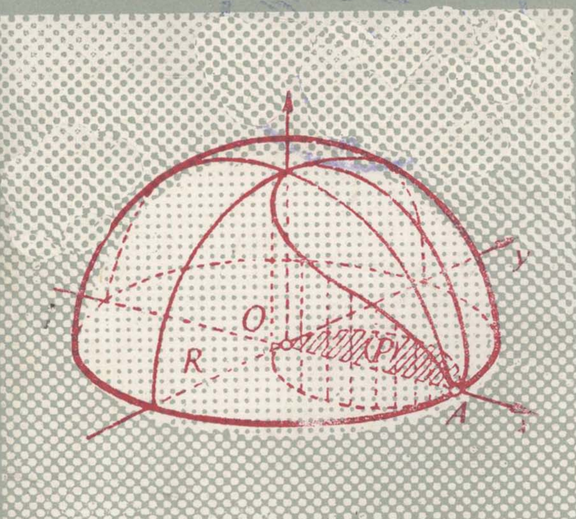
高等数学纲要式丛书

多元函数微积分学



广东科技出版社

高等数学纲要式丛书

Duoyuan Hanshu Weijifen Xue

多元函数微积分学

《高等数学纲要式丛书》编译组

广 东 科 技 出 版 社

内 容 简 介

《高等数学纲要式丛书》是根据美国《哨姆纲要式丛书》中的几本书，参照我国高等工科院校高等数学与工程数学教学大纲编译而成的。

本书为《高等数学纲要式丛书》之一，内容包括多元函数微分学、矢量、多元函数微分学的应用、重积分、曲线积分与曲面积分。每章分基本内容、问题与解答、习题三部分。本书的编写形式比较新颖，着重于知识的归纳概括，力求系统化，条理化。书中还编写了不少富有新意的例题和习题，帮助读者掌握解题方法。本书可供高等工科院校、电视大学的学生及有关科技人员学习参考，也可供报考工科研究生的人员复习高等数学时参考使用。

高等数学纲要式丛书
多元函数微积分学
《高等数学纲要式丛书》编译组
*
广东科技出版社出版发行
封开县人民印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本　11印张　248,000字
1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷
印数1—10,000册
统一书号 7182·90 定价1.74 元

编 译 序

目前，为各类高等院校工科学生编写的高等数学教材及参考书已经不算少了。但当我们看到美国一套纲要式丛书(Schaum′s Outline Series)中的几本书后，仍认为有将它们介绍给我国读者的必要。据我们编译组一些同志在美国所了解，这套丛书深受美国工科大学生的欢迎。

这套丛书的编写形式颇为新颖，原著在每章的第一部分中先介绍有关内容，并辅以说明性材料，而不涉及复杂的推理，这样能使读者比较顺利地了解该章的主要内容；第二部分包括一大批题目及解答，其中有不少定理的证明和重要的例题，对读者进一步加深理解所学的知识，掌握解题的方法和技巧，富有启发性；第三部分是供读者复习用的练习题，其中大部分计算题附有答案。

为了使这套丛书更适合我国大学生学习高等数学和工程数学的需要，我们对译稿在内容上、文字上作了较大的改动。对现行教学大纲所要求而原著没有的内容，编译时作了补充。在例题及习题方面，我们也尽力加以充实。这部分内容除选自原著外，一部分选自中外文教材和习题集，另一部分选自近年来招考研究生的入学试题，还有些是选自编译者在教学过程中所收集和自撰的。

这套丛书的编译本定名为《高等数学纲要式丛书》，是根据M.R.施皮格尔所著《高等微积分》（Advanced

Calculus) 及R. 勃朗荪所著《微分方程》 (Differential Equation) 编译的，分为三册，即《一元函数微积分学》、《多元函数微积分学》及《级数和微分方程》。其它原著将陆续编译，另册出版。

参加本书编译工作的有华南工学院数力系巫观发、袁国珍、陈璞华、凌志英、吴满、赵永康、汪国强、陈必彬、徐永汉，和广东广播电视大学谭英仕等。

本书编译完稿之后，承蒙卢文教授和中国科学院数学研究所洪毅博士审校，谨此致谢。

广东广播电视大学等部门的领导和有关同志给了我们很大帮助和支持，在此一并致谢。

由于时间匆促，编译水平有限，书中缺点错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　译　者

1984年9月

原　序

不同的人对于高等微积分有着不同的理解。有的认为，它实际上是用高观点来处理初等微积分，亦即对于所涉及的定理给出严格的叙述和证明；有的则认为，它指的是种种高等的专题，这些专题是重要的，但又不属于初等微积分的课程。

本书是在这两者之间采取一种适当的折衷办法编写而成的。前几章用于复习和引伸已经在初等微积分中讲过的内容。对于曾经学过这些内容但已遗忘的读者，学习这些章节无疑是必要的。而且，这些章节也可以为在学习初等微积分时采用不同类型教科书的读者提供一份统一的材料。后面几章是一些专门的高等的课题。即使对于科学家、工程师以及数学家来说，如果要精通自己的业务，学习这些章节也是重要的。

本书可以作为所有通用的标准教本的补充读物，也可作为高等微积分的正式教材。而对于学习物理、工程以及其他用到高等微积分方法的课程的学生来说，学习本书也是很有用的。

本书每章的开头，都对有关的定义、原理、定理加以清晰的叙述，并附有说明和其他描述性的材料。接着是按不同类型分组的题解及习题。题解是用来说明及进一步阐述理论的，从而突出要点。如果不这样做，读者可能会觉得自己仍

然没有把所学的知识掌握好。同时，为了学得扎实，对基本原理作必要的重复也是十分重要的。许多定理的证明和基本结论的推导，则包含在解题之中。习题是用来复习每章所讲的基本内容的，大多数习题均附有答案。

本书讨论的课题包括一元和多元函数的微积分学及其应用。由于矢量方法有助于简化记号且有明显的几何意义和物理意义，所以书中比较早地引入并使用它们。一些专门的课题诸如线积分、面积分、若干积分定理、无穷级数、广义积分、Υ－函数、B－函数和富氏级数，另外还有几章是富氏积分、椭圆积分和复变函数等，这些内容对于高等工程、物理和数学的研究都是很有用的。

本书由于比大多数教科书收集了更多的材料，因而显得更加灵活，它不但是一本颇为有用的参考书，而且可以进一步激发读者对所论课题的兴趣。*

M.R.施皮格尔

* 以下为鸣谢部分，译略。

目　录

第一章　多元函数微分学

§1　基 本 内 容

一、多元函数的概念

1．　二元函数的定义

设有变量x，y和z，当变量x，y在某范围内任取一对值时，变量z按照一定的法则有确定的数值与之对应，即称z为x,y的二元函数，记作

$$z=f(x,\ y)\quad \text{或}\quad z=z(x,\ y).$$

其中x，y叫做自变量，z叫做因变量．自变量x，y的取值范围称为函数的定义域．

类似地可以定义三元函数$w=f(x,\ y,\ z)$及三元以上的函数．二元以及二元以上的函数统称为多元函数．

与一元函数相类似，对于多元函数的定义需注意如下几个问题：

（1）对应规律和定义域是多元函数定义中的两个要素．二元函数的定义域是xOy坐标面上点$(x,\ y)$的集合．确定二元函数的定义域，除了考虑实际情况外，主要从函数表达式的数学意义来确定．

例如：函数$z=\sqrt{x-y}\ln(xy^2)$的定义域由不等式组

$$\begin{cases} x-y\geqslant 0, \\ x>0, \\ y\neq 0 \end{cases}$$

来确定.其图象如图1－1所示.

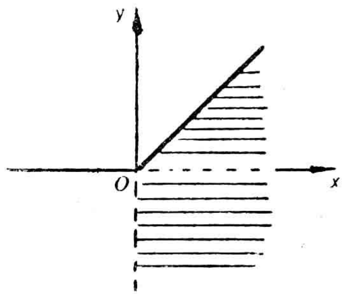


图1－1

在作定义域草图时，特别要注意是否包含边界，包含的边界用实线，否则用虚线.

二元函数的值域是三维空间的点$P(x, y, z)$的集合，一般来说它的轨迹是一张曲面.

（2）多元函数的表示法也有三种：列表法、解析法和图象法.

（3）如果对于函数的定义域内的一对数(x, y)，只有一个z的值与之对应，则这个函数称为单值函数，否则称为多值函数.以后，除非有另外说明，不然我们所讨论的函数都是单值函数.

2．平面区域

（1）邻域：平面上以点$P_0(x_0, y_0)$为中心，$\delta>0$为半径的圆内的点的全体，即适合不等式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点(x, y)的全体.称为点P_0 (x_0, y_0)的圆形δ邻域.而适合不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的所有点（x，y）组成的集称为去心的圆形δ邻域。

另外，由$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 所确定的点集称为点（x_0，y_0）的方形δ邻域。在方形δ邻域中去掉（x_0，y_0）这点后所得的点集，称为去心方形δ邻域。以后当两种邻域都可以用时，我们就使用δ邻域这个词。

（2）内点：设S是一个平面点集，$P\in S$，若存在一个P的δ邻域，这个邻域内的所有点都属于S，则称P为点集 S 的内点。

（3）外点：设$P\overline{\in}S$，若存在一个P的δ邻域，这个邻域中的所有点都不属于S，则称P为S的外点。

（4）边界点：设P是平面上的一点，若P任意一个δ邻域，既含有属于S的点，也含有不属于S的点，则P称为S的边界点。

（5）开集：如果点集S的每一个点都是它的内点，就称S是开集。

（6）开区域和闭区域：如果开集 S中任意两点 P_1和P_2之间都可以用一条由有限条直线段所组成的折线连结起来，而这条折线全部含在S中，我们就称S是开区域，也简称区域。

一个开区域加上边界就是一个闭区域。

在本书中我们只讨论其边界是由有限条光滑曲线（包括直线）组成的区域。

（7）单连通域和复连通域：一个平面区域，如果全落在此区域内的任一条封闭曲线都可以不经过S 以外的点而连续地收缩为一点，则称此区域为单连通域，否则称为复连通域，直观地说：复连通域就是含有“洞”的区域。

（8）有界域，无界域：如果区域S包含在某一个以原点为中心的圆内，S就称为有界域，否则称为无界域。

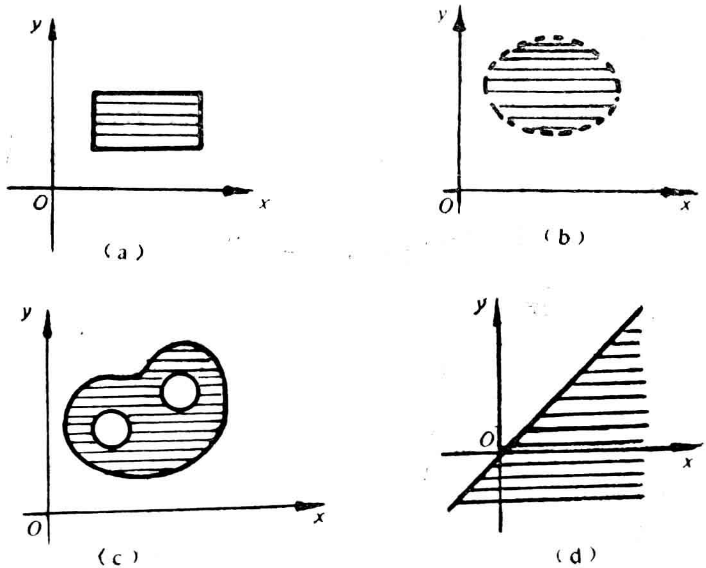


图1－2

例：如图1－2所示：

图(a)表示单连通有界闭区域；

图(b)表示单连通有界开区域；

图(c)表示复连通域；

图(d)表示无界区域。

二、多元函数的极限与连续性

1.二元函数极限定义

设$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$某邻域内有定义（点P_0可

以除外）．若$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$，使当

$$0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，即$(x,\ y)$在(x_0,y_0)的去心δ邻域中，有$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数$z=f(x,\ y)$当$x\to x_0$，$y\to y_0$（或$\rho\to 0$）时的极限．记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,\ y)=A，\ 或f(x,\ y)\to A\ (x\to x_0,\ y\to y_0).$$

对于这个定义，需注意如下几个问题：

（1）$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$的极限存在与否不依赖于$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$处的值，$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$处可以没有定义（见例1和题3），或$f(x_0,\ y_0)\neq A$．

（2）二元函数$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$的极限存在，是指不论点$P(x,\ y)$以任何方式趋于$P_0(x_0,\ y_0)$，$f(x,y)$都趋于同一个常数．因此当点P以某一特殊方式趋近于P_0时函数$f(x,\ y)$有极限，还不能断定函数在点$(x_0,\ y_0)$处有极限．当然若P以不同的方式趋近于P_0时，函数$f(x,y)$取得不同的值，则在点$(x_0,\ y_0)$处极限就不存在（见题5、题11）．

（3）在极限的定义中，可以用去心方形δ邻域代替去心圆形邻域（见题3、题4）．

（4）二元函数极限的几何意义：类似一元函数极限的几何意义，$\forall\varepsilon>0$，作平面$z=A-\varepsilon$和$z=A+\varepsilon$，存在$(x_0,\ y_0)$的一个去心δ邻域．使得$z=f(x,y)$在该邻域上的部分，曲面落在这两张平面之间．

2．二元函数极限运算法则

与一元函数一样，我们也有如下的二元函数极限运算

法则.

设$f(x, y)$, $g(x, y)$在区域R上有定义，且$\lim f(x,y)=A$, $\lim g(x, y)=B$（这里$\lim$是指 $x\to x_0$, $y\to y_0$时的极限，且A、B为有限常数），则

（1）$\lim[f(x, y)\pm g(x, y)]$
$=\lim f(x,y)\pm\lim g(x,y)=A\pm B$；

（2）$\lim Cf(x,y)=C\lim f(x,y)$;（$C$为任意常数）

(3) $\lim f(x,y)\cdot g(x,y)=\lim f(x,y)\cdot\lim g(x,y)$
$=A\cdot B$;

（4）$\lim\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}=\lim f(x,y)/\lim g(x, y)$
$=A/B$（其中 $B\neq 0$）.

3.二元函数连续的定义

设$z=f(x, y)$在区域R内有定义，$P_0(x_0, y_0)\in R$，若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

则称函数$z=f(x, y)$在点P_0处连续.

注意：（1）类似于一元函数的情况，二元函数的连续定义同样有三种等价叙述形式. 请读者去比较与阐述.

（2）如果$f(x, y)$在区域R内每一点处都连续，则称函数$f(x, y)$在R内连续.

（3）如果$f(x, y)$在P_0处连续，则在P_0处一定有极限，但$f(x, y)$在P_0处有极限时，函数$f(x, y)$在P_0处不一定连续. 见例1和题3、题9.

（4）在某区域R内连续的函数，其几何意义就是在R域内对应函数的图形是一张无孔隙、无裂缝的曲面.

（5）函数的不连续点称为间断点. 根据连续的定义，

常见的间断点有：函数没有定义的点，极限不存在的点和极限值A不等于函数值的点（$A\neq f(x_0, y_0)$）．

4.二元连续函数的性质

把一元连续函数的性质稍加改动都可以推广到多元函数中去．

（1）连续函数的和、差、积、商（分母不为零）、仍然是连续函数．

（2）连续函数的复合函数是连续函数．

（3）在有界闭区域R上连续的函数，在R上必达到最大值和最小值．

（4）在区域R上连续的函数，如果取得两个不同的函数值，则它在R上取得介于这两个值之间的任何值（至少一次）．

（5）一切多元初等函数在其定义区域内是连续的．

例 1　证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$．

证　由于$|f(x, y)-A|=\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2},$$

可见：$\forall\varepsilon>0$要$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$，只要

$$\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

因此，取$\delta=\varepsilon$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

时，$$\left|\frac{x_2y}{x^2+y^2}-0\right|<\delta=\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$。

显然，函数$f(x)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$在点(0，0)处是没有定义的，即$f(x,y)$在点（0，0）处不连续，但在这点（0，0）处极限可以存在。

例2 证明

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在整个平面上连续。

证明 因为 $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$是初等函数所以在其定义域内连续，所以$\frac{x^2y}{x^2+y^2}$除去$x^2+y^2=0$即点（0，0）的点外均连续。

又由例1知：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$，且函数$f(x,y)$在$x^2+y^2=0$处的函数值$f(0,0)=0$，即该点函数值等于在该点的极限值，所以$f(x,y)$在$x^2+y^2=0$处（即点(0,0)处）也连续。

综合上述讨论可知$f(x,y)$在整个平面上均连续。

注：（1）函数 $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$在（0，0）点处是没有定义的，所以在点（0，0）处不连续，但从例1知函数$f(x,y)$在此点的极限为零，若我们作这样补充定义：当