原书缺页

基 础 科 学（3）

——台港及海外中文报刊资料专辑（1986）

北京图书馆文献信息服务中心剪辑

书目文献出版社出版

（北京市文津街七号）

北京新丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

787×1092毫米 1/16开本 5 印张 128 千字

1987年3月北京第1版 1987年3月北京第1次印刷

印数1—3,000 册

统一书号：13201·2 定价：1.30 元

〔内部发行〕

出版说明

由于我国“四化”建设和祖国统一事业的发展，广大科学研究人员，文化、教育工作者以及党、政有关领导机关，需要更多地了解台湾省、港澳地区的现状和学术研究动态。为此，本中心编辑《台港及海外中文报刊资料专辑》，委托书目文献出版社出版。

本专辑所收的资料，系按专题选编，照原报刊版面影印。对原报刊文章的内容和词句，一般不作改动（如有改动，当予注明），仅于每期编有目次，俾读者开卷即可明了本期所收的文章，以资查阅；必要时附“编后记”，对有关问题作必要的说明。

选材以是否具有学术研究和资料情报价值为标准。对于某些出于反动政治宣传目的，蓄意捏造、歪曲或进行人身攻击性的文章，以及渲染淫秽行为的文艺作品，概不收录。但由于社会制度和意识形态不同，有些作者所持的立场、观点、见解不免与我们迥异，甚至对立，或者出现某些带有诬蔑性的词句等等，对此，我们不急予置评，相信读者会予注意，能够鉴别。至于一些文中所言一九四九年以后之“我国”、“中华民国”、“中央”之类的文字，一望可知是指台湾省、国民党中央而言，不再一一注明，敬希读者阅读时注意。

为了统一装订规格，本专辑一律采取竖排版形式装订，对横排版亦按此形式处理，即封面倒装。

本专辑的编印，旨在为研究工作提供参考，限于内部发行。请各订阅单位和个人妥善管理，慎勿丢失。

北京图书馆文献信息服务中心

目　　次

（下转封三）

組合專題

一一對應原理在組合學上的應用

王子俠

在組合學裡，有一些基本的原理 例如加法原理、乘法原理、鴿籠原理、反射原 理、最小數原理等等，這些原理的內容，看起 非常淺顯，但用途非常廣，尤其在計數（co nting）方面更是不可或缺的工具。在這篇短 裡，我們簡單地介紹其中的一個一一對應原 （The principle of one-to-one corres ndence）。這個原理的內容如下：

一一對應原理：以A與B表兩個集 ，若能找到一個由A至B的一一對應（one-t ne correspondence）；換言之，一個一對 （one-to-one ）且映成（ onto)的函數， $|A|=|B|$。

下面我們分類介紹一些這個原理的應 。

§1 一一對應原理最淺顯的應用

我們先看幾個可以用一一對應立刻解決的問題。

例一：假定n名乒乓選手參加一項單打淘汰賽，每兩人賽一場，負者淘汰（無和局），試問一共要比賽幾場，才能產生冠軍？

解：要淘汰一名選手，必須舉行一場比賽。反之，每一場比賽必定淘汰一名選手。換句話說，在比賽的場數與被淘汰的選手總數之間有一一對應的關係。要產生冠軍，必須淘汰$n-1$名選手，故需舉行$n-1$場比賽。

例二：將 a、b、c、d、e、f、g 這七個英文字母排成一直線，若 a 必須在 b 之左邊（不一定要相隣），試問有幾種排法？

解：對任何一種滿足條件之排法，若將 a 與 b 之位置互換，則得到一種不滿足條件之排法，反之亦然。換言之，在所有滿足條件的排法與所有不滿足條件的排法之間有一一對應的關係。因所有排法的總數為 $7!$，故所求之數為 $(7!)/2=2520$。

例三：n 名網球選手參加一項比賽（$n\geq 2$），每名選手均與其他 $n-1$ 名選手比賽一場，（無和局）。若以 w_i 及 ℓ_i 分別表第 i 號選手獲勝及落敗之場數，試證恆有 $\sum_{i=1}^{n} w_i=\sum_{i=1}^{n}\ell_i$。

證：每一場比賽有一人獲勝，也有一人落敗，故在所有的獲勝場數和落敗場數之間有一一對應的關係，所以恆有 $\sum_{i=1}^{n} w_i=\sum_{i=1}^{n}\ell_i$。

註：事實上，$\sum_{i=1}^{n} w_i^2=\sum_{i=1}^{n}\ell_i^2$ 也恆成立，但證明就不是這麼簡單了。

§2 有限集合之子集合總數

任何唸過一點集合論的人都知道含 n 個元素的集合共有 2^n 個子集合。這個命題至少有四、五種不同的證法，繁簡程度相差不大。下面我們給兩個證明，它們都用到一一對應原理，我們以 S 表一含 n 個元素的集合，並以 $P(S)$ 表所有 S 之子集合所構成之集合，即 $P(S)=\{A|A\subset S\}$。

證明一：我們用歸納法，當 $n=0$ 時，$S=\phi$（空集合），故 $P(S)=\{\phi\}$，而 $|P(S)|=1=2^0$。假定對某個固定之 $n\geq 0$ 及所有 $|S|=n$ 之集合 S，$|P(S)|=2^n$ 均成立，而 T 為滿足 $|T|=n+1$ 之一集合。固定 $x_0\in T$ 並考慮 $S=T\setminus\{x_0\}$。因 $|S|=n$，故 $|P(S)|=2^n$。將 $P(T)$ 分解成 $P(T)=F_1\cup F_2$，此處 $F_1=\{X|X\subset T$ 且 $x_0\notin X\}$，$F_2=\{Y|Y\subset T$ 且 $x_0\in Y\}$。則顯然 $F_1\cap F_2=\phi$。因 $F_1=P(S)$，故 $|F_1|=|P(S)|=2^n$。另一方面，我們定義函數 $f: F_2\to P(S)$ 為 $f(Y)=Y\setminus\{x_0\}$（$Y\in F_2$），則 f 顯然為一對一函數（因為若 Y_1、$Y_2\in F_2$ 而 $f(Y_1)=f(Y_2)$，則 $x_0\in Y_1$，$x_0\in Y_2$ 且 $Y_1\setminus\{x_0\}=Y_2\setminus\{x_0\}$，故 $Y_1=Y_2$）又若 $Z\in P(S)$，令 $W=Z\cup\{x_0\}$，則 $W\in F_2$ 且 $f(W)=W\setminus\{x_0\}=Z$。故 f 為映成函數。於是由一一對應原理得 $|F_2|=|P(S)|=2^n$，從而 $|P(T)|=|F_1|+|F_2|=2^n+2^n=2^{n+1}$，證明完畢。

證明二：以 F 表所有從 S 到集合 $\{0,1\}$ 之函數，即 $F=\{f|f: S\to\{0,1\}\}$ 顯然 $|F|=2^n$。故我們僅需找到一個 $P(S)$ 與 F 間的一一對應即可。對任意 $A\subset S$，我們定義 A 之特徵函數（Characteristic function）χ_A 如下：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1\text{若 } x\in A\\0\text{若 } x\notin A\end{cases};\ x\in S$$

因 $\chi_A: S\to\{0,1\}$，故 $\chi_A\in F$。

再定義函數 $\phi: P(S)\to F$ 如下：若 $A\subset S$，則 $\phi(A)=\chi_A$。現證明 ϕ 為一一對應。若 A、$B\subset S$ 且 $\phi(A)=\phi(B)$，則 $\chi_A=\chi_B$。故 $x\in A\Leftrightarrow\chi_A(x)=1\Leftrightarrow\chi_B(x)=1\Leftrightarrow x\in B$，即 $A=B$。故 ϕ 為一對一函數，若 $f\in F$，令 $A=\{x|x\in S$ 且 $f(x)=1\}$，則 $\chi_A(x)=1\Leftrightarrow x\in A\Rightarrow f(x)=1$，故 $\chi_A=f$，即 $\phi(A)=f$。故 ϕ 為映成函數。換言之，ϕ 為 $P(S)$ 與 F 間之一一對應，從而 $|P(S)|=|F|=2^n$，證明完畢。

練習題一：若 $|S|=n$，試問 S 有多少含偶數個元素之子集合？有多少個含奇數個元素之子集合？

練習題二：考慮集合 $S=\{1,2\cdots\cdots,n+1\}$。

(a)試證在 S 之子集合中，所含元素最大者為 j 之子集合的數目為 2^{j-1}。

(b)利用(a)導出恆等式 $1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n=2^{n+1}-1$。

§ 3　與幾何圖形有關的一些計數問題

下面這個例子相信任何學過排列組合的人都曾看到過。

例四：在圓周上有 n 個點（$n\geq 3$）。將所有點兩兩相連，假定無三條連線在圓內共點，試問在圓內一共有多少交點？

解：每一個交點是某一個圓內接四邊形兩個對角線的交點。反之，任一個圓內接四邊形之兩根對角線必產生一交點。由假定，無三條連線在圓內共點，故在所有交點與所有圓內接四邊形之間有一一對應存在。但因任何四點決定一個內接四邊形，故所求之交點數目為 $C(n, 4)$。

註：$C(n, k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 係所謂之二項係數，又若 $n<k$，則定義 $C(n, k)=0$。

練習題三：在圓周上有 n 個點（$n\geq 3$）。將所有點兩兩相連。假定無三條線在圓內共點，試問由這些線段構成而三個頂點全在圓內部之三角形一共有多少？

練習題四：假設 L_1 與 L_2 為兩條平行線，在 L_1 與 L_2 之上分別取定 n_1 及 n_2 個點。將 L_1 上之 n_1 個點與 L_2 上之 n_2 個點兩兩相連。假定這些線段在 L_1 與 L_2 所夾之區域 D 之內無三條共點，試問在 D 內共有多少交點？

§ 4　正整數的有序分割

所謂正整數的有序分割（ordered partitions）即將一個正整數 n 寫成一些正整數的和，但次序考慮在內。例如 $3=3=1+2=2+1=1+1+1$ 為 3 的 4 種有序分割。決定 n 之有序分割的總數 $f(n)$ 非常簡單（雖然無序分割的數目相當難求）。我們現在用一種很通俗的方式來敍述這個問題。很顯然地，下面這個問題與決定 $f(n)$ 之值完全相等。

例五：小華有 n 塊完全相同的巧克力糖。假定他每天至少吃一塊吃完為止，試問一共有幾種吃法？

解：顯然地，所求之數就是 $f(n)$。我們將巧克力糖用黑點 • 表示，排成一行。每兩點之間有一空位，故共有 $n-1$ 個空位。若在一些空位上加上一分割符號 |，則顯然得到一種吃糖的方法。（例如 ••|•••|•|•• 表示一種在四天之內吃八塊糖的方法：第一天兩塊，第二天三塊，第三天一塊，第四天兩塊）反之，任何一種滿足條件的吃糖的方法可以由這種點線圖代表。所以在所有滿足條件的吃糖方法與所有引進分割符號的方法中有一一對應的關係。但在每個空位可以引進或不引進分割符號，也就是說有兩種選擇，故所求之總數為 $2\times 2\times\cdots\cdots\times 2$（$n-1$ 次）$=2^{n-1}$。

註：若 n 塊巧克力糖全不相同，問題就複雜的多。一個等價的敍述方法是若有 n 個人參加賽跑，按結果排名次（同時抵達終點的，名次相同），試問一共有多少種可能的結果？這個問題可以用遞迴式（recurrence reletion）的方法解決。

§ 5　重複組合數

任何學過基本排列組合的人都知道若 S 為含有 n 個元素的集合，而 $0\leq k\leq n$，則從 S 中選取 k 個相異元素一共有 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

種方法。若是准許重複，情形就不太相同。我們先來看一個簡單的例子：假定$n=3$，$k=2$，$S=\{a,b,c\}$，則從S中選取兩個相異元素共有$\binom{3}{2}=3$種方法：即$\{a,b\}$、$\{a,c\}$及$\{b,c\}$。但若允許重複，則顯然還有$\{a,a\}$、$\{b,b\}$和$\{c,c\}$這三種方法，故共有六組解。那麼在一般情形下，一共有多少組解呢？很有趣地是這個問題的答案可以經由巧妙地運用一一對應原理而得到。

定理一：若准許重選，則從n個相異物件中選取k個物件的方法總數為$C(n+k-1,k)$。

證明：以S表一含n個元素的集合。在不失一般性的假設下，可令$S=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$。令$T=\{1,2,\cdots\cdots,n,n+1,\cdots\cdots,n+k-1\}$。以$\mathscr{A}$表所有從$S$中選取$k$個元素（准許重複）的方法的集合，而以$\mathscr{B}$表所有從$T$中選取$k$個元素（不准重複）的方法的集合，則顯然$|\mathscr{B}|=C(n+k-1,k)$，故我們只需證明$|\mathscr{A}|=|\mathscr{B}|$即可，換句話說，我們只要找到一個$\mathscr{A}$與$\mathscr{B}$之間的一一對應就可以了。為方便計，我們將$\mathscr{A}$中的元素依不遞減的順序排列，也就是說如果$\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\}\in\mathscr{A}$，則有$1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\cdots\leq i_k\leq n$。類似地，我們將$\mathscr{B}$中的元素依漸增的順序排列，所以如果$\{j_1,j_2,\cdots\cdots,j_k\}\in\mathscr{B}$，則$1\leq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_k\leq n+k-1$。我們定義函數$f:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$如下：$f(\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\})=\{i_1,i_2+1,i_3+2,\cdots\cdots,i_k+k-1\}$。若$1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\cdots\leq i_k\leq n$，則$1\leq i_1<i_2+1<i_3+2<\cdots\cdots<i_k+k-1\leq n+k-1$，故$f$的確是由$\mathscr{A}$至$\mathscr{B}$的一個函數。若$\{i_1^1,i_2^1,\cdots\cdots,i_k^1\}\in\mathscr{A}$而$f(\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\})=f(\{i_1^1,i_2^1,\cdots\cdots,i_k^1\})$，則$\{i_1,i_2+1,\cdots\cdots,i_k+k-1\}=\{i_1^1,i_2^1+1,\cdots\cdots,i_k^1+k-1\}$，故$\{i_1,i_2,\cdots\cdots,i_k\}=\{i_1^1,i_2^1,\cdots\cdots,i_k^1\}$，即$f$是一對一函數。若$\{j_1,j_2,\cdots\cdots,j_k\}\in\mathscr{B}$，則$1\leq j_1<j_2<\cdots\cdots<j_k\leq n-k+1$，故$1\leq j_1\leq j_2-1\leq\cdots\cdots\leq j_k-k+1\leq n$，即$\{j_1,j_2-1,\cdots\cdots,j_k-k+1\}\in\mathscr{A}$。但顯然地，$f(\{j_1,j_2-1,\cdots\cdots,j_k-k+1\})=\{j_1,j_2,\cdots\cdots,j_k\}$，故$f$為映成函數所以結論$f$是$\mathscr{A}$與$\mathscr{B}$之間的一個一一對應，從而$|\mathscr{A}|=|\mathscr{B}|=C(n+k-1,k)$。

例六：假定某糕餅店有8種不同的蛋糕，每種至少有12個，試問有多少種不同的方法可以購買一打？

解：用上面的定理取$n=8$，$k=12$，便得

總數$C(8+12-1,12)=\binom{19}{12}=50388$。

練習題五：若n粒相同的骰子一起投擲，試問可以出現多少種不同之結果？（當然，每種情況出現的或然率並不相同，但我們不予考慮。）

§6 物件的分配問題

在組合學中，物件的分配問題（distribution of objects）是一個相當基本而重要的問題，它所問的是「有多少種方法可以將n個物件分配到k個空盒內？」這個問題變化很多，答案不但要決定於物件是否相異，盒子是否相同，還要考慮其他可能的條件（例如每個盒子至少得放一個物件等等）。我們若用在§5中所得到的重複組合數公式，可以立刻得到下面這個定理。

定理二：將n個相同物品分到k個相異盒子中的方法總數為$C(n+k-1,n)$。

證明：先將盒子編號，再將每個物品用它

所屬之盒子的號碼加以編號，則可以看出每種分配的方法相當於從 k 個盒子中，每次取一個，准許重複，共取 n 次，故由定理一得所求之總數為 $C(k+n-1,n)$，亦即 $C(n+k-1,n)$。

例七：假定 7 顆相同的糖菓分給三兄弟，試問有多少種分法？又若最小的弟弟至少要得一顆，則有幾種分法？

解：用定理二，取 $n=7$，$k=3$，便得總數 $C(7+3-1,7)=\binom{9}{7}=36$。若最小的弟弟至少要得一顆，只須先給他一顆（因糖菓全相同，故只有一種方法），再分配其他 6 顆，取 $n=6$，$k=3$，便得總數 $C(6+3-1,6)=\binom{8}{6}=28$。

練習題六：將 n 個相同物品分到 k 個相異盒子中，若每個盒子必須至少裝 a 個物品（$ak\leq n$），試證一共有 $C(n-ak+k-1,k-1)$ 種方法。

§7 方程式 $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_k=n$ 之

方程式 $x_1+x_2+x_3=4$ 有多少組非負整數解？例如 $(4,0,0)$，$(2,1,1)$ 及 $(1,1,2)$ 是三組不同的解。稍為算一下，可以得到 15 組解。那麼一般情形如何呢？這個問題的答案可以用定理二立刻得到。

定理三：方程式 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n$ 之非負整數解之總數為 $C(n+k-1,n)$。

證明：因為每一組非負整數解相當於將 n 個全同的 1 放到 k 個不同的盒子（位置）中的一種分配方法，故由一一對應原理及定理二，得知總數為 $C(n+k-1,n)$。

系一：方程式 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k=n$ 之正整數解之總數為 $C(n-1,k-1)$。

證明：因要求對 $i=1,2,\cdots\cdots,k$，$x_i\geq 1$，故相當於在每個位置先放一個 1，再分配其他的 $n-k$ 個 1。故總數為 $C(n-k+k-1,n-k)=C(n-1,n-k)=C(n-1,k-1)$。

假定每個 x_i 均有一個下界的限制，換言之，若要求 $x_i\geq a_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,k$，那麼求解之總數只需要用一個簡單的代換 $y_i=x_i-a_i$ 再用定理三即可。

練習題七：在方程式 $x+y+z=24$ 的正整數解中有多少組滿足 $x\geq 2$，$y\geq 3$ 及 $z\geq 4$ 的條件？

註：如果每個 x_i 有上界的限制，換言之，若要求 $x_i\leq b_i$，或者更一般地要求 $a_i\leq x_i\leq b_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,k$，那麼求整數解之總數需要用到所謂的容斥原理（The principle of Inclusion and Exclusion）或者生成函數（Generating Function）。有興趣的讀者可以參閱夏宗滙教授的「組合學中的生成函數」一文（本刊第一卷，第三期，pp. 51—58）

§8 在條件限制下的組合總數

從 $\{a,b,c,d\}$ 這個集合中在准許重複的假定下，要選取 24 個元素，但 a 與 b 必須出現偶數次，而 c 與 d 必須出現奇數次，試問一共有多少種方法？諸如此類的問題在組合學中比比皆是。一般而言，要用生成函數才能找到答案。但在某些例子，若巧妙地應用一一對應原理，可以很快地找到答案。我們最後來看看兩個這樣的例子，其中第一題是 1956 年

Willicm Lowell Putnam 數學競賽中的一條試題我們把它敍述成一條定理。

定理四：從$\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$中選出了相異的數，但不准包含任何相隣兩數，共有$C(n-k+1, k)$種方法。（請和§5定理一之公式相比較）

證明：令$S=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$。假定$a_1<a_2<\cdots\cdots<a_k$係$S$中滿足條件的$k$個數，則有$a_1\geq 1$，$a_k\leq n$且$a_{i+1}-a_i\geq 2$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k-1$。考慮$b_i=a_i-i+1$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k$，則$b_1=a_1\geq 1$，$b_k=a_k-k+1\leq n-k+1$，且$b_{i+1}-b_i=(a_{i+1}-i)-(a_i-i+1)=a_{i+1}-a_i-1\geq 1$，$i=1, 2, \cdots\cdots, k-1$，故得$1\leq b_1<b_2<\cdots\cdots<b_k\leq n-k+1$。換言之，$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_k$爲$\{1, 2, \cdots\cdots, n-k+1\}$中$k$個相異的數。反之，若$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_k$爲$\{1, 2, \cdots\cdots, n-k+1\}$中$k$個相異的數，則極易驗證$a_i=b_i+i-1$爲$S$中滿足所述條件的$k$個數。又函數$f(a_i)=a_i-i+1$顯然爲一對一（參看定理一之證明），故在所有$S$中滿足所述條件之$k$個數與所有$\{1, 2, \cdots\cdots, n-k+1\}$中相異的$k$個數之間有一一對應的關係存在。所以所求選取方法之總數爲$C(n-k+1, k)$。

我們最後一個例子的證明可以稱得上「精彩」

例八：一個袋中裝有n個沒有區別的黑球和n個沒有區別的白球。今從袋中逐一取出所有的球，試問在取球過程中至少有一次留在袋裡的白球比黑球多的取球方法一共有幾種？

解：以A表所有滿足所述條件的取球方法之集合，又以B表所有從一裝有$n+1$個黑球及$n-1$個白球的袋中逐一取球之方法之集合。對於A（或B）中之任一元素，必然在某個第$2k+1$次取球後，取出之黑球總數第一次超過取出之白球總數。今將第$2k+2$次及以後所有取出之球之顏色由黑塗白，由白塗黑，則得到B（或A）中之一元素。這種對應的方法顯然是一對一且映成，於是$|A|=|B|=C(2n, n+1)$。

上面我們概略地介紹了一些一一對應原理在組合學上應用的例子。類似的例子和問題相當多，可以說是不勝枚舉。只要多看，多作，慢慢就可以融會貫通，當然，要能夠熟練、巧妙地運用這個原理有時還需要一點「靈感」，但這也正是數學可愛及引人入勝的地方，有興趣的讀者不妨唸唸下面的參考資料中所列的幾本書。

參考資料

1. K.P. Bogrt, Introductory Combinatorics, Pitman.
2. R.A. Brualdi, Introductory Combinatorics, North-Holland.
3. D.I.A. Cohen, Basic Techniques in Combinatorial Theory, John Wiley & Sons.
4. R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics, Addison-Wesley.
5. F.S. Roberts, Applied Combinatorics, Prentic-Hall.
6. A. Tucker, Applied Combinatorics, John Wiley & Sons.

——本文作者任敎於加拿大Wilfrid Laurier大學數學系——

（原载：数学传播季刊〔台〕 1986年 10卷 1期 22—27页）

組合專題

組合學：趨勢與例證

K. Baclawski 著
李國偉 譯

組合學（Combinatorics）是目前數學裏很活躍的一科，有充分的理由相信它未來會更活躍。組合學發展裏的一項趨勢是，愈來愈常使用別科數學的方法解純粹組合學的問題。數學裏這類交流現象最爲人熟知的例子便是代數拓樸學，拓樸與代數的問題互相轉換，以求有效的解決方式。現在組合學也充分利用這種手法，本文正是要用兩個實例來說明它的妙用。

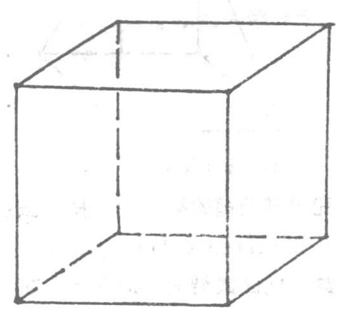
第一個例子取自凸多面體理論（theory of convex polytopes），凸體理論不僅歷史久遠，而且有重要的應用，特別是在線性與凸性數學規畫上。但是我們要談的「面數問題」最近才獲得解決，而出人意表的是，解法中用到Cohen-Macaulay 環理論裏不太簡單的結果。

第二個例子則取材自組合學中新開發的一章：離散固定點理論（Discrete fixed point theory）。這片天地裏已發現好些美妙新奇的結果，令人深深感覺到一套漂亮的理論正有待全力開拓。

作者僅向Gian-Carlo Rota 致最高的謝意，他一直是觀念與鼓勵的來源。

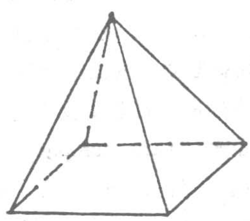
凸多面體的面數

凸多面體是歐氏n維空間E^n裏用線性等式或不等式定義的有界（bounded）子集合。這種幾何體的邊界由不同維數的面（face）所構成。最高維數的各面稱爲界面（facet），令界面的維數爲d。所謂頂點（vertex，或稱爲端點 extreme point）就是維數爲0的面，邊即爲維數爲1的面，依次類推。令f_k爲維數爲k的面的總數。我們稱f_k爲多面體的第k個面數（face number），而（$d+1$）重組（f_0，f_1，……，f_d）稱爲面向量（face vector）。例如E^3中的正立方體有8個頂點，12條邊，6個界面，所以它的面向量是（f_0，f_1，f_2）=（8，12，6）。

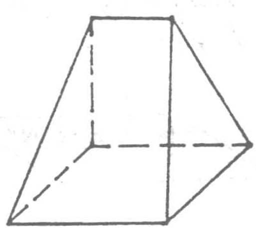


假如多面體的內部不是空集合，則第d個面數f_d代表需要定義出此多面體的最簡限制條件（nonredundant constraint）的數目。一個很自然有關「難度」（complexity）的問題，就是f_d已知時，如何找出每個面數f_i的上限。野心更大的問題是如何刻畫（characterize ）能成爲面向量的（ $d+1$ ）重組。這類問題令人感興趣的理由不僅是它內在的美感，也因爲可以應用到線性規畫等相關問題的難度研究上。

凸多面體中最重要的一類是**單純凸體**（ simple polytope ），也就是說每一個維數爲 k 的面，都恰好包含在 $d-k+1$ 個界面裏。粗略的說「隨意」或「一般」的限制條件界定了單純凸體，更準確的說，任何給定的凸體，都可將其界面略加挪動而改變成單純凸體。在挪動的過程中，界面數不會改變，而其他面數不會減少。證明請參看McMullen-Shephard（1971）。例如方底金字塔不是單純凸體，但是把兩邊的界面拉開一些就造成了一個單純凸體。



面向量：（5，8，5）



面向量：（6，9，5）

研究單純凸體的第一步是按下法造一個差**數三角**（ difference triangle ），從高維數到低維數，把面數沿對角線寫下，在逆向對角線上寫一串1：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & f_d & & & \\
 & & 1 & & & & f_{d-1} & & \\
 & 1 & & & & & & f_0 & \\
1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

一般情形

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & & \\
 & & 1 & & & & 12 & & \\
 & 1 & & & & & & 8 & \\
1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

正立方體

然後在相鄰一對數下方，寫上右數減左數的差，以正立方體爲例，最後可得

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 12 & & \\
 & 1 & & 4 & & 7 & & 8 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 & &
\end{array}
$$

差數三角的最底下一列稱爲凸體的 **h 向量**。一般而言，h 向量是（ $d+2$ ）重組（ h_0 ，h_1 ，……，h_{d+1} ），而 $h_0=1$ ，$h_1=f_d-d-1$ 。不難證明 h 向量可以決定面向量；事實上每一個面數都是 h 數的非負整數係數的線性組合。因此由 h 的上限可導出面數的上限，但反之不必然。而刻畫 h 向量與刻畫面向量是等價的問題。

從正立方體的 h 向量中馬上可以看出它的對稱性，即從左到右或從右到左讀來都一樣。此事並非巧合，其實等價於Dehn-Sommerville 等式。我們可用Euler特徵數來論證單純凸體 h 向量的對稱性，請看McMullen-Shephard（ 1971 ）。不過Dehn-Sommerville等式沒有強到刻畫出所有可能的 h 向量，h 向量還有一個特徵是 h 數不會增加的「太快」。

Motzkin（1957）最早提出控制 h 數增長的上限推測（ Upper Bound Conjecture ）：

$$0\leqslant h_k\leqslant\binom{h_1+k-1}{k}=\binom{f_d+k-d-2}{k}$$

最後由McMullen（ 1971）證得。McMullen的證明是把頂點適當的排以順序，使得面數的計算變得十分方便，這種排列頂點的順序稱爲**去殼**（ shelling ），而單純凸體可以去殼則已由Bruggesser and Mani（ 1971 ）證出。

McMullen 進一步推測 h 向量滿足更強的條件。在敘述此條件前需要引入一些記號。不難證明對於任何非負整數 a 與正整數 k，都存有唯一的一組整數 j，m_j，……，m_k 滿足 $m_k > m_{k-1} > \cdots\cdots > m_j \geqslant j \geqslant 1$ 並且

$$a=\binom{m_k}{k}+\binom{m_{k-1}}{k-1}+\cdots\cdots+\binom{m_j}{j}$$

序列 a_1，a_2，……稱爲**M—序列**的條件是：對任何 $k \geqslant 1$ 均有

$$0 \leqslant a_{k+1} \leqslant \binom{m_k+1}{k+1}+\binom{m_{k-1}+1}{k}+\cdots\cdots+\binom{m_j+1}{j+1}$$

其中 j，m_j，……，m_k 是令 $a=a_k$ 從前式中得出。McMullen 推測凸體的 h 向量均爲 M 序列，雖然McMullen 在證明上限推測的同時，是以其極強的幾何直觀作出這個推測，但最後證明推測的概念却去幾何甚爲遙遠。

在討論McMullen 推測的證明前，我們又到一個表面看起來不太相關的課題，M 序列的命名並非因McMullen 所生，而是用以紀念 Macaulay（ 1927 ）證明的下列結果。在多項式環中設定一組齊次多項式爲零，得到一個可換環 S：

$$S=Q[x_1,\cdots,x_n]/(P_1(x),\cdots,P_m(x))$$

此處 Q 代表有理數體，$Q[x_1,\cdots,x_n]$ 就是以 x_1，……，x_n 爲變元的有理係數多項式環。因爲 $P_1(x)=P_1(x_1,\cdots\cdots,x_m)$，……，$P_m(x)=P_m(x_1,\cdots\cdots,x_m)$ 諸多項式爲齊次式，因此可以談論 S 中某齊次式所在類的次數（degree)。若 S 中 k 次多項式類看作有理向量空間時的維數爲 g_k，Macaulay 證明 g_1，g_2，……是 M 序列。

Macaulay 定理：若 $P_1(x_1,\cdots\cdots,x_n)$，……，$P_m(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ 為齊次多項式，而 S 為商環

$$S=Q[x_1,\cdots\cdots,x_n]/(P_1(x),\cdots\cdots,P_m(x))。$$

又若 S_k 是 S 的 k 次齊次部分，則維數序列 $\dim_Q(S_1)$，$\dim_Q(S_2)$，……是 M 序列。

Macaulay 在他的證明中，先把定理化簡到證明特殊狀況當 $P_1(x)$，……，$P_m(x)$ 均爲單項式的情形，因爲對付單項式的方法是純粹「組合」性質的。他利用一種「壓縮」的方法達成化簡的目的。S 中固定次數的獨立單項式，可以改換爲在某種順序上最靠前面的同樣多的單項式。M 序列中那些二項式係數正好計算了壓縮後各類單項式的總數。Clements and Lindström（ 1969）推廣了這種技巧，並且使 Kruskal（ 1963 ）與 Katona（ 1966 ）的定理成爲特例，Metropolis and Rota（ 1978 ）則推廣到立方體的類似情形。這方面的綜合報導請看 Greene and Kleitman（ 1978 ）。

因爲Macaulay 定理與McMullen 推測都用到 M 序列的概念，正強烈暗示兩者之間有某種關聯，而 Stanley（ 1975 ）終於建立起這種關聯，他證明了下列事實。令 P 爲單純凸體，其界面構成的集合爲 $\mathfrak{F}$。對每一個界面 $F \in \mathfrak{F}$，$x(F)$ 爲一變元。在多項式環 $Q[x(F) \mid F \in \mathfrak{F}]$ 中，當 $F_1 \cap F_2 \cap \cdots\cdots \cap F_m = \varphi$ 時，設定單項式 $x(F_1)x(F_2)\cdots\cdots x(F_m)$ 爲零，得到商環叫做 R。R 自然承載了有關凸體的組合訊息，其實單項式 $x(F_1)x(F_2)\cdots\cdots x(F_m)$ 爲零的充要條件爲 $F_1 \cap F_2 \cap \cdots\cdots \cap F_m$ 是 P 的一個界面（各 F_i 不必互異），這些單項式形成 R 的一個基底。

Stanley 利用Macaulay有關環論的一個觀念，來關聯起 R 與面向量。前面定義的那種環 S 滿足下述條件時就稱爲 Cohen-Macaulay 環，即存有線性齊次多項式 $q_1(x)$，……，$q_d(x)$ 使得

(1)對任何 k，$q_k(x)$ 不是 $S/(q_1(x)$，……

，$q_{k-1}(x)$ ）中的零除數（ zero-divisor ）。

(2) S /（ $q_1(x)$ ，……，$q_d(x)$ ）是有限維的有理向量空間。

Stanley 證明假如他的環 R 是Cohen-Macaulay，則McMullen 推測為眞。

Stanley 定理：令 P 為單純凸體，R 為上面定義的環。若 $q_1(x)$ ，……，$q_d(x)$ 滿足(1)，(2)兩式，則第 k 個 h 數恰為 R /（ $q_1(x)$ ，……，$q_d(x)$ ）k 次齊次部分的維數。

於是 Stanley 把McMullen推測轉換成一個交換代數內的問題。

最巧的是，有位交換代數學家 Reisner（ 1976 ）在不知道 Stanley的工作情形下，獨立證得 Stanley 的環 R 眞的是Cohen-Macaulay。把一組無平方項的單項式設定為零得到的環，什麼時候是 Cohen-Macaulay，完全由Reisner的結果刻畫出來，他的證明使用了交換代數中非常精緻的工具，雖然後來有人重新用更簡單的方法證明（例如 Baclawski and Garsia（ 1981 ）），但 Reisner 的定理確是一項了不起的成就。最出人意表的是，他的研究動機並非來自任何應用的意念。他的「純粹」研究所導致的應用，却比近年交換代數中其他結果都多。這種情況讓人懷疑平常純數與應數的分野到底有沒有道理。

面向量的研究並未因 Stanley-Reisner 的結果而抵達盡頭。McMullen 再進一步提出更強的推測，同時他認為強到足夠刻畫所有的 h 向量。讓我們再利用前面的差數三角來敍述

					1					
				1		6				
			1		5		12			
		1		4		7		8		
	1		3		3		1			
1		2								

正立方體擴充後的差數三角

他的條件。由 Dehn-Sommerville 等式，可知 h 向量完全被前半段決定。現在只使用前半段，再算一次差數，McMullen 推測新產生的最後一行也是 M 序列，而且這個特性就刻畫了 h 向量，由此也能刻畫凸多面體的面向量。Stanley（ 1980 ）與 Billera and Lee（ 1980 ）總算證明了這個推測。證明中不僅用到 Stanley-Reisner 環，也用到「難的」Lefschetz 定理。

Stanley 發現的凸體組合問題與可換環性質間的關聯，此後發揮了許多種效用，不管把它算作純粹還是應用，這正代表了數學的精華。如何使學生為創造這種數學而做準備呢？更廣義的說，如何把數學敎好呢？顯然廣博的背景知識是非常重要的，Stanley 因為懂得夠多的交換代數，才會知道Macaulay 的成果並且充分利用它。另外也應該鼓勵學生打破既有方法的局限，冒險嘗試新途徑。敎學的一項重要任務，便是解除學生先入為主的成見。

離散固定點理論

我們的第二個例證性質迥異於第一個例證。第一個的發展基本上已經完成，第二個才剛開始。雖然它的理論還在嬰兒期，然而已知的成果已經相當值得人讚賞。

離散固定點理論處理如下的問題。我們有一個序集合（ partially ordered set ）P，其次序關係用「 $\leq$ 」表示。又有一個保序映射 $f : P \to P$，也就是說，凡 $x \leq y$ 則有 $f(x) \leq f(y)$ 。f 的固定點集合定義為 $P^f = \{ x \in P \mid f(x) = x \}$ 。我們想知道 P^f 有什麼性質，最簡單的問題便是 P^f 是否不空，假如對任何 f， P^f 都不為空，則我們說 P 有固定點性質。

某些場合會很自然引出離散固定點的問題，例如，令 M 為緊緻流形，$g : M \to M$ 為連續函數，此時可討論拓樸固定點理論，再假設 M

可三角劃分爲Δ，而g可由單體映射（Simplicial mapping）$f : \Delta \to \Delta$逼近。三角劃分（triangulation）有自然的序集合結構：集合的元素是各個單體（simplex），次序是包含的次序。在這個意義下$f : \Delta \to \Delta$是保序映射。固定點集合Δ'是固定點集合$M^g = \{ P \in M \mid g(P) = P \}$的逼近。

離散固定點理論還可適用於流形上比三角劃分更一般的「分解」。Metropolis and Rota（1978）的「立方複合形」（cubical complex）上也能應用。此外與對局論及有限羣的表現也有頗饒趣味的關聯，請參閱Baclawski and Björner（1981b）中的討論與例子。

再舉一例，令B爲Banach 空間，$T : B \to B$是連續有界線性算子。用泛函分析的有界反元素定理可知，若T是單蓋射（bijection），則T^{-1}也是連續線性算子，因此T是B上的自同構。令$P(B)$爲B的眞子空間構成的序集合，即$P(B) = \{ 0 \subsetneq V \subsetneq B \mid V$是子空間$\}$。再令$P_0(B) \subseteq P(B)$爲$B$的閉眞子空間形成的子序集合，則$T$導引出$P(B)$與$P_0(B)$上的保序自同構。固定點集合$P(B)^T$與$P_0(B)^T$分別是算子$T$的不變空間（invariant subspace）與閉不變子空間（closed invariant subspace），都是泛函分析中有興趣研究的對象。

離散固定點理論最早的結果是Tarski（1955）與Davis（1955）的定理。此定理刻畫了束（lattice）的固定點性質。序集合P中任何有限子集合都有最小上限及最大下限時，P稱爲束。假如任何子集合都有上述性質則稱爲完備束（complete lattice）。Tarski與Davis定理說，束具有固定點性質的充要條件是它是一個完備束。而在這種情形下，固定點集合也是完備束。

一般序集合上的固定點理論遠比Tarski與Davis的情形複雜。目前僅有適用於有限序集合的定理，是代數拓樸學中Lefschetz固定點定理的類似情形。此一結果在Baclawski and Björner（1979）中首先證出，並稱爲Hopf-Lefschetz 固定點定理，要敍述它得先引進一些代數拓樸的概念。

令P爲有限序集合。令$\Delta(P)$爲單體複合形（simplicial complex），其頂點爲P的元素，其單體爲P中具線性順序的鏈，如$\{ x_1 < x_2 < \cdots < x_n \} \subseteq P$是一條代表性的鏈。再令$|\Delta(P)|$是單體複合形$\Delta(P)$所決定的多面體。我們以$\widetilde{H}_i(P, Q)$表示$|\Delta(P)|$在$i$維的簡化（reduced）有理同調羣，即

$$\widetilde{H}_i(P, Q) = \widetilde{H}_i(|\Delta(P)|; Q)$$

簡化的Euler特徵數定義爲

$$\mu(P) = \sum_{i=-1}^{\infty} (-1)^i \dim_Q \widetilde{H}_i(P, Q)$$
$$= \chi(|\Delta(P)|) - 1$$

其中$\chi(X)$表示空間X普通的Euler特徵數。

現令$f : P \to P$爲保序映射，則f導引出單體映射$\Delta(f) : \Delta(P) \to \Delta(P)$與連續映射$|f| : |\Delta(P)| \to |\Delta(P)|$。因此$f$也導引出線性變換：

$$\widetilde{f}_i : \widetilde{H}_i(P, Q) \to \widetilde{H}_i(P, Q)$$

因爲$\widetilde{f}_i$都是向量空間自身的線性變換，所以談論$\widetilde{f}_i$的跡數（trace）是有意義的。f的Lefschetz數是交錯和

$$\Lambda(f) = \sum_{i=-1}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Trace}(\widetilde{f}_i)$$

Hopf-Lefschetz 固定點定理：*若P爲有限序集合，$f : P \to P$是保序映射，則*

$$\Lambda(f) = \mu(P^f)$$

Hopf-Lefschetz 定理最有用的特例是下述的情形。若有限序集合P滿足$\widetilde{H}_i(P, Q) = 0$對所有$i$成立，則稱爲零調（acyclic）序集合。例如$P$只有一個元素時，或者$P$有一元素$x$，可以與任何其他元素比較大小時，$P$

都是零調序集合。空集合倒不是零調的，因爲 $\widetilde{H}_{-1}(\phi, Q)=Q$。

系：若 P 是有限零調序集合，則 P 有固定點性質。

要證明系只需知道保序映射 $f: P \to P$ 滿足 $\Lambda(f)=0$，因此 $\mu(P^f)=0$。但因 $\mu(\varphi)=-1$，故必須有 $P^f \neq \phi$。此系在代數拓樸學的類似命題也能成立，但 Hopf-Lefschetz 定理本身卻不能直接搬過去。大多數 Hopf-Lefschetz 定理的應用只要用系就夠了。

當然應用上最困難的部分在證明所給的序集合是零調的，現在也有些很巧妙的辦法能幫我們的忙。正如 Reisner 的先例，這些辦法往往是純理論研究的結果，並非因眼前的應用需求而產生。一個例子是本文作者（Baclawski（1977））找到固定點與束裏取互補元素的意外關係。

令 L 爲有限束，而 $\overline{L}$ 表示束的眞部分，即 $\overline{L}=L-\{0, 1\}$。L 中的元素 x 與 y 是互補元素（complements）的條件是 $x \vee y=1$ 且 $x \wedge y=0$，我們記作 $x \perp y$。當束中每一元素都能找到互補元素時，束稱爲可補束（complemented lattice），否則稱爲不可補束。在 Baclawski and Björner（1981a）中建立了如下結果：

(1)若保序映射 $f: \overline{L} \to \overline{L}$ 沒有固定點，則 L 是可補的。

(2)若 $f: L \to L$ 是保序自同構，又若 $x \in \overline{L}$ 對於所有 $z \in P^f$ 滿足 $x \wedge z=0$，則存有元素 $y \in \overline{L}$，使得 $y \perp x$ 且 $f^n(y) \wedge x \neq 0$ 對某整數 n 成立。

我們把 f 想成定義了一個離散動態系統，而 n 代表時間，那麼(2)便代表了一種弱的「混合」性質。當 $x \wedge y \neq 0$ 時，x，y 可想像成離得很「近」，而當 $x \perp y$ 時，它們便離得很「遠」。命題(2)便是說假如 x 離 f 的任何固定點都不近，則 x 的軌道會走到離 x 很遠的元素。對這個題材感興趣的讀者可看 Baclawski and Björner（1981 b）即將刊印的論文。

命題(1)與(2)的證明中都用到某個序集合是零調的。例如(1)說若 L 是不可補的，則 $\overline{L}$ 有固定點性質。Baclawski（1977）中的結果可用來證明此事，因爲我們知道若 $x \in L$ 沒有互補元素，則 $\overline{L}$ 是零調的。修改同法可證得 Baclawski and Björner（1981a）中下述的定理，(2)便可由其中導出。

定理：令 L 爲有限束而 $x \in \overline{L}$，假設 B 滿足

$$\{y \in \overline{L} \mid y \perp x\} \subseteq B \subseteq \{z \in \overline{L} \mid z \wedge x=0\}$$

則 $\overline{L}-B$ 是零調的。

到目前還沒有純粹組合學的方法證明(1)與(2)，也不清楚如何推廣到無窮序集合。因此還不能應用到像 $P(B)$ 或 $P_0(B)$ 等 Banach 空間上的序集合。然而固定點與互補元素的關係既經發現，Baclawski-Björner 定理自然導向其他場合類似關聯的探索。

這個例子也展現了數學理論與應用互相影響的複雜程度，也就是說數學定理不僅用來解決其他領域提出的問題，更可以提供値得深入研究的問題，這種反方向的影響却是一般人不太能注意得到。

參考文獻

1. K. Baclawski, Galois connections and the Leray spectral sequence, *Advances in Math.* 25（1977），191—215.
2. K. Baclawski and A. Björner, Fixed points in partially ordered sets, *Advances in Math.* 31（1979），263—287.
3. ——, Fixed points and complements in finite lattices, *J. Comb. Theory, Ser. A*, to appear, 1981.
4. ——, Fixed points in ordered struct-

ures : a survey, in preparation, 1981.

5. K. Baclawski and A. Garsia, Combinatorial decompositions of a class of rings, *Advances in Math*, 39 (1981), 155—184.

6. L. Billera and C. Lee, Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.), 2 (1980), 181—185.

7. H. Bruggesser and P. Mani, Shellable decompositions of cells and spheres, *Math. Scand.* 29 (1971), 197—205.

8. G. Clements and B. Lindström, A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay, *J. Comb. Theory* 7 (1969), 230—238.

9. A. Davis, A characterization of complete lattices, *Pacific J. Math.* 5 (1955), 311—319.

10. C. Greene and D. Kleitman, Proof techniques in the theory of finite sets, in *Studies in Combinatorics*, *M.A.A. Studies in Math.*, vol. 17, G.-C. Rota, ed.; Math. Assoc. of Amer., Providence, RI, 1978, 22—79.

11. G. Katona, A theorem of finite sets, in *Proc. Tihany Conf.*, 1966, Budapest, 1968.

12. J. Kruskal, The number of simplices in a complex, in *Mathematical Optimization Techniques*, Univ. California Press, Berkeley, 1963, 251—278.

13. F. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems. *Proc. London Math. Soc.* 26 (1927), 531—555.

14. P. McMullen, The number of faces of simplicial polytopes, *Israel J. Math.* 9 (1971), 559—570.

15. P. McMullen and G. C. Shephard, *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 3, Cambridge Univ. Press, 1971.

16. N. Metropolis and G.-C. Rota, Combinatorial structure of the faces of the n-cube, *SIAM J. Appl. Math.* 35 (1978), 689—694.

17. T. Motzkin, Comonotone curvs and polyhedra, Abstract 111, *Bull. Amer. Math. Soc.* 63 (1957), 35.

18. G. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, *Advances in Math.* 21 (1976), 30—49。

19. R. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, *Stud. in Appl. Math.* 54 (1975), 135—142.

20. —, The number of faces of a simplicial convex polytope, preprint, M.I.T., 1980.

21. A. Tarski, A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, *Pacific J. Math.* 5 (1955), 285—309.

譯註：本文譯自P.J. Hilton與G.S. Young 編輯的New Directions in Applied Mathematics, Springer, 1982.

有關多面體的理論，有兩本較新的書值得參考：

1. A. Brøndsted：*An Introduction to Convex Polytopes*, Springer, 1983.
2. V.A. Yemelichev, M.M. Kovalev and M.K. Kravtsov：*Polytopes, Graphs and Optimisation*, Cambridge University Press, 1984.

—本文譯者為本所研究員—

（原載：数学传播季刊〔台〕1986 年 10 卷 1 期 28 — 34 页）

差分法 及其在組合學上的應用

組合專題

何景國

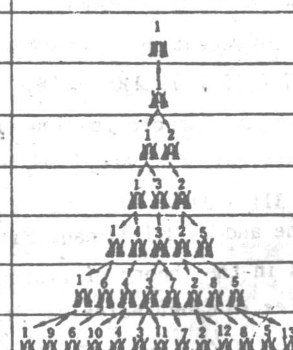
差分法是數值分析中一門重要的課題，不只在數學理論上有著廣泛的應用，同時在處理問題技巧上更適合高速電算機的逐步計算。本文將介紹差分法的數學意義，並證明一些重要定理，就組合數學範疇內，舉例說明處理問題之思考方法與求解之技巧。

先以一道頗富趣味性的兔子問題來介紹何謂差分方程式。

兔子問題：

設有一對兔子在它出生後的第一個月不會生育，但在第二個月底和往後每個月底都會生一對兔子，則每月初有多少對兔子？
由下圖所示，顯見一對剛出生的兔子，往後逐月所衍生的兔子會形成一個數列如下：

1，1，2，3，5，8，13，……



月	兔子問題	對數 pairs
一	1	1
二	1	1
三	1 2	2
四	1 3 2	3
五	1 4 3 2 5	5
六	1 6 4 3 7 2 8 5	8
七	1 9 6 10 4 3 11 7 2 12 8 5 13	13

實際上，這個數列的前幾項可以很容易求得。先寫出前二項 $f_1=1$，$f_2=1$，其後每一項均爲其兩項之和。因此如果以 f_n 表示第 n 個月初之兔子數，那麼我們可以得到下列的遞迴關係式：

$$\begin{cases} f_1=1\,,\ f_2=1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\ (\,n\geqslant 3\,) & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

數列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可看成是定義在正整數集上的函數。(2)式表示了三個相連正整數間該函數值之關係，稱爲差分方程式（Difference equation）。其中(1)式稱爲(2)式之邊界條件（Boundary Condition）。

差分方程式之解是用 n 表達 f_n 的一般形式，這裏我們先用生成函數（generating function）的方法來求滿足邊界條件(1)的方程式(2)之解；後面將用差分方程的求解方法來處理。

在下面，我們將遞迴關係式看成一種差分方程式，並在例說介紹另一種方程式求解的方法。

我們已經提過一個數列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 可看成是定義在非負整數集上的函數，其於正整數之