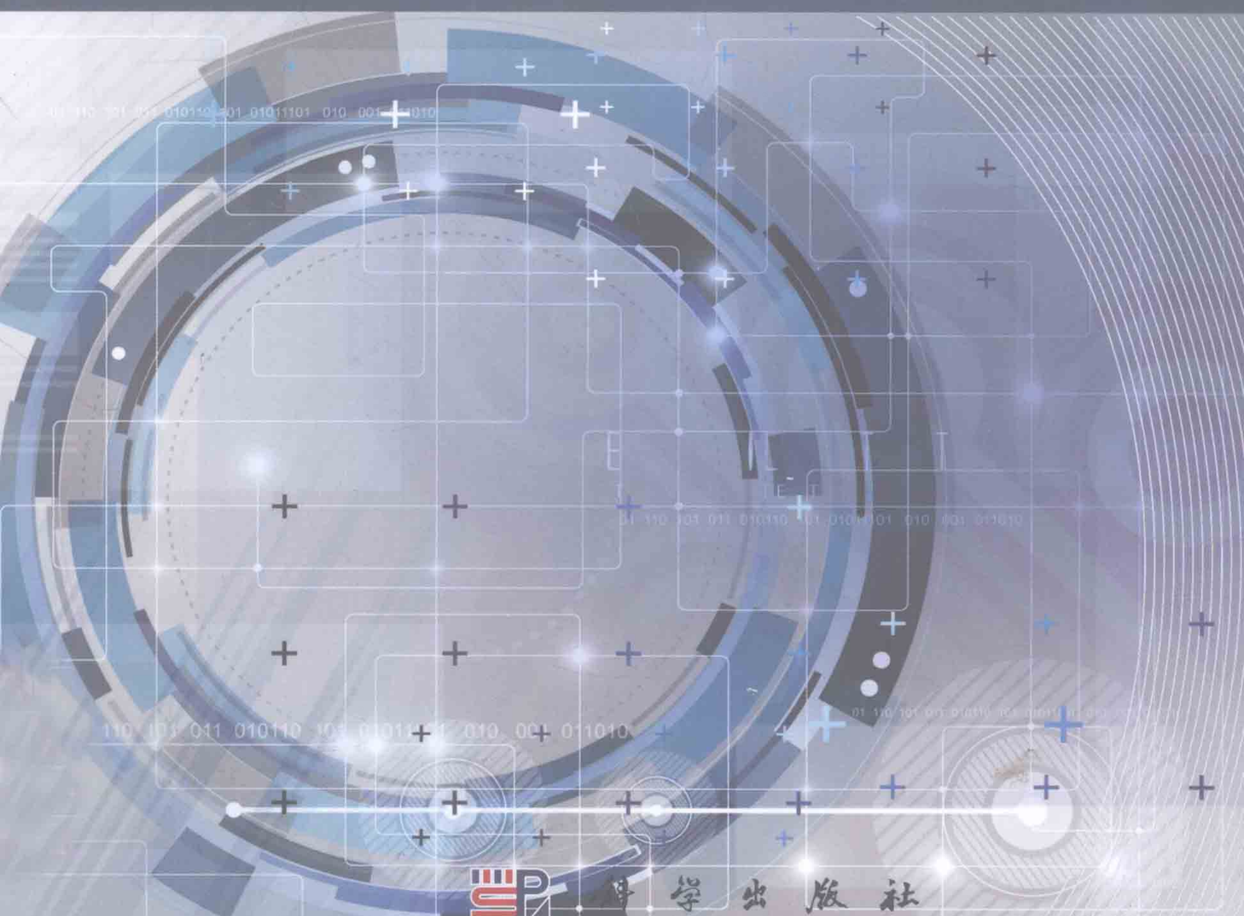
控制科学与工程研究生系列教材

最优估计理论

刘 胜　张红梅 编著



科 学 出 版 社

哈尔滨工程大学“十一五”研究生教材建设专项资金资助出版

控制科学与工程研究生系列教材

最优估计理论

刘 胜 张红梅 编著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书全面系统地阐述了最优估计的理论和方法。首先介绍了维纳滤波的原理、求解及应用；然后分别针对离散系统和连续系统，详细介绍了卡尔曼滤波器的原理、推导过程及其稳定性和鲁棒性，并以舰船和水翼艇的姿态估计问题为例，讨论了其具体应用；针对卡尔曼滤波的发散现象，介绍了若干抑制滤波发散的方法；对于非线性系统的滤波问题，介绍了贝叶斯滤波、扩展卡尔曼滤波等经典方法，并介绍了粒子滤波、Unscented 卡尔曼滤波、预测滤波等较新的非线性滤波方法；最后，针对系统模型不准确的情况，讨论了若干自适应卡尔曼滤波方法。

本书的特点是理论基础全面，内容深入浅出，注重理论与实际问题的结合，实例特色鲜明。本书既可作为控制理论与控制工程、导航与测控、通信工程、仪器科学与技术、系统工程、电气工程、电子信息工程等学科的研究生和高年级本科生教材，也可作为相关领域科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

最优估计理论/刘胜，张红梅编著. —北京：科学出版社，2011
(控制科学与工程研究生系列教材)
ISBN 978-7-03-031149-8

Ⅰ.①最… Ⅱ.①刘…②张… Ⅲ.①估计-最佳化理论-研究生-教材
Ⅳ.①O211.67

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 093185 号

责任编辑：王鑫光 张丽花/责任校对：林青梅
责任印制：张克忠/封面设计：陈敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 6 月第一次印刷 印张：18 1/4
印数：1—3 000 字数：360 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

在随机系统控制和信息处理等科学技术领域中，经常遇到这样一类问题：如何滤除物理系统中存在的随机干扰和测量误差，或者降低它们的影响，进而从含有噪声的信号中确定出系统的状态和参数。这类问题实际上属于信号去噪问题。当有用信号的频率与噪声的频率不在同一频带内或相差很大时，可以通过选频的方法(即采用带通滤波器)将噪声滤除。但实际上，很多物理过程中有用信号的频率与噪声的频率很接近，而且干扰和噪声往往具有随机性，这样就无法用普通的滤波器将噪声滤除。这种情况下，为了得到有用信号，只能通过数学的方法处理含噪信号，在统计意义上确定最接近有用信号真值的估计，这就是估计问题。如果估计限定在某种估计准则或性能指标的意义上，则称为最优估计。描述最优估计算法的一系列公式称为最优估计器。当估计状态的时刻与最后获得测量的时刻相同时，估计问题也称为滤波问题，对应有最优滤波和最优滤波器。

最优估计理论的应用范围很广，涉及军事和民用的各个工业领域。例如，估计领域中出现较早的最小二乘法就是高斯在研究卫星的轨道确定问题时得到的研究成果。作为系统状态估计的应用，除了上述的飞行器定轨问题，还有对各类载体(如飞行器、舰船及陆地车辆等)或系统的姿态进行估计的问题，用于惯性导航、工业过程控制等各类控制问题。作为参数估计的应用，有系统的参数辨识、交通流量估计及水流密度估计等。系统状态预测中的应用，有天气预报、舰船姿态预报或动力系统负载的预测等。作为信号去噪的应用，有图像处理、雷达和声呐目标探测、通信信号去噪及各类试验数据的处理等。

在最优估计理论中，由于卡尔曼滤波(包括扩展卡尔曼滤波)具有计算量小、可递推计算、可实时估计等特点，成为导航领域中最有力、最有效的滤波算法。近年来，卡尔曼滤波与信息融合算法相结合，广泛应用于航空、航天、航海及陆地车辆的组合导航系统中。本书在具体的应用背景下举例说明了卡尔曼滤波的具体应用。

本书是作者在多次为哈尔滨工程大学研究生讲授最优估计理论的讲义基础上，经修改和补充，并结合多年的研究成果编写而成。全书共 10 章，由哈尔滨工程大学自动化学院的刘胜教授和张红梅副教授共同编写，其中，刘胜编写了第 1、2、5、6、7 章，张红梅编写了第 3、4、8、9、10 章。各章主要内容如下：

第 1 章介绍最优估计问题的历史背景、发展现状、基本概念，并简单介绍最优估计的应用领域。

第 2 章介绍随机数学理论、矩阵论和线性系统理论中的一些重要研究成果，作为学习后续章节必备的数学基础。

第 3 章介绍估计的基础理论，包括常用的最优估计准则、最小二乘估计理论、最小方差估计和线性最小方差估计、极大似然估计和极大验后估计等。

第 4 章介绍维纳滤波的原理及应用。首先介绍了连续线性系统的维纳滤波原理，并利用变分法导出维纳-霍夫方程，之后分别采用两种方法讨论了维纳-霍夫方程的求解问题，并通过具体的实例说明了这两种方法的应用，最后介绍了离散系统的维纳滤波问题。

第 5 章介绍随机系统的数学模型。首先给出确定性动态系统的数学模型；其次在考虑干扰和噪声的情况下得到随机动态系统的数学模型；然后介绍连续模型与离散模型的相互转化，以及非线性模型的线性化问题；最后讨论模型建立过程中存在的一些实际问题。

第 6 章介绍线性离散系统卡尔曼滤波的原理、滤波公式、性质和应用。首先通过直观法和投影法推导滤波公式，并讨论含有控制项和测量偏差、与系统干扰和测量噪声相关，以及有色噪声等情况下的滤波问题；其次介绍最优预测和最优平滑问题；然后讨论滤波的稳定性和鲁棒性；最后以舰和艇的状态估计问题为例说明卡尔曼滤波的具体应用。

第 7 章针对导致卡尔曼滤波发散的主要因素，详细讨论几种防止滤波器发散的方法。

第 8 章首先介绍线性连续系统卡尔曼滤波器的两种推导方法；其次讨论滤波的稳定性问题；最后对估计的误差进行分析。

第 9 章介绍几种非线性系统的滤波方法：基于条件概率密度估计的贝叶斯滤波、基于 Taylor 级数展开线性化的扩展卡尔曼滤波、基于统计线性回归的Unscented卡尔曼滤波和中心差分滤波、基于蒙特卡洛模拟的粒子滤波、统计线性化滤波及预测滤波。

第 10 章针对随机动态系统模型描述不准确及噪声统计特性未知的情况，讨论几种自适应的卡尔曼滤波方法。

哈尔滨工程大学自动化工程研究所的张兰勇博士完成了本书的校对及部分实例的仿真工作，在此对张兰勇博士表示感谢。另外，本书在编写过程中参考了相关领域大量的专著和论文，在此对这些文献的作者表示感谢。

本书的出版获得了哈尔滨工程大学“十一五”研究生教材建设专项资金的资助，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免会有一些不足和不妥之处，敬请专家和广大读者批评指正。

作　者

2011 年 5 月于哈尔滨

目　　录

第 1 章　绪　　论

内容提要　首先介绍最优估计问题提出的历史背景和发展现状，然后给出最优估计领域的一些基本概念，最后简单介绍最优估计的应用领域。

1.1　最优估计理论

在通信和控制工程中，经常遇到的一类问题是：如何滤除系统的随机干扰和测量误差，或者降低它们的影响，从而从含噪信号中确定被测量系统的状态和参数。当噪声的频率与有用信号的频率相差很大时，可以采用带通滤波器将噪声滤除掉，从而得到有用信号。但若噪声频率与有用信号频率一致，或噪声是随机的，那么为了得到有用信号，只能在统计的意义上通过数学的方法来确定最符合有用信号真值的一种估计，这就是估计问题。

在实际的系统中，并不是所有的变量都可以测量，某些需要研究的变量往往无法直接测量，如在很多控制系统中，反馈控制所需要的许多状态变量就无法直接测量，而只能测量和它们有函数关系的一些状态变量，这种测量称为间接测量。在测量的过程中，往往带有一些随机的测量噪声。这时，为了获得所要研究的状态变量值，就需要对试验数据加以处理，根据测量量和状态变量的函数关系去推算所需的状态变量值，这种推算的过程就是估计。众多的数学家和物理学家在这方面做出了重要的贡献，在大量的研究和试验基础上形成了估计理论。估计理论所研究的对象是随机现象，是根据受干扰的量测数据来估计关于随机变量、随机过程或系统某些特征的一种科学方法。

估计问题可分为两类：一是经典估计，也可称为参数估计或静态估计，其特点是依据量测方程由量测数据来估计系统的参数或状态。经典估计本质上属于概率论和数理统计理论的一个分支。二是现代估计，也称为状态估计或过程估计，其特点是依据动态的状态方程和量测方程，由量测数据来估计系统的状态。现代估计是现代控制理论、计算机技术与概率论数理统计相结合的产物，是现代控制理论的一个重要分支。本书重点研究的是第二类问题。

所谓最优估计，是从某种意义上来说是最好的估计。最优估计理论研究的开始可以追溯到 1632 年伽利略(Galilei)的贡献，他尝试用各种误差函数最小化的方法提出估计理论问题。随后，一系列研究者在这方面开展过工作，但是到现在仍然使用的著名方法是最小二乘估计。它是高斯(Gauss)在 1795 年帮助天文学家确定谷神

星座的位置计算工作时，采用的一种随机变量的数据处理方法。一百多年后（约1910年），从事概率密度研究的费歇尔（Fisher）提出了极大似然估计法，对估计理论的广泛课题作出了又一大贡献。

在20世纪40年代的最初几年中，维纳（Wiener）和柯尔莫哥洛夫（Колмогоópов）开始将统计的方法应用于通信系统和控制系统的研究中。维纳的工作是从研究统计平稳的随机序列开始的，他证明：在一定条件下，平稳随机序列的时间平均等于相平均，维纳就是基于这点提出了著名的维纳滤波理论。维纳滤波是统计最优滤波器的一种频域设计法，充分利用了输入信号和量测信号的统计特性，通过求解维纳-霍夫方程得到最佳滤波器的冲激响应，给出了最小均方误差意义下的第一个明确解。在一般情况下，求解维纳-霍夫方程存在极大的困难。此外，维纳滤波只适用于平稳随机过程且已知有理谱密度的情况，且不能对数据进行实时处理。50年代中期，这种滤波方法已经不能满足实际应用的需要。

1960年，卡尔曼（Kalman）和布西（Bucy）首次将现代控制理论中的状态空间思想引入最优滤波理论，提出了最优递推滤波法，即卡尔曼滤波器（Kalman Filter，KF）。卡尔曼也是以估计误差方差最小为准则，但是用状态方程和观测方程描述系统的动态模型和观测模型。卡尔曼滤波是一种时域递推的方法，可用于时变、非平稳和多维信号的估计，便于计算机实现。

卡尔曼最初提出的滤波理论只适用于线性系统。但是，因为大多数现实问题的模型本来就具有非线性，如许多通信中的调制方法及火箭制导与控制问题，因此必然导致发展非线性滤波算法。但是，非线性滤波问题在理论上比线性滤波问题要困难和复杂得多。对于非线性系统，适用于线性系统的很多条件和性质已经不再成立，因此对于非线性系统，无法得到其闭形式的解，也就无法建立衡量最优解的准则。

为了将卡尔曼滤波推广应用到非线性领域，布西等人在提出线性卡尔曼滤波理论之后又提出了扩展的卡尔曼滤波（Extended Kalman Filtering，EKF）理论。EKF采用一阶线性化的方法来近似非线性系统函数，得到的是次优滤波方法。与之类似的方法还有标称状态滤波法。由于这类方法是将非线性函数按泰勒级数展开，并截取一阶项的结果，因此近似精度仅为一阶。为了提高近似精度，可以在展开式二阶项以后进行截断，这样就得到二阶滤波，可将近似精度提高至二阶。

比较精确的非线性滤波方法是概率滤波法和统计法。基于概率滤波的主要思想是：将系统方程的滤波问题转化为计算状态基于观测信息的条件概率密度函数的问题，随机状态估计的完全解就是状态的条件概率密度函数，但实际上却很难求出。基于统计的估计方法是通过增加观测数目的方法减小估计误差，将估计问题转化为使误差最小化的确定性方法，其典型代表是20世纪90年代出现的粒子滤波器。在理论上，选用的粒子数越多，解的精确度就越高，但引起的另一个问题是计算量也随之增加。

1.2 估计理论基本概念

1. 最优估计问题的一般提法

假设要估计的随机变量 x 无法直接观测，需要通过观测与 x 统计相关的随机变量 z 来对 x 进行估计。已知关于系统运动学或动力学和量测方程的知识，即给定系统模型和观测模型的情况下，利用系统过程噪声、量测噪声的统计特性和初始条件信息，依据某种最优准则对量测值 z 进行处理，确定系统当前时刻状态 x 的问题，称为最优估计问题。

x 的最优估计值用 $\hat{x}$ 表示，一般是变量 z 的函数 $g(x)$，即 $\hat{x}=g(x)$。因此，$\hat{x}$ 本身也是随机变量。$g(z)$可以是任意形式的函数，但在某些情况可以限定为观测变量 z 的某个特定形式的函数，如线性函数或多项式函数等。

2. 最优估计器

实现最优估计的算法或系列公式称为最优估计器或最优滤波器。

3. 估计误差

估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 定义为真实值 x 和估计值的差 $\hat{x}$，即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = x - \hat{x}$$

估计误差可以用来评价估计的效果，当然，估计误差越小，估计效果越好。由 x 和 $\hat{x}$ 是随机变量可知，估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 也是随机变量，因此常用其均值 $E(x-\hat{x})$ 和方差 $E[(x-\hat{x})^2]$ 来描述。

4. 滤波

“滤波”是与估计有关的一个概念。“估计”的说法源于控制领域，而“滤波”源于通信理论。工程上的滤波问题在理论上是一类统计估计问题。最优滤波实际上是最优估计的一类方法。从数学的观点看，滤波理论是统计学中估计理论的一个重要分支；从工程的观点看，它又是系统工程研究的一个重要组成部分。

5. 最优估计准则

说估计结果是“最好”的，应该基于某个特定的评价标准，这个评价标准就是最优估计准则。最优估计准则是使某种性能指标达到极大或极小的准则。选择不同的性能指标，就得到不同的最优估计准则，而不同的估计准则，将最终导致不同的最优估计方法。因此，在某一准则下是最优的估计，在另一准则下未必还是最优的。

6. 性能测度

性能测度即性能指标，是用以判断估计最优性的标准，一般用 J 表示。J 可以有很多函数形式，最常用的是代价函数的期望值。这里，代价函数是估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的函

数，表示为 $C(\boldsymbol{\varepsilon})$。这种测度称为贝叶斯性能测度，可以由下式表示：

$$J = E[C(\boldsymbol{\varepsilon})]$$

得到的相应估计值称为贝叶斯估计。

由观测 $\boldsymbol{z}$ 得到对 $\boldsymbol{x}$ 的贝叶斯估计由式 $\hat{\boldsymbol{x}} = g(\boldsymbol{z})$ 给出。这里，$g(\boldsymbol{z})$ 是使上述 J 最小的函数。如果 $C(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}^2$，则性能测度称为均方误差，此时 $g(\boldsymbol{z})$ 将是 $\boldsymbol{x}$ 的最小均方误差估计。$C(\cdot)$ 也常选作平均绝对误差和平均均匀误差。均方误差与它们相比，通常需要更少的统计信息而且更易于数学计算，因此常选择均方误差作为性能评价准则。

7. 最优估计的分类

按照状态估计的时间 t_1 与最后量测时间 t 的关系，最优估计问题可分为三类：

(1) 预测 $t_1 > t$，即进行状态估计的时间在最后量测的时间之后；

(2) 滤波 $t_1 = t$，即进行状态估计的时间与最后量测的时间相同；

(3) 平滑 $t_1 < t$，即进行状态估计的时间在最后量测的时间以内。

本书重点讨论滤波问题。

1.3 最优估计应用领域

最优估计理论的应用很广，如飞行器轨道确定、雷达目标状态估计、惯性导航、工业过程控制、信号去噪、系统模型参数辨识、统计图像增强、交通密度估计、河水流量估计、动力系统负载预测、实验数据处理、核医学中示踪物的研究及向量心电图分类等。

下面介绍几个估计理论应用的例子。

例 1.1 系统控制问题。通过对系统运行状态进行控制，使系统能够始终工作在最佳状态。为此，需要对系统状态有关的物理量不断地观测，并对其观测数据进行分析处理，去掉误差信号，得到与系统状态有关的控制信号，使控制系统按预期的要求状态运行。这时，观测量具有如下形式：

$$\boldsymbol{z}(t) = h[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}(t), t]$$

式中，$\boldsymbol{z}(t)$ 为 m 维观测向量；$h[\cdot]$ 为已知的向量函数；$\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维系统状态向量；$\boldsymbol{v}(t)$ 为 n 维随机观测误差。为了得到与系统状态有关的控制信号，首先要解决由 $\boldsymbol{z}(t)$ 估计 $\boldsymbol{x}(t)$ 的问题。

例 1.2 通信问题。通信系统中的一个重要问题是如何从接收信号中提取被发送的信息。由于大气噪声和电路噪声的干扰，所接收到的信号不是发送的信号 $\boldsymbol{x}(t)$，而是 $\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{n}(t)$，$\boldsymbol{n}(t)$ 为噪声信号。这样，通信系统的主要问题就是如何从接收到的信号 $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{n}(t)$ 中滤掉 $\boldsymbol{n}(t)$，而将有用信号尽可能恢复出来，也就是由 $\boldsymbol{z}(t)$ 估计 $\boldsymbol{x}(t)$。

例 1.3 验后数据处理。以导弹飞行状态为例。在飞行试验中，如果已由地面

跟踪系统和遥测系统观测记录到了导弹飞行参量 $z(t)$，它与飞行状态 $x(t)$ 及观测误差 $v(t)$ 之间的关系为

$$z(t) = h[x(t), v(t), t]$$

这样，在试验以后为了得到导航精度并分析导航系统的误差，就需要根据观测数据 $z(t)$ 以估计导弹飞行状态 $x(t)$。

例 1.4 系统辨识问题。一种简单的辨识方法是利用系统输入和输出的观测数据估计系统模型中的参数。

在最优估计理论中，卡尔曼滤波(包括扩展卡尔曼滤波)是最典型，也是应用最普遍的方法。随着计算机的发展日益广泛，它的应用已遍及各个领域。例如，美国阿波罗计划中，登月舱与指挥舱的会合，就是采用卡尔曼滤波对登月舱载雷达测量数据进行处理以获得关于位置与速度的估计，达到会合的目的。又如，空中交通管制系统对飞机航迹进行估计，以便完成导航的任务。又如，雷达对弹道式再入体用卡尔曼滤波作轨道估计和弹着点预测。再如，跟踪雷达采用卡尔曼滤波实现机动目标跟踪。在工业控制中也有采用卡尔曼滤波解决氧气炼钢问题，用卡尔曼滤波从排气中一氧化碳的分压来估计炉温及钢水含碳量。其他领域也开始运用卡尔曼滤波，如原子反应堆、电力站、化工、气象和水文地质等。

卡尔曼滤波最成功的应用是在导航领域中。对于导航变量的修正，以前只是参考外部的测量值，但这种作法忽略了两个事实：第一，外部测量值本身含有随机误差，这种误差与导航误差相比，可能是显著的；第二，导航系统的误差主要是由随机而时变的导航传感器误差所引起的。可以利用卡尔曼滤波器处理导航系统传感器的输出，以得到所考察过程的“最好”估计值。这样，可以最佳利用外部测量值和导航系统提供的结果，因此能够得到比只利用外部测量值，或只利用导航系统时更高的导航精度。

卡尔曼滤波可以根据单一传感器在单一过程中提出，也可由多传感器和多过程提出。随着导航技术的发展及对导航精度的要求，组合导航已经成为普遍的导航方式，因此卡尔曼滤波常用于多传感器系统。这时，可以针对多个子系统，设计并行的卡尔曼滤波器组，即联邦卡尔曼滤波。其中的每个子滤波器各自独立运行，最后将各个子滤波器的输出结果进行融合，以获得整个系统的状态估计结果。采用这种滤波器结构的优点是设计灵活，容错性能好且各个子滤波器的计算量也较小。

值得一提的还有粒子滤波。由于它可用于非线性—非高斯系统，因此对于估计精度要求高的问题，粒子滤波是值得考虑的滤波方法。虽然粒子滤波对计算量的要求过大，但是随着微处理器的快速发展，滤波的实时实现已指日可待。粒子滤波近些年来在运动目标的跟踪研究方面获得了长足的发展，如对导弹和水下目标的跟踪问题，机器人的路径规划等。

可以说，最优估计理论的应用已渗透到工业生产的各个领域，是一种值得掌握的专业理论。

第2章 数学基础

内容提要 为了方便后续章节的学习和讨论，本章介绍一些必备的数学基础知识，主要包括概率论和随机过程的基础理论、线性系统对平稳随机过程的响应、正交投影理论，以及矩阵基本理论。本章还介绍了一类特殊的随机过程——海浪。介绍了海浪的模型、仿真及其概率阈值预报问题。

2.1 概率论

2.1.1 事件与概率

1. 事件及运算关系

从某一研究任务出发，对随机现象进行观察和实验，称为随机试验。

在一定条件下，随机试验中可能出现也可能不出现的事件称为随机事件，简称事件，用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。在一定条件下必然发生的事件称为必然事件；在一定条件下必然不发生的事件称为不可能事件。

试验中每一种可能产生的结果称为基本事件。所有的基本事件组成一个空间，称为样本空间，用 Ω 表示。其中的每一个基本事件称为该样本空间中的一个样本点，用 ω 表示。

描述不同事件 A 和 B 之间关系的数学方法称为事件的运算代数。其基本的运算法则有以下几种：

(1)包含。如果事件 A 发生，导致事件 B 也必然发生，则称事件 A 包括于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

(2)等价。若事件 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 是等价的，记为 $A=B$。

(3)并。如果事件 A 与事件 B 至少有一个事件发生，或者二者同时发生，称为 A 与 B 的并，或 A 与 B 的和，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$。可推广到 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$。

(4)差。表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A\backslash B$ 或 $A-B$。

(5)交。如果事件 A 和事件 B 同时发生，称为 A 与 B 的交，或 A 与 B 的积，记为 $A\cap B$ 或 AB。可推广到 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$。

(6)互斥。如果事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与 B 是互斥的，或者说是不相容的。

(7)对立。如果 $A\cap B=\Phi$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 B 为 A 的对立事件，记为 $B=\bar{A}$。

(8)完备。如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 在每次试验中至少有一个发生，即 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 构成一个事件完备组；特别地，当 $A_i\cap A_j=\Phi(i\neq j)$，则称 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是两两互斥的事件完备组。

随机事件的代数运算法则主要有：

(1) $A+A=A$；

(2) $AA=A$；

(3) $A+B=B+A$；

(4) $AB=BA$；

(5) $A+(B+C)=(A+B)+C$；

(6) $A(BC)=(AB)C$；

(7) $A(B+C)=AB+AC$；

(8) $A+(BC)=(A+B)(A+C)$。

值得注意的是，随机事件的运算不同于普通代数中数的运算。例如，$C=A+B$ 不同于数运算的加法，$C=AB$ 不同于数运算的乘法。

2. 概率及基本公式

1)概率

概率的定义有多个，例如古典概率、几何概率、统计概率和数学定义，这里只介绍其中的两个。

(1)概率的统计定义。

概率是对随机事件发生的可能性的一种定量描述。假定在相同的条件下进行了 n 次试验(n 足够大)，其中事件 A 发生了 m 次，则事件 A 发生的频率 $f(A)$ 定义为

$$f(A)=\frac{m}{n} \tag{2.1.1}$$

采用不同批的 n 次试验，求得事件 A 发生的频率可能会完全不等。如果试验次数 n 足够大，则利用各批试验所求得的频率值 $f(A)$ 将接近某一个固定的常数 $P(A)$，称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率。如此定义的概率称为统计概率。

(2)概率的数学定义。

设 F 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的一个 σ- 域，即 F 满足下面的条件：

①$\Omega\in F$；

②若 $A\in F$，则 $\bar{A}\in F\ (\bar{A}=\Omega\backslash A)$；

③若 $A_i\in F\ (i=1,2,\cdots)$，则有 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in F$。