

KE XUE WEN CONG

科学文丛

数苑漫步

er

广州出版社

科学文丛

数苑漫步

(5)

广州出版社出版

图书在版编目 (CIP) 数据

科学文丛. 何静华 主编. 广州出版社. 2003.
形继祖

书号 ISBN7-83638-837-5

I. 科学... II. III. 文丛

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 082275 号

科学文丛

主 编: 何静华
形继祖

广州出版社

广东省新宜市人民印刷厂

开本: 787×1092 1/32 印张: 482.725

版次: 2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数: 1-5000 套

书号 ISBN 7-83638-873-5

定价: (全套 104 本) 968.80 元

目 录

一、从“0”谈起	(1)
二、话说数学符号	(5)
三、形形色色的进位制	(9)
四、奇妙的“缺8数”	(15)
五、无理数“无理”吗?	(19)
六、虚数的历程	(23)
七、正偶数与自然数谁多谁少	(27)
八、尺规作图的三大难题	(32)
九、从正多边形作图到费尔马数	(37)
十、美丽的正五角星	(42)
十一、方程趣闻	(47)
十二、“猴子分栗子”的趣题	(52)
十三、漫话对数	(58)
十四、中国古代数学的瑰宝——杨辉三角	(63)
十五、奥妙无穷的非波那契数列	(68)
十六、圆锥曲线的应用及渊源	(74)

十七、图形的分割与拼合	(79)
十八、平面铺砌万花筒	(82)
十九、幻方、拉丁方及组合数学	(88)
二十、三次数学危机	(94)
二十一、欧氏几何与非欧几何	(99)
二十二、从算盘到电子计算机	(103)
二十三、数苑礼赞(结束篇)	(107)

一、从“0”谈起

万事都从0开始。这本小册子就从“0”谈起。

“0”是什么时候产生的？谁也无法准确地说出来。据一些数学史家考证，它大概在公元5世纪产生于印度。

在实际生活中，人们需要数数。最先认识的是1, 2, 3, ……，这些数叫做自然数。一个自然数减去它本身，就没有剩下的了。“没有”，就是0的最初含义，这个含义至今仍然保留着。现在的拉丁文中，nullum(意思是没有)表示0。

0的诞生给数位记数法带来了极大的方便。什么是数位记数法呢？就是一种既要看数码字，又要看数码字放在什么数位上的一种记数方法。十进位记数法中，“逢十进一”是大家所熟悉的。

在引入0的记号以前，人们总是把没有数码字(指1到9)的数位上空着。这样记数很不方便，也容易使人混淆。例如中国古时候就把5024记为上 || |||。宋朝的一本书上，就把0写成□，把118098写成十一万八千□□九十八，这两个□表示百位上空着。元代刘瑾(公元13世纪)所著《律吕成书》中就有0的记载，那里把0写成□。

中国人用毛笔写草书体的□时，笔划的顺序是：从左到右，

从上到下,再从右到左,从下到上,就是 ,快写时就变成了现代的写法“0”。

有时候,人们把 0 写在别的数的前面,用来表示序号。第 003 号图纸,这里的 003 表示:这类图纸最多可以编到 999 号,而这张图纸是其中的第 3 号。

0 的性质是非常独特的:

0 是整数集合中的一个元素,是大于负整数而小于正整数的唯一的元素。

凡是能被 2 整除的数叫做偶数。因为 $0 \div 2 = 0$,整除了,所以 0 是偶数。

0 的约数有无数多个,任何非零的整数都是它的约数。换句话说,0 是任何不等于 0 的整数的倍数!这是任何其它的整数不可比拟的。在专门研究整数性质的数学分支——数论中,0 是一个特殊的合数。

在数学王国里,0 的足迹遍及各个角落。无论你写一个什么数,都包含有 0 的存在。不信,你随便写一个数 a 吧,总有 $a = a + 0$,0 就包含在里面!

0 具有自我牺牲精神。任何一个数减去 0,这个数丝毫不会改变。请看: $a - 0 = a$,难道不是这样吗?

0 与其他的数相乘或相除时,那又是一番美妙的情景:

$$0 \times a = 0$$

$$a \times 0 = 0$$

$$0 \div b = 0 \text{ 或者 } \frac{0}{b} = 0 (\text{这里 } b \neq 0)$$

所以,0的这个性质又称为同化性。

0的性格是随和的,但也有固执的时候。

0不愿意去除别的数,不愿意作为分母去冒充分数。因为0不愿意去干一些没有意思或没有意义的事情。

0除0的商是不确定的。所谓0除0,就是要找出某数,与0相乘得0,这样的数多得很哩!0除0是没有意思的事情。

0除某个非0的数,相除的商是不存在的。随便写个 $1 \div 0$ 吧,你能找到一个数,它乘以0等于1吗?肯定找不到!这是一件没有意义的事情。

0的这个固执的脾气,给初学数学的人添了一些小小的麻烦。下面的写法都是没有意义的,在你的算式中千万不能出现:

0^0 (0的0次幂);

$\lg 0$ (0的常用对数);

$\operatorname{tg} 90^\circ$ (90° 的正切)等等。

然而,在某些特殊情况下,人们又把似乎没有意义的数学记号,特别规定它的意义。例如

$0! = 1$ (0的阶乘等于1);

$C_n^0 = 1$ (从n个不同元素中取出0个元素的组合数等于1)。

这些又是什么缘故呢?原来,这些规定第一是有必要,第

二是合乎情理,大家乐于接受。

0 又是一个活泼的数。在不同的场合,人们给她换上美丽的外衣,把她打扮得婀娜多姿。

你看:

$$\lg 1 = 0 \text{ (1 的常用对数就是 0);}$$

$$\sin 0^\circ = 0 \text{ (} 0^\circ \text{ 角的正弦值就是 0);}$$

$$\cos 90^\circ = 0 \text{ (} 90^\circ \text{ 角的余弦值就是 0);}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ (当 } n \text{ 趋近于无穷大时, } \frac{1}{n} \text{ 的极限等于 0); 等等。}$$

在高等数学里,0 依然扮演着重要的角色;

在行列式中,如果有一行(或一列)的元素全为 0,那么这个行列式的值为 0;

极限为 0 的变量叫做无穷小量;

0 的导数等于 0;

0 的微分等于 0;

0 在任何有限区间内的积分的值等于 0;

.....

呵,0 是平凡的,又是这么不平凡。让我们从“0”开始,读完这本书吧。

二、话说数学符号

小学算术里,我们认识了自然数 $1, 2, 3, \dots$, 分数 $\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, \dots$, 小数 $0.5, 0.3, \dots$, 圆周率 $\pi = 3.14\dots$, 经常用这些数进行 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 四则运算。这些数学符号已经成为我们的朋友。

$1+2$ 表示什么? 它可以表示一个人加上两个人,也可以表示一棵树加上两棵树,还可以表示其他的事物。数学符号可以表示十分广泛的客观事物,又简明适用,这是其他语言无法比拟的,也正是数学符号的威力和奥秘之所在。

数学符号有多少个呢? 据统计,初、高等数学中经常使用的数学符号有 200 多个,中学数学中常见的符号也有 100 多个。

表示数的字母以及表示几何图形的符号,叫做元素符号。例如,用 a, b, c 表示已知数,用 x, y, z 表示未知数;在证明两个三角形全等时,用 (s, s, s) 表示三边对应相等, (s, a, s) 表示两边及夹角对应相等, (a, a, s) 表示两角及一边对应相等,以及圆周率 π , 虚数单位 i , 自然对数的底 e , 这些都是元素符号。还有 1 、 2 、 3 、 $\frac{1}{2}$ 、 $1\frac{2}{3}$ 、 0.5 、 0.3 , 它们都是元素符号。

$+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 表示数之间进行加法、减法、乘法、除法运算。这种表示按照某种规则进行运算的符号,叫做运算符号。两个

集合的并集($\cup$)、交集($\cap$)、根号($\sqrt{\quad}$)、对数($\log, \lg, \ln$)、比($:$)、不定积分($\int$)、定积分($\int_a^b$),这些都是运算符号。

等号($=$)、近似等号($\approx$ 或 $\doteq$)、不等于号($\neq$)、大于号($>$)、小于号($<$)号,这些符号表示数或式之间的关系,叫做关系符号。平行符号($//$)、垂直符号($\perp$)、正比例符号($\propto$)、属于符号($\in$)、包含符号($\subset$)等,都是关系符号。

在数学里,还有一种大家约定的符号,以表示特定的含义或式子。因为($\therefore$)、所以($\because$)、阶乘($n!$)、排列数(P_n^m)、组合数(C_n^m),这些叫做约定符号。

还有一些数学符号,例如圆括号($()$)、方括号($[\quad]$)、花括号($\{\quad\}$)等等,叫做辅助符号,又叫做结合符号。

数学世界真是一个符号的大千世界!

数学符号是怎样产生的呢?

我国是世界上文化发达最早的国家之一。数码这种数学中的元素符号,早在公元前一两千年前就在我国产生了。汉朝刘向写的一本书《世本》中,就有这样一句话:“黄帝时,隶首作数”。公元前 1000 年左右,文王周公所撰《易系辞》中就有“上古结绳而治,后世圣人易之以书契”的记载。

在代数中,最早使用一整套数学符号的,一般认为是古希腊的丢番都(Diophantus,约前 330—246)。后人把他的代数称为缩写代数,而把古埃及、古巴比伦人的代数称为文字叙述代数。这种文字叙述代数,一直延续到欧洲文艺复兴时期。

15 世纪,在德国人瓦格涅尔和韦德曼的著作里,首先使用“+”和“-”这两个符号,表示箱子重量的“盈”和“亏”,后来才被数学家用作加号和减号。“ $\times$ ”号是由 17 世纪的英国数学家欧德莱最先使用的。“ $\div$ ”号是 17 世纪由瑞士人拉恩创造的。

“=”号是英国列科尔德在论文《砺智石》中提出的。方括号[]和花括号{ }是法国数学家韦达(Viete, 1540—1603)引入的。“—”是法国数学家笛卡儿(Descartes, 1596—1650)首先采用的。“ $\sim$ ”和“ $\cong$ ”和 dx (微分)是德国数学家莱布尼兹(Leibniz, 1646—1716)创用的。

导数符号“ $f'(x)$ ”,“ y' ”是法国数学家拉格朗日(Lagrange, 1736—1813)创造的,不定积分符号“ $\int$ ”是瑞士数学家贝努里(Bernolli, 1654—1705)首先使用的。定积分符号“ $\int_a^b f(x) dx$ ”是法国数学家富里哀(Fourier, 1768—1830)发明的。

瑞士数学家欧拉(Euler, 1707—1783)一生创造了许多数学符号,如 π 、 e 、 $\sin$ 、 $\cos$ 、 tg 、 Σ 、 $f(x)$ 等。法国数学家柯西(Cauchy, 1789—1857),也是符号大师,行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
 的两条竖线是他于 1841 年引进的。

上面列的一长串清单,指明了数学中一部分符号的来历。从中可以看出,数学符号是人类集体智慧的产物,是一代代数学家的心血的结晶。

科学的发展,不断对数学提出新的要求。数学发展的进程

中,不断产生新的数学符号,同时逐渐淘汰那些不适用的数学符号。如:

中国的古代数学也有自己的一套符号,在历史上曾起过积极的作用,但与西方相比,自显繁复,不便于应用。例如,20世纪初,在《普通新代数教科书》(1905年)中,仍把未知数 x 、 y 、 z 写成天、地、人,把已知数 a 、 b 、 c 写成甲、乙、丙,把数字 1、2、3 写成一、二、三,而把加减号写成篆文的 $\perp$ (上)、 $\top$ (下) 二字。在这样的符号系统下,本来很普通的式子,如:

$$\frac{x^2}{5a} - \frac{y^3}{3b} + \frac{27}{c^2}$$

就成了十分繁琐、复杂的形式:

$$\frac{\text{天}^{\text{二}}}{\text{五甲}} \top \frac{\text{地}^{\text{三}}}{\text{三乙}} \perp \frac{\text{二七}}{\text{丙}^{\text{二}}}$$

这样的符号当然属于淘汰之列。我国系统地采用现代数学符号,是在辛亥革命(1910年)之后,1919年“五四”运动以后才完全普及。

现代的数学符号,由于它含义确定、表达简明、使用方便,从而极大地推动了数学的发展。在数学里,有人把17世纪叫做天才的时期,把18世纪叫做发明的时期。在这两个世纪里,为什么数学有较大的发展和取得较大的成就呢?其原因,恐怕与创造了大量的数学符号有着密切的联系吧。

甚至有的专家指出:中国古代数学领先,近世落后了,原因

之一就是中国没有使用先进的数学符号,从而阻碍了数学的发展。这话虽然有偏颇的一面,但的确道出了数学符号对数学发展所能起的重要作用!

数学符号威力巨大,魅力无穷。它是数学中特殊的“文字”,记录和传递着丰富的数学信息;它也是无声的“音符”,在人们心灵深处激荡出美妙的乐章;它更是深奥严谨的数学理论的“源泉”之一,滋润着人类文明之花。作为一名中学生,重视对数学符号的学习和使用吧!只有这样,才能使我们的思维更加地敏捷、严谨和深刻。

三、形形色色的进位制

十进位制记数法,是大家熟悉的应用最多的一种记数法。

在我国周代《易经》一书中,就有“万有一千五百二十”的记载,说明早在 2000 多年前我国就有了十进制。公元 6 世纪,甄鸾在注汉末徐岳所著的《数术拾遗》的书中,就有“万万为亿,万万亿为兆,万万兆为京”的说法。

我们知道,光在真空里的传播速度为每秒钟 30 万公里。30 万也就是 300000,可以写成 3×10^5 。在这里,10 的右上角的小号数字 5,它表示在 3 的后面有 5 个 0。这种记数方法叫做科学记数法。

有人可能会说, 3×10^5 比 300000 简单不到哪儿。别忙, 请再看一个例子。

[illegible]

对了,就是 3×10^{74} 。这一下可就简单多了!

在历史上,世界上各个民族普遍使用的,都是十进制。为什么会这样呢?根据语言学家对世界上各进化民族和多数原始民族语言的研究得出的结论,这是由于人类的手有十个指头的缘故。十指可以自由伸缩,是一个很好的天然的记数工具。人们在用手指计数的过程中,十进制数便自然而然地产生了。

在十进位制中,所用数码字是 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,这十个数字叫做十进位制的基数。实际上,除 1 以外的自然数都可以作为进位制的基数。例如,二进位制,三进制,五进位制,七进位制,八进位制,十一进位制,十二进位制,二十进位制和六十进位制等。

英语单词中,从一到十九的数字是:one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten, eleven, twelve, thirteen, fourteen, fifteen, sixteen, seventeen, eighteen, nineteen。这里面从一到十二,这十二个单词是独立的,十三以后才有统一的构成法——都有后缀

teen。由此可以明显地看出十二进位制的痕迹。

实际上,在某些情形下,十二进位制今天还在使用。例如,一打铅笔是指 12 支铅笔,一年有 12 个月,一天有 24 小时(钟表面仍只有 12)。

北美的印地安人,中美、南美的少数民族,西伯利亚的北部民族及非洲人等,古时候常用五进位制和二十进位制。

巴比伦人最初使用的是六十进位制。现在,世界各地仍使用着六十进位制,如一小时等于六十分,一分等于六十秒,圆周角的度数是 360° (6 个 60°),一度等于六十分等。

下面我们把前十个自然数,在几种进位制下的写法作一个对照:

自然数	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
十进制	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
八进制	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
二进制	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

几种不同进位制下的数放在一起,怎样加以区别呢?办法是在 P 进位制的数的右下方,写上(P)。比如,在十进位制里,数 101 表为 $101_{(10)}$,在三进制里,数 101 表为 $101_{(3)}$ 。

在十进制的加减法中,“逢十进一,退一当十”是大家滚瓜烂熟的。在 P 进位制中,则是“逢 P 进一,退一当 P”。例如, $11011_{(2)} + 1110_{(2)}$ 列成算式就是:

$$\begin{array}{r}
 11011 \\
 + \quad 1110 \\
 \hline
 101001
 \end{array}$$

所以 $11011_{(2)} + 1110_{(2)} = 101001_{(2)}$

在通常情况下,人们多采用十进制记数法。但在一些特殊的情况下,采用其他的进位制可能更为方便。

电子计算机的计算和记忆元件只有两种状态,就是“开”和“关”,这可以用两个符号“0”和“1”表示。因此在电子计算机上使用的是二进制记数法。

事物总是具有两重性的。二进制适用于电子元件的两种状态,这是二进制的优点。但二进制也有它的缺点,那就是书写起来并不方便。特别是一个较大的数,用二进制表示起来很