北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校数学课本

高二年级

中国人民大学附中　编

中学部

中国大百科全书出版社

北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校
数学课本

（高二年级）

中国人民大学附中编
主编：刘彭芝

中国大百科全书出版社
北京·1997

顾　问：王　元　裘宗沪

冯克勤　陈德泉

主　编：刘彭芝

编　委：马　毅　莫颂清

周春荔　姚健钢

张　健　姚一隽

李晓龙

编　撰：李晓龙　莫颂清

姚健钢　周春荔

姚一隽　张　健

图书在版编目（CIP）数据

华罗庚学校数学课本：高二年级/刘彭芝主编．
北京：中国大百科全书出版社，1996.3
（北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书）
ISBN 7—5000—5668—0

Ⅰ．华…
Ⅱ．刘…
Ⅲ．数学－小学－教材
Ⅳ．G624．501

华罗庚学校数学课本（高二年级）

编　　者：中国人民大学附中
主　　编：刘彭芝
责任编辑：简菊玲
封面设计：郭　健
版式设计：赵　伟
责任校对：李芝萍　王玉琴

出版发行：中国大百科全书出版社
（北京阜成门北大街17号　100037）
印　　刷：北京四季青印刷厂印刷
经　　销：新华书店总店北京发行所

版　　次：1996年3月第2版
印　　次：1997年8月第2次印刷
印　　张：9.625
开　　本：787×1092　1/32
字　　数：190千字
印　　数：10001—20000
ISBN 7—5000—5668—0/G·144
定　　价：9.80元

著名数学家华罗庚教授(1910～1985)

苦战猛攻埋头干，
熟能生出百巧来。
勤能补拙是良训，
一分辛劳一分材。

录华罗庚教授
诗一首书赠

华罗庚数学学校
奥林匹克系列丛书

王元
九二·七

前　言

北京市华罗庚学校是由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办的，是中国人民大学附中超常教育体系的重要组成部分。其办学目标是为国家大面积早期发现与培养现代杰出科技人才开辟一条切实可行的途径，为我国教育事业面向现代化、面向世界、面向未来的战略方针探索一项行之有效的举措。在这里，一大批高级教师、大学教授和研究员精心执教，一批批数理超常儿童茁壮成长。华校全体师生缅怀我国著名数学家华罗庚教授，崇尚他为国为民鞠躬尽瘁的高贵品质，决心沿着他的路继续走下去，在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族重振雄风的宏图大业甘当马前卒。

超常教育与早期教育，为当今各国教育家、心理学家所重视。超常教育研究得到了各国政府以及有远见卓识的社会各界人士的支持和赞助。他们认为，早期教育一旦在世界范围内推广成功，给世界带来的巨大影响，远比世界上任何一次科技革命和产业革命更深刻、更广泛。在前苏联，国家开办有各类天才学校，用于培养科技文体方面的超常儿童。在美国，控制论的创立者、“神童”维纳就是家庭和学校共同精心培育成功的典型。

近年来，我国众多有识之士在改革开放、建设有中国特色社会主义的宏图大业感召下，投身超常教育事业，辛勤耕

耘，刻苦研究，已经取得可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步。然而，不言而喻，超常教育又是一个异常复杂的新的教育课题。不论是历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长环境不佳，而主要则是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育的结果。因此，我们必须更新教育观念，采取新的教育理论和方法，把大批聪慧儿童培养成为高科技时代的栋梁之材。创办华罗庚学校的主旨，就在于探索一条使那些天资优异的孩子们，既不脱离群体，以免身心畸形发展，又使他们的才华得以充分开发的可行之路。

七百多年前，英国思想家、现碟实验科学的先驱罗吉尔·培根曾说："数学是科学的大门和钥匙。"时至今日，人们更加清楚地看到了数学在现代教育中占据着永恒的地位。当今世界，自然科学、社会科学和数学已发展成为三足鼎立之势，而数学更是各门科学发展的基础；科学和技术的迅猛、巨大的进步，主要就是得益于数学的现代发展，特别是数学在物理学、生物学以及社会科学中的纵深渗透。因此，华校在以数学为带头学科的施教前提下，同时又鼓励学生们在自己感兴趣的其他课程，如物理、化学、生物、外语、计算机等学科中开拓进取，施展才华。这样，近而言之，希望他们在运用中体验数学的思维模式和神奇魔力；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下全面的科学文化素质的坚实基础。

华校采取科学的教学方法，进行开放式教学，努力开发学生的潜在能力，对学生实行超前教育。除由人大附中选派经验丰富的优秀教师任教外，还聘请中国科学院、中国科技

大学、北京大学、清华大学、中国人民大学以及北京师范大学等高校专家、教授来校办讲座。用最新的科技知识丰富学生的头脑，开阔他们的视野。

华校小学部属校外培训性质，从小学二年级选拔招生。入学后每周学习一次，寒暑假进行集中培训。招生时间定于每年 10 月份，招生范围以北京市为主，面向全国。届时小学各年级同时进行考试。录取时每个年级的前 50 名编为 A 班。几年来，华校小学部六年级 A 班的学生几乎百分之百被保送进入人大附中学习。初、高中部每个年级一个华校班，又称实验班。每年暑期，华校高中部聘请高等学校中的学科奥林匹克的高级教练来校讲授奥林匹克数学、物理、化学等知识，进行较强的针对性学习与训练，培养学生的独立思考、观察、分析和解决问题的能力，为他们参加区、市、全国乃至世界级的学科竞赛准备条件。

实践证明，华罗庚学校对超常儿童的培养方略是可取的。近十年来，华校为高一级学校输送了大量的学业优异的人才。以第一、二、三届试验班为例，三届毕业生总数为 136 人。其中，直接保送到国家第一流重点大学 35 人，占 25.7%。参加高考的 101 人中，考入清华大学 42 人，占 30.8%；北京大学 41 人，占 30.1%；中国科技大学 10 人，占 7%。总计考入上述三校为 93 人，加保送 35 人，总计为 128 人。第四届实验班又进一步：全班 44 人，保送 9 人，参加高考 35 人，高考平均分数为 610.83 分，数学平均分数为 137 分；总分数超过 600 分的有 25 人。不仅如此，还有数以千计的学生在区、市、国家乃至世界级的数理学科的竞赛中获奖夺魁，位居北京市重点中学之首。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实

践，使得一批又一批英才脱颖而出，足以显示华罗庚学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

更可喜的是：在探索办学的过程中，以华校为核心，造就并团结了校内外一大批具有新思想、新观念、肯吃苦、敢拼搏的优秀教师和教育专家。在这个来自平凡的教学科研岗位的不平凡的群体中，有多年工作在教学第一线的中小学高级教师，有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们就像当年的华罗庚那样，做为人师，做为长者，着眼于祖国的未来，甘愿给下一代当人梯。狭义地说，他们是华校藉以成长、引以自豪的中流砥柱；广而言之，他们是推动中小学教育事业改革的一支特别劲旅；他们的教学经验和长期积累起来的教学资料更是我国中小学生在国内外学科奥林匹克赛场上争雄夺魁的无价“法宝”。

今天，在对华校创办十余年的经验进行总结时，我们可以说，在朝着自己的办学目标的不懈奋斗中，华校具有四大办学特色：

第一，从娃娃抓起的早期智力开发；

第二，必名师启蒙的成功教育传统；

第三，在全面发展时力求业有专精；

第四，处强手如林中敢于应接挑战。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验的基础上的。因此，华罗庚学校开创了荟萃专家编书的格局，愿将《华罗庚学校奥林匹克系列丛书》奉献给广大教

师、中小学生及学生家长同享。目前已出版和即将出版的有《华罗庚学校数学试题解析》（小学部一册、中学部六册）、《华罗庚学校数学课本》（小学部六册、中学部六册）《奥林匹克中学数学讲座》、《奥林匹克小学数学讲座》、《华罗庚学校计算机教材》、《华罗庚学校图解英语》、《华罗庚学校模范作文》、《华罗庚学校物理试题》、《华罗庚学校物理教材》、《华罗庚学校化学教材》、《华罗庚学校化学试题》。这套丛书的编选者都是华校的骨干教师，他们为了共同的目标献出了自己多年的教学经验和最新的教学科研成果，因而使得这套丛书具有实用、新颖、通俗、严谨的特点。这些特点使全书别具一格，面目一新。我相信，它必将博得广大师生与家长的喜爱。

俗云："一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。"华校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。"合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。"遥望未来，我们同呼志士之言：为中国在21世纪成为科技强国而献身。

作为本教材的主编，我谨以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意；恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

目　录

第一讲　数　　列

数列，是高中数学中一个重要的概念，本讲研究一些和数列有关的内容.

例 1　求斐波那契(Febonacci)数列

$$F_1=F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\ (n=1,2,\cdots) \qquad (1)$$

的通项公式.

解：设参数 α、β 满足 $F_{n+2}-\alpha F_{n+1}=\beta(F_{n+1}-\alpha F_n)$. 即有

$$F_{n+2}=(\alpha+\beta)F_{n+1}-\alpha\beta F_n \qquad (2)$$

比较(1)、(2)，我们有 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$. 从而 α、β 是方程

$$x^2-x-1=0 \qquad (3)$$

的两个根$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

由 (2) 又可得 $F_{n+2}-\beta F_{n+1}=\alpha(F_{n+1}-\beta F_n)$. 从而数列 $\{F_{n+2}-\alpha F_{n+1}\}$ 和 $\{F_{n+2}-\beta F_{n+1}\}$ 是分别以 β 和 α 为等比的等比数列. 于是：

$$F_{n+1}-\alpha F_n=\beta^{n-1}(F_2-\alpha F_1)=\beta^n,$$

$$F_{n+1}-\beta F_n=\alpha^{n-1}(F_2-\beta F_1)=\alpha^n.$$

两式相减，即得数列 $\{F_n\}$ 的通项

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

方程（3）称为数列（1）的特征方程. 事实上，用本题的方法，可以求出一般的二阶线性递归数列

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

的通项. 设 α、β 是上式的特征方程 $x^2-px-q=0$ 的两根. 如果 $\alpha\neq\beta$，则 $a_n=C_1\alpha^n+C_2\beta^n$；如果 $\alpha=\beta$，则 $a_n=(C_1+C_2n)\beta^n$，这里，C_1、C_2 是由 a_1、a_2 所确定的常数.

例 2 数列$\{a_n\}$定义如下：$a_0=d$，

$$a_{n+1}=\lambda a_n^3-3a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{4}$$

试求数列$\{a_n\}$的通项，其中 λ 是一个正实数.

解：设 $\sqrt{\lambda}\,a_n=b_n$. 于是，由（4）可得

$$b_{n+1}=b_n^3-3b_n \tag{5}$$

选定参数 μ，使 $b_0=\mu+\frac{1}{\mu}$，下面我们用归纳法证明：

$$b_{n-1}=\mu^{3^{n-1}}+\frac{1}{\mu^{3^{n-1}}}.$$

①$n=1$ 时显然.

②假定 $b_{k-1}=\mu^{3^{k-1}}+\frac{1}{\mu^{3^{k-1}}}$，在（5）中令 $n=k-1$ 可得

$$\begin{aligned}b_k&=b_{k-1}^3-3b_{k-1}\\&=\left(\mu^{3^{k-1}}+\frac{1}{\mu^{3^{k-1}}}\right)^3-3\left(\mu^{3^{k-1}}+\frac{1}{\mu^{3^{k-1}}}\right)\\&=\mu^{3^k}+\frac{1}{\mu^{3^k}}+3\cdot\mu^{3^{k-1}}\cdot\frac{1}{\mu^{3^{k-1}}}\left(\mu^{3^{k-1}}+\frac{1}{\mu^{3^{k-1}}}\right)\\&\quad-3\left(\mu^{3^{k-1}}+\frac{1}{\mu^{3^{k-1}}}\right)\\&=\mu^{3^k}+\frac{1}{\mu^{3^k}}.\end{aligned}$$

从而 $n=k$ 时命题成立.

于是，$b_n=\mu^{3^n}+\frac{1}{\mu^{3^n}}$. 则数列$\{a_n\}$的通项为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\mu^{3^n}+\frac{1}{\mu^{3^n}}\right),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

其中 μ 是方程 $\mu^2-\sqrt{\lambda}d\mu+1=0$ 的一个根.

解决本题的关键是猜出数列$\{b_n\}$的通项公式，这是我们通过对（5）的观察、联想所得到的.

注：有趣的是，如果令 $d=1$，$\lambda=5$. 利用 F_n 的通项公式，可以得到 $a_n=F_{3^n}$，这也是个好题目.

例 3 设 $n\geqslant 3$，而 x_1，x_2，…，x_n 为区间$[0,\ 1]$中的实数，证明存在角标 i，$1\leqslant i\leqslant n-1$，使得如下的不等式成立：

$$x_i(1-x_{i+1})\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n) \tag{6}$$

解：分两种情况证明：

① 如果 $x_2<\frac{1}{2}$，则

$$x_1(1-x_2)\geqslant\frac{1}{2}x_1\geqslant\frac{1}{4}x_1\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

于是取 $i=1$ 即可.

② 如果 $x_2\geqslant\frac{1}{2}$，我们先证明如果存在 j，使 $x_j\geqslant\frac{1}{2}$，$x_{j+1}\leqslant\frac{1}{2}$，则(6)成立，此时由于

$$x_j(1-x_{j+1})\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n).$$

所以在（6）中取 $i=j$ 即可.

于是由 $x_2\geqslant\frac{1}{2}$，可知 $x_3\geqslant\frac{1}{2}$，…，$x_{n-1}\geqslant\frac{1}{2}$. 从而

$x_{n-1}(1-x_n)\geqslant\frac{1}{2}(1-x_n)\geqslant\frac{1}{4}(1-x_n)\geqslant\frac{1}{4}x_1(1-x_n)$，所以在

(6) 中取 $i=n-1$ 即可.

综上所述，可知存在 i，使 (6) 成立.

本题解法的思路来源于 $\frac{1}{4}x_1(1-x_n)\leqslant\frac{1}{4}$.

例 4 递增的正整数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

(i) $a_{2n}=a_n+n$. (7)

(ii) a_n 是素数的充要条件是 n 是素数. (8)

试求 a_{1994}.

解：我们先用归纳法证明：$a_n=n-1+a_1$.

①$n=1$、2 时显然.

②假定对一切 $n\leqslant k$，成立 $a_n=n-1+a_1$，在 $n=k+1$ 时. 如果 k 是奇数，则

$$a_{k+1}=\frac{k+1}{2}+a_{\frac{k+1}{2}}=\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{2}-1+a_1=k+a_1,$$

命题成立.

如果 k 是偶数，则

$$a_{k+2}=\frac{k+2}{2}+a_{\frac{k+2}{2}}=\frac{k+2}{2}+\frac{k+2}{2}-1+a_1=k+1+a_1,$$

于是由 $k-1+a_1=a_k<a_{k+1}<a_{k+2}=k+1+a_1$ 可知

$a_{k+1}=k+a_1$，命题亦成立.

于是对一切 $n\in N$，都成立

$$a_n=n-1+a_1$$

由条件 (ii) 及上式便知 a_2 和 a_3 是一对相邻的素数，于是 $a_2=2$，从而 $a_1=1$，则 $a_{1994}=1994$.

例 5 归纳地定义数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 如下：

$a_1=1$，$b_1=2$，$c_1=4$.

a_n 等于不在 a_1，a_2，…，a_{n-1}；b_1，b_2，…，b_{n-1}；c_1，c_2，

$\cdots$，c_{n-1}中的最小的正整数.

b_n 等于不在 a_1，a_2，$\cdots$，a_n；b_1，b_2，$\cdots$，b_{n-1}；c_1，c_2，$\cdots$，c_{n-1}中的最小正整数.

$c_n=2b_n+n-a_n$.

证明：$\dfrac{9-5\sqrt{3}}{3}<(1+\sqrt{3})n-b_n<\dfrac{4(3-\sqrt{3})}{3}$. (9)

解：我们先证明两个引理.

引理 1：$c_{n+1}-c_n\geqslant 2$.

引理 2：$2\geqslant b_n-a_n\geqslant 1$.

先证引理 1，对 n 使用归纳法：

① $n=1$ 时直接计算知 $c_2-c_1=9-4>2$.

② 假定对一切 $n\leqslant k-1$，都有 $c_{n+1}-c_n\geqslant 2$.

在 $n=k$ 时，$c_{k+1}-c_k$

$=2b_{k+1}+k+1-a_{k+1}-2b_k-k+a_k$

$=2(b_{k+1}-b_k)+(a_k-a_{k+1})+1$.

由$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的定义方式，我们可以看出：

$a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_k<b_k<a_{k+1}<b_{k+1}<\cdots$注意到

$c_{k+1}>b_{k+1}$，于是利用归纳假设可知，在 a_k 和 b_k 之间，b_k 和 a_{k+1} 之间，a_{k+1}和 b_{k+1}之间至多有一个数列$\{c_n\}$中的项. 从而 $b_{k+1}-b_k\geqslant 2$，$a_{k+1}-a_k\leqslant 4$，并且 $a_{k+1}-a_k=4$ 时，$b_{k+1}-b_k\geqslant 3$.

于是在 $a_{k+1}-a_k\leqslant 3$ 时，

$2(b_{k+1}-b_k)+(a_k-a_{k+1})+1\geqslant 4-3+1=2$.

在 $a_{k+1}-a_k=4$ 时

$2(b_{k+1}-b_k)+(a_k-a_{k+1})+1\geqslant 6-4+1=3>2$.

于是 $c_{k+1}-c_k\geqslant 2$.