间对某个具体候选项的偏好一般是异质的,但各种偏好程度数值在 $[0, 1)$ 区间上的分布是一致的。

(2) 为分析简便,认为任何两个候选项对任何投票人产生的效用都是有差别的,即投票人面对任意两个候选项时,只能作出一方“严格偏好于”另一方的判断。但对两个候选项加总的社会偏好可以无差异。

(3) 按照“平等表达,平等对待”的投票原则,社会对某一候选项的偏好程度是所有投票人对其偏好程度的简单代数和(线性加总),即遵循功利主义社会福利函数^②。

(4) 对于某项公共事务,我们认为可供选择的候选项(或解决途径)可以是无穷多个的,只要时间足够长。

(5) 特别地,对于某项公共事务,所有候选项对任意一个投票人产生的效用是均匀地分布在该投票人的效用区间 $[0, 1)$ 上的。

(二) 记号定义

(1) 投票人集合: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 其中 n 为投票人个数。

① 这里认为精确效用值是客观存在的,它能被投票人感知,并作出两个事物效用大小间的判断,但不能对外准确表达。

② 关于这种功利主义社会福利函数假设,参见附录(六)。

(2) 候选项集合: 某个参选的候选项集合为 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$, 其中 m 为候选项个数。延续假设 4, 假定针对某项事务的所有候选项构成候选项全集 C , 且它是无穷集合。

(3) Borda 得分: 第 i 个投票人 v_i 对第 j 个候选项 c_j 的打分记作 M_{ij} 。 M_{ij} 可能取 0 到 $m-1$ 的任一整数 ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), 第 j 个选项的总得分记作 M_j , $M_j = \sum_{i=1}^n M_{ij}$ 。 M_j 可能取 0 到 $n(m-1)$ 的任一整数。

(4) 标准化 Borda 得分 (打分): 在 Borda 规则下, 将第 i 个投票人 v_i 对第 j 个候选项 c_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 的打分 M_{ij} 除以候选项个数 m 得到的值称为标准化 Borda 得分 (打分), 并记作 M_{ij}^1 , 显然 M_{ij}^1 可间断地取 $1/m, 2/m, \dots, m-1/m$ 这样的一系列的值。类似地, 还可定义 M_j^1 。

(5) 效用: 任一投票人 $v_i \in V$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 其对候选项集合 C 中任一候选项 c_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 的偏好, 或该候选项对其产生的效用可以被准确地感知为 $u_i(c_j)$, 延续假设 1, $u_i(c_j) \in [0, 1]$ 。

(6) 严格偏好关系: 对于任一投票人 $v_i \in V$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 候选项 c_j 对其产生的效用被感知为 $u_i(c_j)$, c_k 对其产生的效用被感知为 $u_i(c_k)$ ($j, k = 1, 2, \dots, m, j \neq k$)。如果 $u_i(c_j) > u_i(c_k)$, 则称 v_i 对 c_j 严格偏好于 c_k , 记作 $c_j R_i c_k$ 。

(7) 功利主义社会偏好加总: 延续假设 3, 我们称社会对某一候选项的偏好程度是所有投票人对其偏好程度的简单代数之和的加总方式为功利主义型社会偏好加总。

(8) U_f 型精确社会偏好 (序列): 按功利主义社会偏好加总各个候选项 c_j 对所有投票人产生的效用 $U_f(c_j) = \sum_{i=1}^n u_i(c_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$ 。我们称为 $(U_f(c_1), U_f(c_2), U_f(c_3), \dots, U_f(c_n))$ 为 U_f 型精确社会偏好序列。进一步地, 将各 (总) 效用值按从大到小排序, 得到的序列 $(U_f(c_{(1)}), U_f(c_{(2)}), U_f(c_{(3)}), \dots, U_f(c_{(n)}))$, 称为 U_f 型精确社会偏好排序序列。

(三) 理论推导

命题 1^①: 任一投票人 v_i 对候选项集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 经过标准化 Borda 打分后的排序结果与普通 Borda 规则计数后的排序结果是一致的。

推论 1: 候选项序列 $\{c_j\}$ 在标准化 Borda 打分后对应的总得分序列 $\{M_j^1\}$ 的排序结

① 证明见附录 (七)。

果与其在普通 Borda 规则下的 $\{M_j\}$ 排序结果是一致的。

证明类似命题 1, 不再赘述。

命题 2^①: 在 Borda 规则下, 任意投票人 v_i 对任意候选项 c_j 的标准化 Borda 打分具有对其真实偏好的几乎处处收敛的渐近性质。具体地, 随着已有候选项集合 C 的不断随机性扩大, 每个投票人对任一已有候选项的标准化 Borda 计分将越来越可能反映出其对该候选项的准确的偏好程度。

形式化的表述为: 对 $\forall i, j, p\{\lim_{m \rightarrow \infty} (M_j^i(m) - u_i(c_j)) = 0\} = 1$, 其中 $M_j^i(m)$ 表示存在 m 个候选项时, v_i 对 c_j 的标准化 Borda 打分。

推论 2: 在 Borda 规则下, 任意候选项 c_j 的标准化 Borda 总得分 M_j^1 具有对关于其的社会总偏好 $U_f(c_j)$ 的几乎处处收敛的渐近性质。

形式化表述: 对 $\forall j, p\{\lim_{m \rightarrow \infty} (M_j^1(m) - U_f(c_j)) = 0\} = 1$ 其中 $M_j^1(m)$ 表示存在 m 个候选项时, c_j 的标准化 Borda 总得分。

推论 2 的证明易根据几乎处处收敛的有限可加性质得到。由此, 还可以推测, 序列 $\{M_j^1(m)\}$ 与 $U_f(c_j)$ 所构成的 U_f 型精确社会偏好 (序列) 之间的关系。

推论 3^②: 在 Borda 规则下, 给定某个基准候选项集合 $C_i = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ (m 是给定的常数), 并向其中不断增补候选项 $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_{m+n}$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时, 基准候选项集合 C_i 所对应的序列 $\{M_j^1(m+n)\}$ 将几乎处处收敛于其所对应的 U_f 型精确社会偏好。进一步地, 这种收敛是一致性的。

延伸性质: 事实上, 如果 n 充分大, 根据极限的保号性, 序列 $\{M_j^1(m+n)\}$ 按大小排序后的结果 $\{M_{(j)}^1(m+n)\}$ 所对应的下标序列 $\{(j^1)\}$ 应当极可能是稳定的, 从而极可能与序列 $\{U_f(c_i)\}$ 按相同规则排序后所对应的下标序列 $\{(i)\}$ 保持一致。同时, 根据推论 1, $\{M_j^1(m+n)\}$ 对应的 $\{(j)\}$ 也应与 $\{(i)\}$ 保持一致。我们不妨称这种性质为 “Borda 规则关于社

① 证明见附录 (八)。

② 证明见附录 (九)。