杭州商学院统计学与公共数学系列辅导教材

高等数学
学习与辅导

主　编　金义明
副主编　王宝文　王海敏
　　　　赖义生　裘春晗

- 内容提要
- 例题解析
- 习题选解
- 模拟试卷

中国物价出版社

图书在版编自（C I P）数据

高等数学学习与辅导／金义明主编. - 北京 中国物价出版社，2003.9

ISBN 7-80155-620-8

Ⅰ.高…　Ⅱ金…　Ⅲ.高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 082804 号

出版发行／中国物价出版社（邮政编码：100837

地址：北京市西城区月坛北小街 2 号院 3 号楼

电话：读者服务部 68022950　发行部 68033577）

经销／新华书店

印刷／西冷印刷厂

开本／787x1092 毫米　16 开　**印张**／29.25　**字数**／779 千字

版本／2003 年 9 月第 1 版　**印次**／2003 年 9 月第 1 次印刷

印数／1000 册

书号／ISBN7-80155-620-8/0.4

定价／50.00 元

高等数学学习与辅导

金义明 王宝文 王海敏 赖义生 裘春晗 编

内容简介

本书为配合同济大学《高等数学》(第五版)教材编写而成。全书共十二章,每章由内容提要、典型例题解析、总习题选解和练习题四个部分组成,书末附有练习题参考答案,并附有模拟试卷十二套及详解。

本书可作为各类高等院校工科《高等数学》配套用书,也可作为硕士研究生入学考前复习用书和自学考试有关人员的复习课本。

前　　言

高等数学是高等院校理工科学生的重要基础课，是培养学生抽象概括能力、逻辑思维能力、运算能力和空间想象力的重要课程，能否学好这门课程，将直接影响后继课程的学习。由于其内容的高度抽象性与概括性、严密的逻辑性、独特的“数学语言”等，往往使学生望而生畏，成为学生进入大学后的第一只“拦路虎”。

为了帮助学生学好高等数学，本书定位在使其成为学生学习高等数学的“导学”。内容提要部分精要概括本章内容，包括基本概念、重要定理和公式，突出重点，既简洁又翔实。典型例题解析部分精选了各类典型例题，覆盖面广，有详细的分析和解答过程，并总结具有一般意义的解题方法，对开拓思路、提高解题能力大有裨益；部分例题综合性强，有些有一定的难度和深度，对考研复习有很好的参考价值。教材的每章总习题难度较大，总习题选解部分给出了每章的总习题的详细解答。每章末精选了练习题供读者练习，书末附有参考答案。书末还附有模拟试卷十二套及详解，可以检测知识的掌握程度,有效地提高学生的应试能力。

本书第一、二章由王宝文编写，第三、四、五、六章由王海敏编写，第七、八章由赖义生编写，第九、十章由裘春晗编写，第十一、十二章由金义明编写。由金义明统纂全稿并提供模拟试卷。

本书可作为理工科大学生学习高等数学课程的参考书。

书中疏漏与不妥之处，请读者批评指正。

编　者

于杭州商学院

2003年8月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　函数与极限

内容提要

一、映射与函数

1. 集合的概念

(1) 集合的定义　具有某种特定性质的事物的全体称为集合. 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素, 称 a 属于 A, 记作 $a \in A$; 否则称 a 不属于 A, 记作 $a \notin A$.

如果集合 A 只含有限个元素, 则称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集.

(2) 设 A,B 是两个集合, 如果 A 的元素都属于 B, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 或称 A 包含于 B, 记作 $A \subseteq B$; 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subset B$.

(3) 如果集合 A 与集合 B 互为子集, 则称集合 A 与集合 B 相等.

(4) 不含任何元素的集合称为空集, 记为 Φ.

2. 集合的运算

(1) 设 A,B 是两个集合, 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{或} x \in B \right\}.$$

(2) 设 A,B 是两个集合, 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{且} x \in B \right\}.$$

(3) 设 A,B 是两个集合, 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$, 即

$$A - B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{且} x \notin B \right\}.$$

(4) 有时候, 我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行, 所研究的其他集合都是 I 的子集, 则称集合 I 为全集, 称 $I - A$ 为 A 的余集或补集, 记作 $\overline{A}$, 即

$$\overline{A} = \left\{ x \,\middle|\, x \in I \text{且} x \notin A \right\}.$$

(5) 集合运算满足交换律、结合律、分配律和对偶律等运算规律.

3. 映射

(1) 定义　设 X,Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则 f, 使得对 X 中每个元素 x, 按法则 f, 在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作

$$f : X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x (在映射 f 下) 的像, 并记作 $f(x)$, 即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个原像.

集合 X 称为映射 f 的定义域, 记作 D_f; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域, 记作 R_f, 即

$$R_f = f(X) = \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in X \right\}.$$

(2) 特殊映射

设映射 $f: X \to Y$, 若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 总有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是单射; 若 $R_f = Y$, 即 Y 中任一元素都能在 X 中找到原像, 则称 f 是满射; 既是单射又是满射的映射称为双射.

4. 函数

(1) 函数的定义　设数集 $D \subseteq R$, 则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量或函数, D 称为函数的定义域, 记作 D_f. 函数值的全体所构成的集合称为函数的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$.

(2) 函数的特性

有界性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X \subseteq D$, 如果存在数 A (B), 使得

$$f(x) \leq A \quad (f(x) \geq B)$$

对 $\forall x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界(有下界); 如果存在正数 M, 使得

$$|f(x)| \leq M$$

对 $\forall x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

$f(x)$ 有界当且仅当 $f(x)$ 既有上界又有下界.

单调性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subseteq D$. 如果函数 $f(x)$ 对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(单调减少)的.

在整个定义域上单调增加(或单调减少)的函数称为单调函数.

奇偶性: 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意的 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

则称 $y = f(x)$ 为偶函数(奇函数).

偶函数的图形关于 y 轴对称; 奇函数的图形关于原点对称.

周期性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个正数 T, 使得对于任意的 $x \in D$, 有 $(x \pm T) \in D$, 并且恒有

$$f(x + T) = f(x),$$

则称 $y = f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期是指最小正周期.

(3) 函数的运算

定义　设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$, 称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

严格单调的函数必有反函数, 且反函数也是单调的.

注意：在同一坐标平面上，直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 而直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在同一坐标平面上的图形是同一条曲线.

定义　设函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的定义域分别为 D_1 和 D，且有 $g(D)\subseteq D_1$，则函数

$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 构成的复合函数. 它的定义域为 D，u 称为中间变量.

(4) 初等函数

定义　由常数和基本初等函数(幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数)经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，统称为初等函数.

(5) 分段函数

定义　在自变量的不同变化范围中，对应法则用几个不同式子来表示的函数，我们通常称为分段函数. 例如

$$y=\begin{cases}\ln x\ , & x>0\\ x+1\ , & x\le 0\end{cases}$$

就是一个分段函数.

注意：不能说“凡是分段函数都不是初等函数”，例如

$$y=\begin{cases}x\ , & x\ge 0\\ -x\ , & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数，但是它可以表示成 $y=\sqrt{x^2}$，所以这个分段函数是初等函数.

二、数列的极限

1. 数列的极限

定义　设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in Z^+$，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\quad(\text{或}\ x_n\to a\ (n\to\infty)).$$

如果不存在这样常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 无极限，或称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

2. 收敛数列的性质

(1) 极限的惟一性．如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它的极限惟一.

(2) 收敛数列的有界性．如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 必有界.

(3) 收敛数列的保号性．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0$（或 $a<0$），则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）；反之，如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x\ge 0$（或 $x_n\le 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么 $a\ge 0$（或 $a\le 0$）.

(4) 收敛数列与其子数列间的关系．如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛于 a.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

三、函数的极限

1. $x \to x_0$ 时，函数 $f(x) \to A$ 的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad (\text{或} f(x) \to A \ (x \to x_0)).$$

单侧极限　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧附近有定义，如果存在常数 A，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad (\text{或} f(x_0^-) = A).$$

类似地可定义右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ （或 $f(x_0^+) = A$）.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$、$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在且相等.

2. $x \to \infty$ 时，函数 $f(x) \to A$ 的定义

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad (\text{或} f(x) \to A \ (x \to \infty)).$$

单侧极限　设函数 $f(x)$ 当 x 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad (\text{或} f(x) \to A \ (x \to +\infty)).$$

类似地可定义 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ （或 $f(x) \to A \ (x \to -\infty)$）.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$、$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 都存在且相等.

3. 函数极限的性质

(1) 函数极限的惟一性. 如果 $\lim f(x)$ 存在，那么这个极限惟一.

(2) 有极限函数的局部有界性. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \le M$.

(3) 有极限函数的局部保号性. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而且 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在常数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）；反之，如果在点 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \ge 0$（或 $f(x) \le 0$），而且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么 $A \ge 0$（或 $A \le 0$）.

(4) 函数极限与数列极限的关系. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0(n\in N^+)$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必定收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

四、无穷小与无穷大

(1) 定义. 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的极限为零, 那末称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷小.

(2) 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时, 函数 $f(x)$ 有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$, 其中 α 是无穷小.

(3) 定义. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内 (或当 $|x|$ 大于某一正数时) 有定义, 如果对于 $\forall M>0$, $\exists\delta>0$ (或 $\exists X>0$), 当 $0<|x-x_0|<\delta$ (或 $|x|>X$) 时, 恒有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时为无穷大, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

(4) 无穷大与无界函数的关系. 无穷大必无界, 反之, 无界函数不一定是无穷大.

(5) 无穷大与无穷小的关系. 在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 为 (非零) 无穷小, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

五、极限运算法则

(1) 有限个无穷小之和为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小之积为无穷小.

(3) 常数与无穷小的乘积是无穷小.

(4) 有限个无穷小之积为无穷小.

(5) 如果每一个函数极限存在, 则函数的和, 差, 积, 商的极限均存在, 且等于各极限的和, 差, 积, 商 (其中商的极限中, 要求分母的极限不为零).

(6) 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则 $\lim cf(x)=c\lim f(x)$.

(7) 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 为正整数, 则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

(8) 如果 $f(x)\geq g(x)$, 而 $\lim f(x)=a$, $\lim g(x)=b$, 那末 $a\geq b$.

以上性质, 函数与数列完全类似.

(9) 复合函数的极限运算法则　设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 复合而成, 它在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, 并且在 x_0 的某个去心邻域内, 有 $g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

六、极限存在准则　两个重要极限

1. 准则 1(两边夹定理)

数列极限：如果(1) $y_n \le x_n \le z_n$，$(n=1,2,3\cdots)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，那末数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

函数极限：如果在 $0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$）内，恒有

(1) $g(x)\le f(x)\le h(x)$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} h(x) = A$，

则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x) = A$.

2. 准则 2

单调增加有上界或单调减少有下界的数列必收敛.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \mathrm{e}$.

注意：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$；(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$.

七、无穷小的比较

1. 定义

设 α 与 β 是同一极限过程中的两个无穷小，并且 $\alpha\ne 0$

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\ne 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小，记作 $\beta=O(\alpha)$；特别地，如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x^k}=c\ne 0\ (k>0)$，则称 α 是 x 的 k 阶无穷小.

2. 关于等价无穷小的定理

定理 1　β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理 2　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，并且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则有 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

3. 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，有如下等价式：

(1) $\sin x\sim x$　　(2) $\tan x\sim x$　　(3) $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$

(4) $\arcsin x\sim x$　　(5) $\arctan x\sim x$　　(6) $\ln(1+x)\sim x$

(7) $e^x - 1 \sim x$　　　　(8) $a^x - 1 \sim x\ln a$　　(9) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$

八、函数的连续性与间断点

1. 连续性的定义

(1) 函数在一点处连续．设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$），那末就称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续．

(2) 单侧连续．如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续（或右连续）．

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续且右连续．

(3) 函数在区间连续．如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任一点连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点连续，并且在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续．

2. 函数的间断点

(1) 定义．如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $x=x_0$ 称为函数 $f(x)$ 的间断点．

(2) 间断点的分类．左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点，特别地，左、右极限都存在且相等（即极限存在）的间断点称为可去间断点；不属于第一类间断点（即左、右极限至少有一个不存在）的间断点称为第二类间断点．

九、连续函数的运算与初等函数的连续性

(1) 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ f(x)/g(x)\ \ (g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 处也连续．

(2) 若函数 $y=f(x)$ 在某区间 I_x 上单调且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上也单调且连续．

(3) 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，$U(x_0)\subseteq D_{f\circ g}$，若 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $u_0=g(x_0)$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 点连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续．

(4) 一切初等函数在其定义域内是连续的．

十、闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数性质

1. 最值定理

闭区间上的连续函数在该区间上有界，并能取到最大值和最小值．

2. 介值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 必能在 $[a,b]$ 上取到介于最大值和最小值之间的任何值．

3. 零点定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

4. 分段函数在分界点处的连续性

设 $f(x)$ 是一分段函数，x_0 为一分界点，若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续. 否则点 x_0 为间断点.

典型例题解析

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\ln(1-2\sin x)$；

(3) $f(x)=\cot\pi x+\arcsin 2^x$.

分析　求函数的定义域，主要是使所给函数的数学式子有意义，要注意以下几种情况：

(a) 分式的分母不能为零；

(b) 偶次根号内的式子应大于或等于零；

(c) 对数的真数应大于零；

(d) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，其 $|x|\le 1$；

(e) 若函数的表达式由几项组成，则它的定义域是各项定义域的交集；

(f) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

解　(1) 要使函数 $f(x)$ 有意义，应有

$$\begin{cases}1+\dfrac{1}{x-2}\neq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}，即 \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq 2\end{cases}.$$

故所给函数的定义域是不等于 1 和 2 的所有实数.

(2) 要使函数 $f(x)$ 有意义，应有

$$\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 1-2\sin x>0\end{cases},$$

解得

$$-1\le x<\frac{\pi}{6}.$$

故所给函数的定义域是 $[-1,\dfrac{\pi}{6})$.

(3) 要使 $\cot\pi x$ 有意义，必须

$$\pi x\neq k\pi，即 x\neq k\ (k\in Z).$$

要使$\arcsin 2^x$有意义，必须 $0 < 2^x \le 1$，即 $x \le 0$.
故所给函数的定义域是 $x \le 0$ 且 $x \ne -1,-2,\cdots$

例 2 求下列函数的值域：

(1) $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$； (2) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(1) **分析** 本题可用求其反函数定义域的方法来求直接函数的值域.

解 由于 $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$ 的反函数为

$$x = \frac{y+3}{2-y}，\text{其定义域为 } y \ne 2，$$

故直接函数的值域为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) **分析** 本题可以利用不等式来求值域.

解 由基本不等式，$1+x^2 \ge 2|x|$，

所以 $|y| = \dfrac{|2x|}{1+x^2} \le 1$，即所求值域为$[-1,1]$.

例 3 设$f(\mathrm{e}^{x-1}) = 3x-2$，求$f(x)$.

分析 本题是求函数的表达式，可以用凑元法或换元法.

解法一 （凑元法）因为 $x-1 = \ln \mathrm{e}^{x-1}$，
所以 $3x-2 = 3(x-1)+1 = 3\ln \mathrm{e}^{x-1}+1$
即 $f(\mathrm{e}^{x-1}) = 3\ln \mathrm{e}^{x-1}+1$，
故 $f(x) = 3\ln x+1\ (x>0)$.

解法二 （换元法）令$u = \mathrm{e}^{x-1}$，则$x = \ln u+1$，
所以 $f(u) = 3(\ln u+1)-2 = 3\ln u+1\ (u>0)$
故 $f(x) = 3\ln x+1\ (x>0)$.

例 4 下列各题中，函数$f(x)$和$g(x)$是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$，$g(x) = \arcsin x + \arccos x$；

(2) $f(x) = x-1$，$g(x) = \sqrt{(x-1)^2}$；

(3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$，$g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$.

分析 要判断两个函数相同，关键是要判断它们的定义域相同，并且对应法则也要相同.

解 (1) 由于$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$[-1,+1]$. 所以这两个函数不相同.

(2) 由于$f(x)$和$g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，所以这两个函数定义域相同. 但是在区间$(-\infty,+1)$内，它们的对应法则不相同. 所以这两个函数不相同.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com